Skript zur Vorlesung

Analysis für das Lehramt

Marcel Hansmann

Stand vom 03. Februar 2023

Dies ist ein Skript zur gleichnamigen Vorlesung, die ich an der TU Chemnitz in den Wintersemestern 2016/17, 2020/21 und 2022/23 gehalten habe. Der Text ist nur oberflächlich Korrektur gelesen und nur zum internen Gebrauch gedacht. Für Kommentare und Korrekturen bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis . . . iii

1. Einleitung **1**

2. Logik und elementare Beweistechniken **11**
2.1. Logik . . . 11
2.2. Elementare Beweisprinzipien . . . 17

3. Mengen und Abbildungen **21**
3.1. Mengenlehre . . . 21
3.2. Abbildungen . . . 26

4. Die reellen Zahlen **36**
4.1. Die Körper-Axiome . . . 37
4.2. Die Anordnungsaxiome . . . 42
4.3. Einschub: Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion . . . 45
4.3.1. Die natürlichen Zahlen . . . 46
4.3.2. Die vollständige Induktion . . . 48
4.4. Das Archimedische Axiom und die Konvergenz von Folgen . . . 57
4.4.1. Das Archimedische Axiom . . . 57
4.4.2. Folgen reeller Zahlen . . . 59
4.5. Das Vollständigkeitsaxiom . . . 72

5. Folgen und Reihen **77**
5.1. Konvergenzkriterien für Folgen . . . 77
5.2. Reihen: Grundbegriffe . . . 89
5.3. Reihen: Konvergenzkriterien . . . 94

6. Reelle Funktionen **99**
6.1. Stetige Funktionen . . . 99
6.2. Der Zwischenwertsatz und seine Folgerungen . . . 108
6.3. Differenzierbare Funktionen . . . 117

7. Vergleich unendlicher Mengen **123**

Die Vorlesung wird sich an keinem einzelnen Lehrbuch orientieren. Die folgende Liste enthält aber eine Reihe von Büchern, die sich als Begleitlektüre zur Vorlesung eignen. Die meisten sind aus dem Campusnetz online frei einsehbar.

Die Bücher [1-6,8] sind Standardlehrbücher zur Analysis. Das Buch [7] gibt einen schönen Überblick über die Mathematik und seine Anwendungen. Schließlich ist [9] ein sehr lesbares und nicht zu anspruchsvolles Buch zur Geschichte der Mathematik.

Literaturverzeichnis

[1] Theodor Bröcker. *Analysis I. 2., korr. Aufl.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2., korr. aufl. edition, 1995. Online verfügbar: `https://web.archive.org/web/20160304115246/http://home.arcor.de/brt22071/analysis1.pdf`.

[2] Oliver Deiser. *Analysis 1.* Berlin: Springer, 2011. Online verfügbar: `http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis1`.

[3] Oliver Deiser. *Erste Hilfe in Analysis. Überblick und Grundwissen mit vielen Abbildungen und Beispielen.* Berlin: Springer Spektrum, 2012. Online verfügbar: `http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=eha1`.

[4] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 12th edition edition, 2016. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-00317-3`.

[5] Daniel Grieser. *Analysis I. Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-05947-7`.

[6] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 17th revised ed. edition, 2009.

[7] Ingrid und Joachim Hilgert. *Mathematik – ein Reiseführer.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2012. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-8274-2932-2`.

[8] Thomas Sonar. *Einführung in die Analysis. Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes.* Wiesbaden: Vieweg, 1999. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-322-80216-3`

[9] Hans Wußing. *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton.* Berlin: Springer, 2008. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-77192-0`.

1. Einleitung

Der Studiengang Lehramt an Grundschulen mit *studiertem Fach Mathematik* besteht aus zwei Komponenten,

- einer **didaktischen Ausbildung**, in der Sie lernen, wie sie den Grundschullehrstoff an Ihre Schülerinnen und Schüler vermitteln können, und
- einer **fachlichen Ausbildung**.

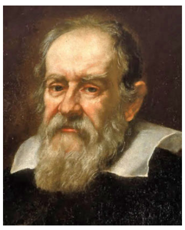
Im fachlichen Teil geht es nicht um den Grundschulstoff, den beherrschen Sie hoffentlich schon ☺, sondern um einen Einblick in verschiedene Gebiete der Wissenschaft Mathematik (*Analysis*, Algebra, Geometrie, Stochastik). Hierbei werden Ihnen zum einen die **Grundlagen der einzelnen Disziplinen** vermittelt, zum anderen geht es aber auch um einige weitergehende Ziele: So sollen Sie

- allgemeine **mathematische Denkweisen** und **Problemlösungsstrategien** kennenlernen, und
- die Mathematik als eine **historisch gewachsene**, aber immer noch sehr **lebendige Wissenschaft** erleben.

Idealerweise sollen Sie dies in Ihren späteren Unterricht einfließen lassen und damit Schülerinnen und Schülern abstraktes Denken, aber auch den Spaß an der Mathematik vermitteln.

Wozu brauchen wir Mathematik?

In unserem täglichen Leben kommen wir ständig mit Zahlen und elementarer Mathematik in Kontakt. Zum Beispiel beim Bezahlen von Rechnungen (Grundrechenarten), beim Vergleichen von Preisen (Dreisatz) oder bei der Geldanlage (Prozentrechnung). Aber brauchen wir darüber hinaus noch mehr Mathematik? Gibt es überhaupt noch mehr?



Galileo Galilei. Bildquelle: Wikipedia

Schauen wir uns dazu das folgende Zitat von **Galileo Galilei** (1564-1642) an: *„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“* Dieses Zitat hat heute mehr denn je seine Richtigkeit, denn alle Naturwissenschaften (Physik, Biologie, Chemie) benutzen mathematische Modelle und Methoden, um die

Welt um uns herum zu beschreiben und zu verstehen. Auch für andere Wissenschaften ist Mathematik fundamental, so etwa für die Informatik, die Sozialwissenschaften oder die Medizin. Betrachten wir ein paar Beispiele:

- Newtons[1] Gravitationsgesetze beschreiben die Bewegung der Planeten um die Sonne, aber auch die Bewegung einer Sonde auf dem Weg zum Mars. Für die modernen GPS-Systeme sind die Newtonschen Gesetze nicht mehr präzise genug, für ihre korrekte Funktion bedarf es der Einsteinschen[2] speziellen und allgemeinen Relativitätstheorien (ohne Betrachtung der Raumkrümmung Abweichungen bis zu 50m). Aus mathematischer Sicht wird man in beiden Fällen auf sogenannte *Differentialgleichungen* geführt, deren Behandlung ein Thema der Analysis ist.

- Die moderne Medizin wäre ohne Computertomographen (und ihre Verwandten) nur noch schwer vorstellbar. Mathematisch steckt dahinter die sogenannte Radontransformation, eine spezielle *Integraltransformation*. Auch dies führt in das Gebiet der Analysis.

- Fragen der Bevölkerungsentwicklung werden mit Mitteln der mathematischen Statistik untersucht.

- Ganz aktuell ist das Thema Covid 19: Die Ausbreitung des Virus wird mittels mathematischer Modelle simuliert, die auf *Differentialgleichungen* basieren.

Auch in unserem unmittelbaren Alltag spielt Mathematik oft an Stellen eine Rolle, an denen man sie nicht sofort vermuten würde.

- Moderne *Verschlüsselungsverfahren*, die etwa beim Online-Banking verwendet werden, beruhen auf der Tatsache, dass das Produkt $p = a \cdot b$ von zwei Primzahlen a, b zwar sehr schnell berechnet werden kann, dass es umgekehrt aber sehr aufwendig ist, nur aus der Kenntnis von p auf dessen Primfaktoren a, b zu schließen. Dies führt in das Gebiet der Zahlentheorie.

- Die Google-Suche beruht auf dem sogenannten Page-Rank-Algorithmus. Dieser führt zu einem Eigenwert-Problem für *Matrizen*, welches mit Mitteln der (linearen) Algebra untersucht wird.

Die hier vorgestellten Beispiele benutzen zum Teil sehr aktuelle (und auch schwere) Mathematik. Um diese wird es in dieser Vorlesung nicht gehen. Trotzdem zeigen die Beispiele, wie wichtig auch fortgeschrittene Mathematik für unser Leben und unsere Gesellschaft ist. Die Grundlagen hierfür werden an den Schulen gelegt. **Guter Mathematikunterricht** ist daher **essentiell**.

[1] Isaac Newton (1643-1727).
[2] Albert Einstein (1879-1955).

Warum ist die Mathematik so vielseitig?

Wie wir gesehen haben, findet die Mathematik in unterschiedlichsten Bereichen ihre Anwendung. Warum ist das so? Kurze Antwort: Die Mathematik ist abstrakt[3] und damit übertragbar.

- So spielen beispielsweise Differentialgleichungen eine Rolle in sehr vielen verschiedenen physikalischen Prozessen (die Planetenbewegung haben wir oben besprochen), aber zum Beispiel auch bei der Beschreibung des Aktienmarkts. Allgemeine Lösungsmethoden und Aussagen über mögliche Lösungen solcher Gleichungen können also in sehr vielen verschiedenen Kontexten eingesetzt werden.

Der hohe Abstraktionsgrad der Mathematik ist gleichzeitig auch der Grund, warum die Mathematik oft als schwer verständlich angesehen wird. Tatsächlich benötigt man einige Zeit, um die mathematische Sprache zu verstehen und selbst sprechen zu können.

Wie lernt man Mathematik?

„One cannot understand mathematical concepts, one can only get used to them“*, John von Neumann (1903-1957). Bildquelle: Wikipedia*

Das Verstehen von **Mathematik ist ein aktiver Prozess**. Es geht nicht darum, Fakten zur Kenntnis zu nehmen.

- Um einen mathematischen Gedanken/Beweis zu verstehen, müssen Sie ihn selbst wiederentdecken.
- Gerade auch für die Mathematik gilt, dass erst die Übung den Meister macht.

- Für Sie heißt das: **Nacharbeit ist angesagt**. Für jede 90-minütige Vorlesung sollten Sie mindestens noch einmal die gleiche Zeit an Nacharbeit einplanen, und zwar zeitnah. Neue Definitionen und wesentliche Aussagen sollten bis zur nächsten Vorlesung im Kopf sein. Denn dann kommt schon wieder neuer Stoff. Bleiben Sie also am Besten die ganze Zeit am Ball und schieben Sie die Nacharbeit nicht auf.
- Obwohl nach jeder Vorlesung ein elektronisches Manuskript zur Vorlesung zur Verfügung gestellt wird, empfehle ich Ihnen dringend, eine eigene Vorlesungsmitschrift zu erstellen.

[3] „Abstraktion“ ist laut Wikipedia der Denkprozess des Weglassens von Einzelheiten und des Überführens auf etwas Allgemeineres oder Einfacheres.

- **Mathematik ist Teamarbeit:** Wichtige neue mathematische Erkenntnisse wurden sehr oft in Kooperationen erzielt. Auch für Sie gilt, dass Sie neue Konzepte oft schneller begreifen werden, wenn Sie sie mit anderen diskutieren (die Hausaufgaben dürfen/sollen Sie daher auch als Kleingruppen bearbeiten).

Worum geht es in dieser Vorlesung?

- Die folgenden Themen sollen u.a. in der Vorlesung behandelt werden:
  - Die Sprache der Mathematik (Logik, Mengenlehre, Abbildungen, ...)
  - Axiomatik der reellen Zahlen
  - Folgen und Grenzwerte
  - Reihen, Dezimalbruchentwicklung
  - Stetige Funktionen
  - Differenzierbarkeit
- Es gibt jede Woche zwei Vorlesungen. Hier werden neue Konzepte und allgemeine Aussagen vorgestellt und erläutert. Dabei kommen häufig vor:
  - *Definitionen*: Hier wird für ein bestimmtes Objekt, oder eine Klasse von Objekten, ein Name festgelegt.

  Mathematische Aussagen werden formuliert als
  - *Satz* (sehr wichtig)
  - *Proposition* (nicht ganz so wichtig)
  - *Lemma* (eine Nebenaussage, die zum Beweis eines Satzes oder einer Proposition gebraucht wird)

  Alle diese Aussagen sollten wahr sein und dies muss in einem *Beweis* begründet werden. In diesem darf nur streng logisch vorgegangen werden. Sie dürfen dabei nur schon bewiesene Aussagen oder vorgegebene Axiome (Grundtatsachen) benutzen.

  Eine direkte Folgerung eines Satzes oder einer Proposition nennt man auch *Korollar*.
- In der Vorlesung werden auch Beispiele präsentiert. Hauptsächlich ist hierfür aber die Präsenzübung zuständig. Es gibt jede Woche ein Übungsblatt, welches in der Präsenzübung besprochen wird. Weiterhin gibt es (in fast jeder Woche) auch ein Hausaufgabenblatt. Sie dürfen und sollen die Hausaufgaben in Gruppen bearbeiten. Die Abgaben werden schließlich korrigiert und Ihnen zurückgegeben. Weiterhin wird es zu den Hausaufgaben Musterlösungen geben. *Wichtig:* **Das Bearbeiten der Aufgaben ist essentiell**. Durch das alleinige Besuchen der Vorlesung und der Präsenzübung werden Sie den Stoff nicht verstehen.

- Die Übungszettel und weitere Informationen zum Vorlesungs- und Übungsbetrieb finden Sie auf der Opal-Seite des Kurses, unter `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/36997038080/CourseNode/102447411919606`.
- Zum Abschluss des Semesters findet eine 90-minütige Klausur statt. Je nach Studienordnung, nach der Sie studieren, müssen Sie 40 Prozent der Hausaufgabenpunkte erreichen, um zur Klausur zugelassen zu werden. Genaueres dazu später.

Woher kommt unsere Mathematik?

Während bei den oben skizzierten Anwendungen meist sehr aktuelle Mathematik verwendet wird, ist die Mathematik, die Sie in der Schule gelernt haben, schon sehr, sehr alt (daher aber auch entsprechend gut verstanden und erprobt). Um ein wirkliches Verständnis für die Mathematik zu entwickeln, sollte man sich dessen langer Geschichte auch bewusst sein. Wir wollen daher im Folgenden zumindest auf einige Episoden aus der Geschichte der Mathematik eingehen, insbesondere auf solche, die für eine Analysis-Vorlesung am relevantesten sind.[4]

-1200 bis -600 — In Ägypten und Babylon führen Probleme der Buchführung, Vermessung und Astronomie zur *Entwicklung von Zahlensystemen* und ersten Resultaten über die *Geometrie von Flächen* (Satz des „Pythagoras“). Dies jedoch noch ohne Beweise.

-600 bis 100 — In Griechenland und seinen Kolonien wird zum ersten mal „reine“ Mathematik betrieben. **Euklid** veröffentlicht um das Jahr -300 seine Abhandlung „Die Elemente“. Diese enthält fundamentale Resultate der Geometrie und der Zahlentheorie (welche zum Teil auf andere Autoren zurückgehen) und diente noch bis ins 19. Jahrhundert als Standardlehrbuch. Auch die heutige Schulgeometrie ist schon in den Elementen enthalten.

Abbildung 1.1.: *Ein Fragment aus den Elementen. Quelle: Wikipedia*

Die griechischen Mathematiker um Euklid sehen zum ersten Mal die Notwendigkeit, *mathematische Aussagen zu beweisen*. Euklid bedient sich dazu der *axiomatischen Methode*, d.h. mathematische Aussagen werden durch logische Schlüsse aus einigen als unzweifelbar richtig angesehenen Postulaten/Axiomen hergeleitet. Euklids Axiome handeln

[4]Für eine kurze Übersicht über die Geschichte der Mathematik sei auf [7, Kapitel 4.1] verwiesen. Für eine ausführliche, aber sehr lesbare Darstellung siehe [9].

von Punkten, Geraden, Strecken, usw. und schreiben vor, was man mit diesen anstellen kann.

Beispiel. Zwei der Euklidischen Axiome für die ebene Geometrie:

- Man kann je zwei Punkte durch eine Strecke verbinden.
- Zu jedem Mittelpunkt und Radius lässt sich ein entsprechender Kreis zeichnen.

Ausgehend von den Axiomen werden dann mathematische Sätze bewiesen (z.B. der Strahlensatz, der Satz des Pythagoras, ...). In den folgenden Skizzen sehen wir zum Beispiel Euklids Beweis, dass auf jeder Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden kann.

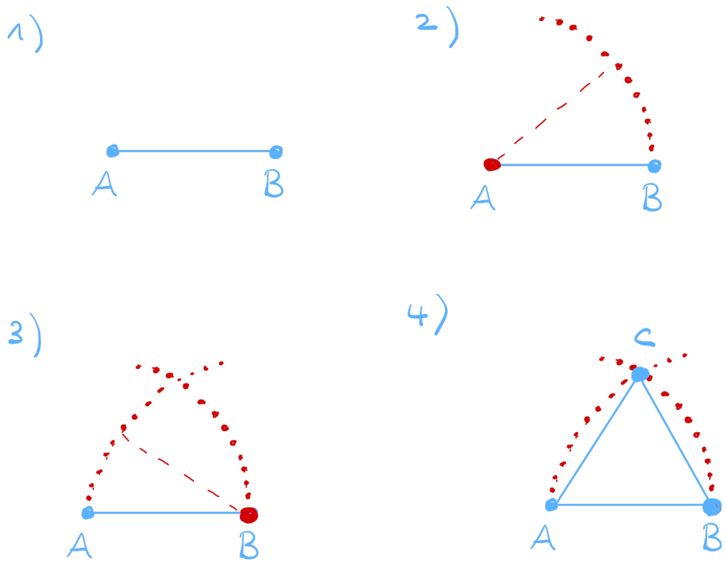


Abbildung 1.2.: *Euklids Beweis der Konstruierbarkeit gleichseitiger Dreiecke.*

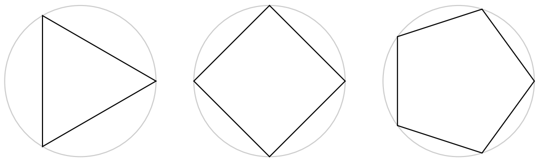
Was ein Punkt, eine Gerade oder eine Strecke eigentlich sind, wird von Euklid zuvor *definiert*. Zum Beispiel ist eine Linie „eine breitenlose Länge". Diese Definitionen würden uns heute nicht mehr zufriedenstellen (denn der Begriff „Länge" bleibt z.B. undefiniert), aber wir kommen mit ihnen aufgrund unserer geometrischen Anschauung trotzdem zurecht. Tatsächlich ist auch gar nicht so wichtig, was diese Objekte eigentlich sind. Wichtig ist, was man mit ihnen anstellen kann und dies wird von Euklid durch seine Axiome klar festgelegt. Dies ist so ähnlich wie beim Schach: es ist nicht so wichtig, woraus die Figuren hergestellt sind, wichtig ist, welche Züge sie machen dürfen.

Weitere wichtige griechische Mathematiker waren **Eudoxos** (ca. -390 bis -340) und **Archimedes** (-287 bis -212).

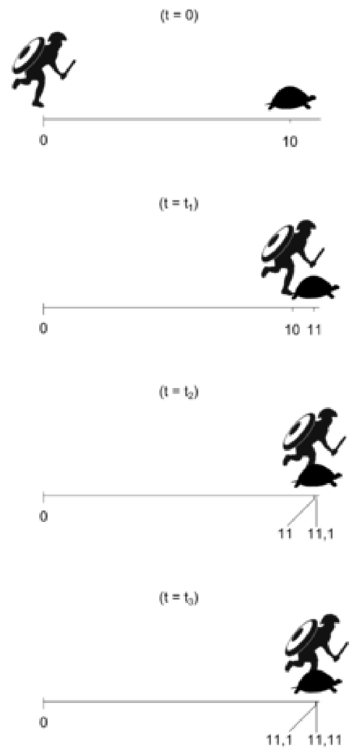
Beispiel. Schon die Griechen vor Archimedes wußten, dass das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises für jeden Kreis das gleiche, also eine Konstante ist. Wir nennen diese Konstante die **Kreiszahl** π. Aber erst Archimedes konnte beweisen, dass für jeden Kreis auch die Formel

$$\pi = \frac{\text{Fläche}}{(\text{Radius})^2}$$

gilt, d.h. $F = \pi R^2$. Er bewies dies durch Approximation des Kreises durch reguläre Polygone. Hier taucht somit zum ersten Mal implizit der für die Analysis so wichtige Begriff eines *Grenzwertes* auf (der Grenzwert der Polygone ergibt den Kreis).



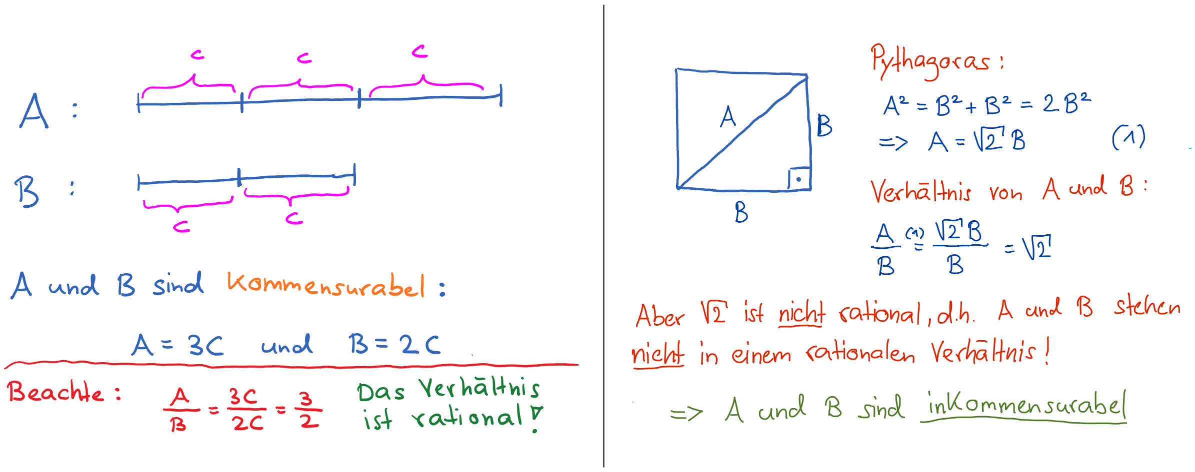
Mit dem für die Analysis auch wichtigen Begriff des *Unendlichen* hatten die Griechen allerdings noch ihre Probleme. Berühmt sind die **Zenonschen Paradoxa** (Zenon von Elea (ca -490 bis -430)), etwa das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte: Diese machen einen Wettlauf. Achilles (A.) läuft 10 Meter pro Sekunde, die Schildkröte nur einen Meter pro Sekunde. Da A. ein fairer Sportler ist, erhält die Schildkröte einen Vorsprung von 10 Metern. Nun behauptet Zenon, dass A. die Schildkröte bei diesem Wettlauf nie überholen wird, denn er muss ja immer zuerst ihren Vorsprung einholen. Nach einer Sekunde ist A. bei 10 Metern, die Schildkröte aber bei 11. Eine zehntel Sekunde später ist auch A. bei 11 Metern, aber die Schildkröte ist nun schon bei 11.1 Metern. Nach weiteren 0.01 Sekunden hat A. auch die 11.1 Meter erreicht, die Schildkröte ist aber nun bei 11.11 Metern. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, dennoch (so Zenon) bleibe immer ein Vorsprung, so dass A. sie nie einholen wird. Wie sehen Sie das? ☺



Bildquelle: Wikipedia

Zu einer Grundlagenkrise in der griechischen Mathematik kam es um das Jahr -500 durch die Entdeckung *inkommensurabler* Strecken durch **Hippasos von Metapont**. Man nennt zwei Strecken *kommensurabel*, wenn sie ein gemeinsames Maß besitzen, d.h. beide Strecken sind ganzzahliges Vielfaches einer kleineren Teilstrecke. Für die Griechen vor Hippasos war „klar“, dass für alle Strecken ein solch gemeinsames Maß existieren —Ende Vorlesung 1—

sollte. Als Hippasos dann zeigte, dass dies für die Diagonale und Seite eines Quadrats nicht gilt, war der Jammer groß.



Aus heutiger Sicht würden wir sagen, dass die Griechen zwar mit den rationalen Zahlen vertraut waren, mit irrationalen Größen (wie z.B. $\sqrt{2}$) jedoch nicht umgehen konnten. Dies führte insbesondere dazu, dass die Griechen die Geometrie und die Arithmetik als streng getrennte Disziplinen betrachteten. Diese wurden erst Jahrtausende später durch **Pierre de Fermat** (1601-1655) und **René Descartes** (1596-1650) mit der Entwicklung der *analytischen Geometrie* wieder zusammengeführt.


Abbildung 1.4.: *Fermat (links) und Descartes. Quelle: Wikipedia*

Die griechische Mathematik hat durch arabische Mathematiker (die auch unter indischem Einfluss standen) schließlich erst sehr spät den Weg zurück nach Europa gefunden (mit ihnen haben auch die *arabischen Zahlen* und die (indische) *Null* Europa erreicht). Eine eigenständige europäische Mathematik startet erst wieder mit der Renaissance.

16. Jahrhundert — **Isaac Newton** (1643-1727) und **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) entwickeln unabhängig voneinander die Differential- und Integralrechnung und verleihen der Mathematik, aber auch der Physik, einen neuen Schub. Die Mathematik Newtons und Leibniz' beruht nach wie vor auf einem intuitiven Zahlenbegriff und genügt nicht der heutigen mathematischen Strenge.

Abbildung 1.5.: *Newton (links) und Leibniz. Quelle: Wikipedia*

Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts haben Mathematiker wie **Georg Cantor** (1845-1918) und **David Hilbert** (1862-1943) die Arithmetik, wie Euklid 2000 Jahre zuvor die Geometrie, auf eine solide axiomatische Basis gestellt, so dass alle mathematischen Sätze heute auf wenige Grundregeln (Axiome) zurückgeführt werden können.

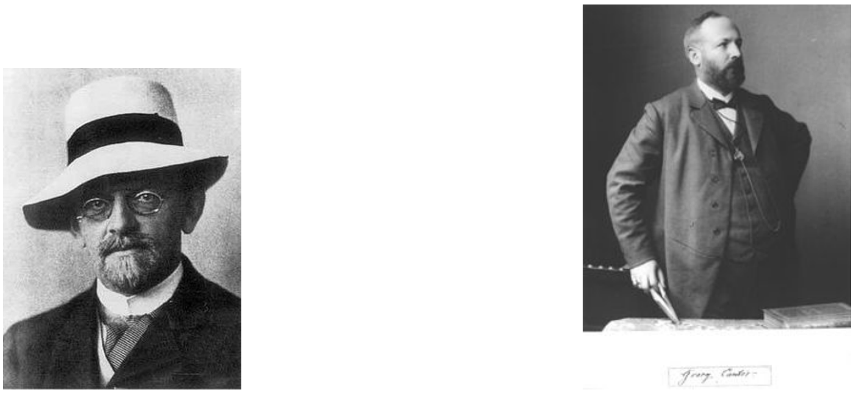


Abbildung 1.6.: *Hilbert (links) und Cantor. Quelle: Wikipedia*

Auch in dieser Vorlesung werden wir eine axiomatische Einführung der reellen Zahlen an den Anfang stellen.

Warum benötigen wir Axiome?

Axiome sind Spielregeln, die die einzige legitime Grundlage für mathematische Schlüsse bilden, aber auch die einzige Einschränkung darstellen. Dass solche Spielregeln in der Analysis (insbesondere auch beim Umgang mit dem Unendlichen) sehr wichtig sind, zeigen vielleicht die folgenden Beispiele:

- Wir berechnen die unendliche Summe

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

auf drei verschiedene Weisen. Zuerst

$$S = \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \dots = 0.$$

Andererseits kann man auch argumentieren:

$$S = 1 \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} \dots = 1.$$

Zuletzt kann man auch rechnen:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S,$$

also $S = 1/2$. Was ist nun richtig?

- Auch beim Umgang mit Dezimalzahlen sind Spielregeln wichtig. Ist zum Beispiel

$$0,\overline{9} = 0,99999\ldots < 1?$$

Falls ja, warum?

- Oder betrachten Sie die Zahl $\sqrt{2}$. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass ihr Quadrat gleich zwei ist,

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

Aber gibt es eine solche Zahl überhaupt? Zum Beispiel ist,

$$(1.41)^2 = 1.9881, \quad (1.414)^2 = 1.999396, \quad \dots,$$

aber $\sqrt{2}$ ist ja irrational, hat also keine endliche Dezimalbruchentwicklung. Existiert eine solche Zahl also überhaupt?

Eine axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen wird uns helfen, die obigen Fragen zu beantworten. Zuvor müssen wir uns allerdings mit der mathematischen Sprache, der Mengenlehre, und der mathematischen Logik beschäftigen. Damit beginnen wir im nächsten Kapitel.

2. Logik und elementare Beweistechniken

Da die Logik die Basis für zuverlässiges Argumentieren bildet, wollen wir uns in diesem Kapitel zunächst mit den wichtigsten logischen Konstrukten beschäftigen. Weiterhin werden wir erste mathematische Sätze beweisen und dabei verschiedene Beweisprinzipien kennenlernen.

2.1. Logik

In diesem Abschnitt geht es zunächst um ein Teilgebiet der mathematischen Logik, die sogenannte **Aussagenlogik**.

Definition 2.1. Eine (logische) **Aussage** ist ein Ausdruck, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.

Hier ein paar Beispiele für Aussagen:

$$„2 > 1“, \quad „2 < 1“, \quad „\text{Die Zahl } \pi + e \text{ ist rational}“.$$

Die erste Aussage ist wahr, die zweite Aussage ist falsch und für die dritte Aussage ist (erstaunlicherweise) gegenwärtig noch nicht bekannt, ob sie wahr oder falsch ist. Keine Aussagen in diesem Sinne sind etwa „Mathe macht Spaß“ oder „Ist 4 eine ganze Zahl?“.

In der Aussagenlogik geht es darum, den Wahrheitswert von Aussagen zu bestimmen, die durch Negation oder Kombination von Aussagen mit bekanntem Wahrheitswert entstehen. Ist zum Beispiel eine Aussage A wahr, so ist ihre **Negation** (Verneinung)

$$\neg A \quad (\text{gesprochen „nicht } A\text{“})$$

falsch. Ist umgekehrt A falsch, so ist $\neg A$ wahr. Diese Zusammenhänge stellt man oft in sogenannten **Wahrheitstafeln** dar. Hier steht natürlich „w“ für wahr und „f“ für falsch.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Abbildung 2.1.: *Wahrheitstafel der Negation*

- Für $A =$ „$2 > 1$" ist $\neg A =$ „$2 \leq 1$". In diesem speziellen Fall ist A wahr und $\neg A$ falsch.

  Quiz: Was ist die Negation der Aussage „Alle Blumen sind rot"?

Sind A, B Aussagen, so können wir diese durch das logische „und" bzw. das logische „oder" zu neuen Aussagen verknüpfen: wir schreiben dies als

$$A \wedge B \quad (\text{„\textbf{A und B}", \textbf{Konjunktion}})$$

und

$$A \vee B \quad (\text{„\textbf{A oder B}", \textbf{Disjunktion}}).$$

Die zugehörigen Wahrheitstafeln sehen wie folgt aus:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(a) *Wahrheitstafel Konjunktion*

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

(b) *Wahrheitstafel Disjunktion*

***VORSICHT*.** Während man in der Umgangssprache das „oder" oft als ein „entweder-oder" benutzt („Möchtest Du Kaffee oder Tee?"), ist das logische „oder" *einschließend*, d.h. $(A \vee B)$ ist auch wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

- Ist $A =$ „$2 > 1$" und $B =$ „$0 > 1$", so gilt

  $$(A \wedge B) = \text{„}2 > 1 \text{ und } 0 > 1\text{"}, \qquad (A \vee B) = \text{„}2 > 1 \text{ oder } 0 > 1\text{"}.$$

  Hierbei ist $(A \wedge B)$ falsch und $(A \vee B)$ wahr.

Schauen wir uns nun mal einen einfachen mathematischen Satz an.

Satz 2.2. *Sei n eine natürliche Zahl. Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n auch durch 2 teilbar.*[a]

[a] Dabei heißt n durch m teilbar, falls n ein ganzzahliges Vielfaches von m ist, d.h. es existiert eine natürliche Zahl k, so dass $n = m \cdot k$.

In diesem Satz steckt eine weitere wichtige logische Verknüpfung, nämlich eine sogenannte **Implikation** (Wenn-Dann-Beziehung). Hierfür benutzen wir das Symbol „$\Rightarrow$". Schreiben wir im Folgenden $m|n$, gesprochen „m Teiler von n", falls n durch m teilbar ist, so können wir den Satz mit deutlich weniger Worten wie folgt aufschreiben:

Satz 2.2 (2. Fassung)**.** *Sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

$$4|n \quad \Rightarrow \quad 2|n.$$

Wir legen fest, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ für beliebige Aussagen A und B nur dann den Wahrheitswert „falsch" erhält, wenn A wahr und B falsch ist. Entsprechend sieht die Wahrheitstafel folgendermaßen aus.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Abbildung 2.3.: *Wahrheitstafel der Implikation*

Ist die Implikation wahr, so sagen wir „A impliziert B" oder „Aus A folgt B" oder „Wenn A gilt, dann gilt auch B". Weiterhin heißt A **hinreichend** für B und B **notwendig** für A.

***VORSICHT*.** Auf den ersten Blick scheint es merkwürdig zu sein, dass die Implikation als wahr definiert ist, wenn A falsch ist. Zerbrechen Sie sich hierüber aber bitte nicht lange den Kopf, denn in gewisser Weise handelt es sich einfach um eine willkürliche Festlegung. Ein Versuch es zu begründen, ginge eventuell so: Der Satz 2.2 ist wahr, darauf konnten wir uns schon einigen. Aber das bedeutet, dass die dortige Implikation für jedes natürliche n wahr sein muss. Aber für $n = 2$ bzw. $n = 3$ ergibt sich gerade die Situation aus Zeile 3 und 4 der Wahrheitstabelle.

Für die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ schreiben wir kurz

$$A \Leftrightarrow B$$

und sprechen von einer **Äquivalenz**. Diese ist genau dann wahr, wenn A und B beide den gleichen Wahrheitswert haben.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

Abbildung 2.4.: *Wahrheitstafel der Äquivalenz*

Ist die Aussage $A \Leftrightarrow B$ wahr, so sagen wir „A ist äquivalent zu B“, „A gilt genau dann, wenn B gilt“ oder „A ist notwendig und hinreichend für B“ (und umgekehrt). Betrachten wir zwei Beispiele:

- Für alle reellen Zahlen x, y gilt: $x \geq y \Leftrightarrow ((x > y) \vee (x = y))$.
- Für alle reellen Zahlen x gilt: $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$.
- **Quiz:** Gilt für jede natürliche Zahl n die Äquivalenz $4|n \Leftrightarrow 2|n$?

—Ende Vorlesung 2—

BEACHTE. Wir benutzen Klammern, um, wie bei Zahlen, die Auswertungsreihenfolge von logischen Ausdrücken festzulegen. Um im Folgenden ein paar Klammern zu sparen, vereinbaren wir die folgende Bindungsstärke der (sogenannten) **Junktoren** (von stark nach schwach):

$$\neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow .$$

Der folgende Satz zeigt uns ein paar Beispiele von äquivalenten Aussagen.

Satz 2.3. *Seien A, B Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen, unabhängig vom Wahrheitswert von A, B, immer wahr (man nennt solche Aussagen* ***Tautologien****):*

i. $A \vee \neg A$.

ii. $\neg(\neg A) \quad \Leftrightarrow \quad A$.

iii. $\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee \neg B$

iv. $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$

v. $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ***(Kontraposition, Umkehrschluss)****.*

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, schauen wir uns zwei Beispiele an:

- Die Negation der Aussage „$(x > 0) \vee (x < -1)$“ ist „$(x \leq 0) \wedge (x \geq -1)$“.
- Die Aussage “Wenn es geregnet hat, ist die Straße nass“ ist äquivalent zur Aussage “Wenn die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet“.

  Aber *Vorsicht*, <u>nicht</u> äquivalent dazu ist die Aussage „Wenn es nicht regnet, ist die Straße nicht nass“. Ganz allgemein folgt aus der Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ nicht die Gültigkeit von $\neg A \Rightarrow \neg B$ (und natürlich auch nicht die von $B \Rightarrow A$).

Beweis des Satzes. Man beweist den Satz durch Betrachtung der zugehörigen Wahrheitstafeln. Wir schauen uns exemplarisch Teil (iii) an:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	*f*	f	f	*f*
w	f	f	*w*	f	w	*w*
f	w	f	*w*	w	f	*w*
f	f	f	*w*	w	w	*w*

Da die Wahrheitswerte in den rot eingefärben Spalten übereinstimmen, sind die entsprechenden Aussagen logisch äquivalent.

Wir führen nun noch drei wichtige Symbole ein, die uns die Schreibarbeit in Zukunft noch weiter erleichtern werden. Man nennt diese **Quantoren**:

„$\forall$“ bedeutet „für alle“ (**Allquantor**)
„$\exists$“ bedeutet „es existiert“ (**Existenzquantor**)
„$\exists!$“ bedeutet „es existiert genau ein“.

Greifen wir etwas vor und bezeichnen wir die Menge der *natürlichen Zahlen* mit $\mathbb{N}$ und die Elementbeziehung mit „$\in$“, so können wir Satz 2.2 noch einmal abkürzen.

Satz 2.2 (3.Fassung)**.** *$\forall n \in \mathbb{N} : 4|n \Rightarrow 2|n$.*

BEACHTE. Hierbei spart man sich das Wort „gilt“. Alles was rechts vom Doppelpunkt steht, soll gelten.

Man kann geteilter Meinung sein, ob diese Fassung des Satzes nun wirklich schöner anzusehen ist als die ursprüngliche.

In den folgenden Beispielen wollen wir versuchen, die gegebenen umgangssprachlichen Sätze mit Hilfe von Quantoren auszudrücken. Hierzu sei P eine Menge von Personen, die ein Restaurant besuchen und M die Menge der dort angebotenen Gerichte (das Menü). Für $p \in P$ und $m \in M$ soll „p mag m“ und „p mag m nicht“ das Offensichtliche bedeuten.

- p mag alle angebotenen Gerichte. Formal: $\forall m \in M : p$ mag m.
- p mag eines der angebotenen Gericht. Formal: $\exists m \in M : p$ mag m.
- p mag genau ein angebotenes Gericht. Formal: $\exists!\, m \in M : p$ mag m.
- p mag kein angebotenes Gericht. Formal: $\forall m \in M : p$ mag m nicht.
- Jeder mag ein angebotenes Gericht (aber nicht notwendig jeder das Gleiche). Formal:
$$\forall p \in P\; \exists m \in M : p \text{ mag } m.$$

- Jeder mag ein angebotenes Gericht (und zwar alle das Gleiche). Formal:

$$\exists m \in M\, \forall p \in P : p \text{ mag } m.$$

> ***VORSICHT*.** Die beiden letzten Beispiele zeigen, dass sich beim Vertauschen von „$\exists$“ und „$\forall$“ die Bedeutung der Aussage ändert.

- Keiner mag ein Gericht (d.h. jeder mag keines der Gerichte). Formal:

$$\forall p \in P\, \forall m \in M : p \text{ mag } m \text{ nicht } .$$

Betrachten wir auch noch ein paar Beispiele aus der Mathematik. Hierzu sei $\mathbb{R}$ die Menge der *reellen Zahlen*. **Quiz:** Welche dieser Aussagen sind wahr?

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n \leq n^2$. Formal: $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$
- Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x^3$. Formal: $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^3$
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n$. Formal: $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$.

Wir müssen noch die Negation von Aussagen mit Quantoren betrachten.

- $$\neg(\forall m \in M : p \text{ mag } m) \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in M : p \text{ mag } m \text{ nicht}.$$

  (Die von „p mag alle Gerichte“ ist „Es gibt ein Gericht, dass p nicht mag“)

- $$\neg(\exists m \in M : p \text{ mag } m) \quad \Leftrightarrow \quad \forall m \in M : p \text{ mag } m \text{ nicht}.$$

- $$\neg(\forall p \in P\, \exists m \in M : p \text{ mag } m \text{ nicht }) \quad \Leftrightarrow \quad \exists p \in P\, \forall m \in M : p \text{ mag } m.$$

  (Die Negation von „Jeder mag ein Gericht nicht“ ist „Es gibt eine Person, die alle Gerichte mag“)

- $$\neg(\exists p \in P\, \forall m \in M : p \text{ mag } m \text{ nicht }) \quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in P\, \exists m \in M : p \text{ mag } m.$$

  > **BEACHTE.** Bei der Negation wird „$\forall$“ zu „$\exists$“ und umgekehrt, und die Aussage nach dem Doppelpunkt wird negiert.

2.2. Elementare Beweisprinzipien

Wie wir oben schon gesehen haben, sagt ein mathematischer Satz oft aus, dass eine gewisse Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist. Im Satz 2.2 etwa: $4|n \Rightarrow 2|n$. Um so etwas zu beweisen, haben wir verschiedene Möglichkeiten:

- **Direkter Beweis:** Beim direkten Beweis setzen wir die Gültigkeit von A voraus und führen dann eine Reihe von wahren logischen Schlüssen aus, bis wir schließlich bei der Aussage B angelangt sind, die dann auch wahr sein muss:

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B.$$

Im folgenden Satz benutzen wir die Menge $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ der *ganzen Zahlen*.

Satz 2.4. $\forall n \in \mathbb{Z} : n$ *gerade* $\Rightarrow n^2$ *gerade.*

Hier ist $A =$ „n gerade“ und $B =$ „n^2 gerade“.

BEACHTE. Wenn man sich den Beweis eines solchen Satzes selbst überlegen muss, schreibt man ihn meist nicht gleich in Reinform auf, sondern verwendet einen **Schmierzettel**, um sich einer Lösung schrittweise zu nähern. Wir werden dies in den folgenden Beispielen einmal skizzieren.

Direkter Beweis des Satzes.

Schmierzettel: Wir sollen für jede ganze Zahl n zeigen, dass die Implikation

$$n \text{ gerade } \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

gilt. Wir wissen bereits, dass wir hierbei nur den Fall betrachten müssen, in dem n gerade ist, denn für ungerade n ist die Implikation ja per Definition sowieso wahr. Nehmen wir uns also einmal eine gerade, aber ansonsten beliebige ganzen Zahl n her. Was bedeutet „gerade“? Das sind die Zahlen $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ also alles ganzzahlige Vielfache von 2. Auch unser n ist also ein ganzzahliges Vielfaches von 2, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $n = 2k$. Jetzt müssen wir zeigen, dass auch das Quadrat von n gerade ist. Was ist das Quadrat?

$$n^2 = (2k)^2 = 2^2k^2 = 4k^2.$$

Ist diese Zahl gerade, d.h. ein ganzzahliges Vielfaches von 2? Natürlich, ich kann einfach schreiben $n^2 = 2(2k^2)$ und $2k^2$ ist eine ganze Zahl. Fertig! Nun alles noch einmal sauber aufschreiben. —Ende Vorlesung 3—

$$\begin{aligned} & \text{Sei } n \in \mathbb{Z} \text{ gerade, d.h. es existiert } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k. \\ \Rightarrow\ & n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) \\ \Rightarrow\ & n^2 \text{ ist ganzzahliges Vielfaches von 2, d.h. } n^2 \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

- **Beweis durch Kontraposition:** Statt $A \Rightarrow B$ beweist man die logisch äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ (vergleiche Satz 2.3) mit einem direkten Beweis.

Satz 2.5. *$\forall n \in \mathbb{Z} : n^2$ gerade $\Rightarrow n$ gerade.*

Hier ist $A =$ „n^2 gerade“ und $B =$ „n gerade“. Statt $A \Rightarrow B$ zeigen wir $\neg B \Rightarrow \neg A$. Beachten Sie dazu, dass $\neg B =$ „n ist ungerade“ und $\neg A =$ „n^2 ist ungerade“.

Beweis durch Kontraposition.

Schmierzettel: Wir wollen die Kontraposition zeigen, d.h. für jede ganze Zahl n soll die Implikation

$$n \text{ ungerade } \Rightarrow n^2 \text{ ungerade}$$

gelten. Wir nehmen uns also wieder eine ungerade aber ansonsten beliebige ganze Zahl n her. Die ungeraden Zahlen sind $\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$. Wie kann ich aber ausdrücken, dass meine allgemeine Zahl n von dieser Form ist? Für gerades n wäre es leicht, das sind einfach die Vielfachen von 2, aber die ungeraden Zahlen liegen ja gerade zwischen den geraden. Ok, das liefert die Lösung: mein n unterscheidet sich von einer geraden Zahl um genau 1. Also: Es gibt eine ganze Zahl k, so dass $n = 2k + 1$. Nun muss ich quadrieren:

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Ist diese Zahl ungerade? Ich weiß, dass sie ungerade ist, wenn sie sich von einer geraden Zahl um 1 unterscheidet. Und die 1 taucht ja auf der rechten Seite schon auf. Ist die Zahl $4k^2 + 4k$ denn gerade? Ja! $4k^2 + 4k = 2(2k^2 + 2k)$ und $2k^2 + 2k$ ist eine ganze Zahl. Fertig! Nun alles ordentlich aufschreiben.

$$\begin{aligned} & \text{Sei } n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade, d.h. es existiert } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k+1 \\ \Rightarrow\ & n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1. \\ & \text{Da } 2k^2 + 2k \text{ eine ganze Zahl ist, ist } n^2 \text{ also ungerade.} \end{aligned}$$

Wir können die Inhalte der beiden vorherigen Sätze noch zusammenfassen zu

Korollar 2.6. *$\forall n \in \mathbb{Z} : (n$ gerade $\Leftrightarrow n^2$ gerade$)$*

Genauso gilt natürlich: n ungerade $\Leftrightarrow n^2$ ungerade (Warum?).

BEACHTE. Bei der Wahl der Bezeichnung von Objekten hat man freie Wahl (man darf nur nicht plötzlich, etwa innerhalb eines Beweises, die Bezeichnung ändern). Wir hätten den vorherigen Satz also auch so formulieren können:

$$\forall m \in \mathbb{Z} : (m \text{ gerade } \Leftrightarrow m^2 \text{ gerade}).$$

- **Beweis durch Widerspruch (Reductio ad absurdum)[1]:** Wollen wir $A \Rightarrow B$ durch einen Widerspruchsbeweis beweisen, so setzen wir die Gültigkeit von A voraus und nehmen an, dass B falsch, also $\neg B$ wahr ist. Nun leiten wir durch wahre logische Schlüsse eine Aussage C ab, von der wir schon wissen, dass sie falsch ist (z.B. $1 = 0$ oder etwas ähnliches). Dieser Widerspruch zeigt dann, dass B doch wahr sein musste. Warum ist das so? Die Implikation $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ ist wahr, C aber falsch, d.h. wir entnehmen der Wahrheitstafel der Implikation, dass $(A \wedge \neg B)$ falsch sein muss. Da A wahr ist, muss $\neg B$ also falsch, d.h. B war sein.

  Ein Widerspruchsbeweis ist deshalb manchmal hilfreich, weil einem die Aussage $\neg B$ zusätzliche Argumentationsspielräume liefert.

Satz 2.7 ($\sqrt{2}$ nicht rational)**.** *Für alle reellen Zahlen x gilt: Ist $x^2 = 2$, so ist x nicht rational.*

Hier ist $A =$ „$x^2 = 2$“ und $B =$ „x nicht rational“. Ferner ist $\neg B =$ „x rational“

Beweis durch Widerspruch.

Schmierzettel: Es gelte also $x^2 = 2$ und ich nehme für den Widerspruchsbeweis an, dass x doch rational ist. D.h. also, dass x ein Bruch ist, d.h. $x = \frac{p}{q}$ für ganze Zahlen p und q. Klar, $q \neq 0$ muss auch gelten. Dann quadriere ich x einfach mal:

$$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Wie hilft mir das weiter? Ach so, ich weiß ja auch, dass $x^2 = 2$ ist, d.h. es würde folgen

$$2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Hilft mir das irgendwie, um einen Widerspruch zu erhalten? Das zeigt doch nur, dass $p^2 = 2q^2$ gilt, d.h. p^2 ist eine gerade Zahl. Das könnte zu einem Widerspruch führen, wenn Quadrate von ganzen Zahlen, wie p^2, nie gerade Zahlen sind ... Hm, leider haben wir ja in der Vorlesung schon gezeigt, dass eine Zahl genau dann gerade ist, wenn ihr Quadrat gerade ist. Das liefert also keinen Widerspruch. Aber immerhin weiß ich, dass mit p^2 auch p selbst eine ganze Zahl sein muss. Dann kann ich also p als $p = 2k$ mit einer ganzen Zahl k schreiben. Hilft mir das irgendwie? Ich setze es einfach oben mal ein:

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

Aha, hier kann ich kürzen und erhalte $q^2 = 2k^2$. Damit ist also auch q^2 gerade. Dann weiß ich also wie oben auch wieder, dass q selbst gerade sein muss, d.h. $q = 2m$ mit einer ganzen Zahl m. Noch mal zusammenfassen, was ich bisher habe: Wenn $x^2 = 2$ und $x = \frac{p}{q}$, so gilt auch

$$x = \frac{p}{q} = \frac{2k}{2m} = \frac{k}{m}.$$

Aber jetzt bin ja wieder am Anfang, ich habe nur eine um einen Faktor 2 gekürzte Bruchdarstellung von x erhalten. Soll ich jetzt das ganze Argument noch einmal mit k/m statt p/q wiederholen? Das liefert mir ja nur eine dritte Bruchdarstellung (wieder um den Faktor 2 gekürzt), dann eine vierte, usw. Wo soll da der Widerspruch sein?

[1] *„Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game“*, G.H. Hardy (1877-1947).

(10 Minuten vergehen) Okay, jetzt hab ich es: Natürlich kann dieser Prozess nicht ewig so weiter gehen, denn jeder Bruch hat doch eine Darstellung, in der man nicht mehr kürzen kann, in der also Zähler und Nenner teilerfremd sind. Wenn ich schon mit solch einer teilerfremden Darstellung gestartet wäre, hätte mich schon der erste Schritt zu einem Widerspruch geführt. Nun gut, das jetzt noch einmmal ordentlich aufschreiben ...

Sei x eine reelle Zahl und $x^2 = 2$. Wir nehmen an, dass x rational ist. Dann können wir x als komplett gekürzten Bruch darstellen, d.h. es existieren ganze teilerfremde Zahlen p und q, $q \neq 0$, so dass $x = \frac{p}{q}$. Da $x^2 = 2$ gilt, folgt $\frac{p^2}{q^2} = 2$, d.h.

$$p^2 = 2q^2. \tag{2.1}$$

Die Zahl p^2 ist also gerade. Aber dann folgt aus Satz 2.5, dass auch p gerade ist, d.h. es existiert eine ganze Zahl k, so dass $p = 2k$. Setzen wir dies wieder in obige Gleichung ein, so folgt

$$4k^2 = (2k)^2 = p^2 = 2q^2.$$

Aber daraus folgt $q^2 = 2k^2$, d.h. auch q^2 und somit (wieder wegen Satz 2.5) auch q sind gerade. Also besitzen p und q den gemeinsamen Teiler 2, im Widerspruch zu ihrer teilerfremdheit.

Die Annahme, dass x rational ist, hat sich also als falsch herausgestellt, d.h. x ist nicht rational.

Sie stellen sich jetzt bestimmt die Frage, welche Art von Beweis man wann einsetzen sollte. Leider gibt es dazu keine pauschale Antwort und oft führen auch mehrere Methoden zum Ziel. Durch viel Übung werden Sie langsam ein Gefühl für diese Dinge bekommen.

3. Mengen und Abbildungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die wichtigsten Grundbegriffe aus der Mengenlehre und sprechen über Abbildungen zwischen Mengen.

3.1. Mengenlehre

Mengen stellen heutzutage einen der Grundbausteine der Mathematik dar und wir sind ihnen im vorherigen Abschnitt ja auch schon begegnet. Sie haben alle eine intuitive Vorstellung davon, was eine Menge ist, und dabei wollen wir es auch belassen. Wichtig ist

- eine Menge enthält Objekte, nämlich ihre **Elemente**, und
- zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

Es hat sich eingebürgert, Mengen mit Großbuchstaben zu bezeichnen. Ist M eine Menge, so schreiben wir $x \in M$, falls x Element von M ist, und $x \notin M$, falls x kein Element von M ist.

Beispiel.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \text{„Menge aller natürlichen Zahlen“} \\ &= \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \end{aligned}$$

und $1 \in \mathbb{N}$.

Hier haben wir schon die aus der Schule bekannte Mengenschreibweise mit den Mengenklammern „{“ und „}“ verwendet. Die Elemente der Menge stehen innerhalb der Klammern und werden durch Kommata getrennt. *Die Menge wird also beschrieben, indem wir ihre Elemente explizit auflisten*. Beachten Sie, dass wir die „Pünktchen“ nur verwenden können, wenn unzweifelhaft klar ist, wie die Elemente der Menge aussehen. Das Symbol „:=“ bedeutet, dass wir die linke Seite (in diesem Fall also das Symbol $\mathbb{N}$) durch die rechte Seite definieren.

Beispiel. Ein weiteres Beispiel einer Menge ist

$$M = \{a, b, c, d\},$$

die Menge der ersten vier Buchstaben des Alphabets. Hier gilt $a \in M$, aber $e \notin M$. Ferner darf man Elemente mehrfach aufführen und die Reihenfolge vertauschen, d.h. z.B.

$$M = \{a, b, c, d\} = \{a, a, b, c, d\} = \{d, a, c, b\}.$$

In der Tat, alle diese Mengen haben die gleichen Elemente und stimmen daher überein.

Es ist nützlich, auch eine Menge ohne Elemente zu haben, die **leere Menge**. Schreibweise:

$$\{\} \quad \text{oder} \quad \emptyset.$$

Wenn Sie sich Mengen als einen mit Dingen gefüllten Beutel vorstellen, ist die leere Menge einfach ein leerer Beutel.

***VORSICHT*.** $\emptyset \neq \{0\}$.

Schon aus der Schule bekannt sind die Mengen

- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)
- $\mathbb{R} :=$ „Menge der reellen Zahlen“ (dazu später mehr).

Beim vorletzten Beispiel sehen wir ein weiteres wichtiges *Konstruktionsprinzip für Mengen*: Ist x ein Objekt und $E(x)$ eine Eigenschaft, die x entweder hat oder nicht hat, so ist $\{x \mid E(x)\}$ die Menge aller Objekte x mit der Eigenschaft $E(x)$. Mengen können also über die Eigenschaften ihrer Elemente definiert werden.

Dieses Konstruktionsprinzip wird etwa bei der Definition von Intervallen benutzt.

- **Intervalle**: Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzt man

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

  Intervalle der Form $(a, b), (a, \infty)$ oder $(-\infty, b)$ nennt man *offen*, solche der Form $[a, b], [a, \infty)$ oder $(-\infty, b]$ *abgeschlossen* und alle anderen *halboffen*.

***VORSICHT*.** Beachten Sie, dass $[a, b] = \emptyset$ gelten kann (dies ist genau dann der Fall, wenn $b < a$)! Weiterhin ist „∞" hier nur ein Symbol, aber keine reelle Zahl.

—Ende Vorlesung 4—

Genauso wie ein Beutel andere Beutel enthalten kann, können Mengen andere Mengen als Elemente enthalten: Die Menge $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ hat die Elemente $\{1, 2\}$ und $\{3, 4, 5\}$, die selbst wieder Mengen sind. Auch $M := \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}$ ist eine Menge. **Quiz:** Ist $3 \in M$?

Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, falls jedes Element von A auch ein Element von B ist. Schreibweise:

$$A \subseteq B \quad \text{oder} \quad B \supseteq A.$$

In diesem Fall nennen wir B auch eine **Obermenge** von A.

BEACHTE. Es gilt

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Dies wird oft genutzt, um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen: jedes Element aus A muss auch Element von B sein und umgekehrt.

Beispiel. Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$. Ferner ist

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \qquad \text{aber z.B.} \quad \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}.$$

Wir schreiben manchmal

$$A \subsetneq B,$$

wenn wir betonen wollen, dass zwar $A \subseteq B$, aber $A \neq B$ gilt (in diesem Fall sagt man „A ist eine **echte Teilmenge** von B"). Das obige Beispiel können wir also präzisieren:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

***VORSICHT*.** „Teilmenge sein" und „Element sein" sind zwei verschiedene Dinge:

$$1 \in \mathbb{N}, \text{ aber } 1 \not\subseteq \mathbb{N},$$

$$\{1\} \notin \mathbb{N}, \text{ aber } \{1\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Quiz: Kann ein Objekt Teilmenge und Element einer anderen Menge sein?

Mengenoperationen

Aus gegebenen Mengen können wir neue gewinnen. Ein Beispiel ist die **Potenzmenge** einer Menge A, welche die Menge aller Teilmengen von A ist:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Hier ein paar Beispiele:

- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Quiz: Was ist $\mathcal{P}(\{2, \{2\}, \{1,2\}\})$? Kann für eine Menge A auch $\mathcal{P}(A) = \emptyset$ gelten? Was ist $\mathcal{P}(\emptyset)$? Warum hat $\mathcal{P}(A)$ immer mehr Elemente als A?

Sind A und B Mengen, so heißt

- $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \ \vee \ (x \in B)\}$ die **Vereinigung** von A und B,[1]
- $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)\}$ der **Durchschnitt** von A und B,
- $A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ das **Komplement** von B in A oder die **Differenz** von A und B (gesprochen: „A ohne B“).

Ferner heißen zwei Mengen A, B **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$.

Die Bedeutung all dieser Operationen kann man sich sehr gut in sogenannten *Venn-Diagrammen* klarmachen (benannt nach John Venn (1834-1923)), siehe Abbildung 3.1.

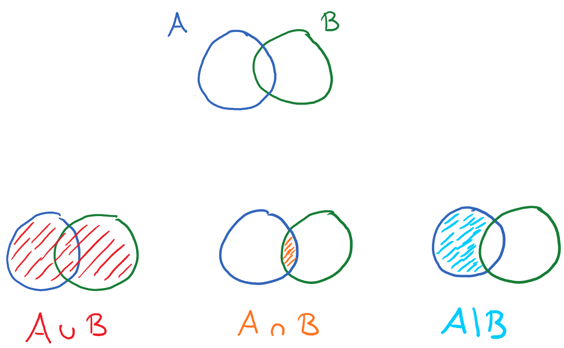


Abbildung 3.1.: *Venn-Diagramme*

Betrachten wir einige konkrete Beispiele für die Mengenoperationen:

[1] Es sei daran erinnert, dass das logische Oder nicht ausschließend ist, d.h. x darf auch gleichzeitig Element von A und von B sein.

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$,
- $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$,
- $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$, $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$,
- $\{1,2\} \setminus \{3,4\} = \{1,2\}$. Die Mengen $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ sind disjunkt.
- $[1,3] \cap [2,4] = [2,3], [1,3] \cup [2,4] = [1,4], [1,3] \setminus [2,4] = [1,2)$.

Quiz: Ist es möglich, dass bei der Vereinigung/dem Schnitt/dem Komplement zweier nicht-leerer Mengen die leere Menge herauskommt?

Wir können die Mengenoperationen auch verbinden. Wie bei Zahlen und Aussagen verwenden wir Klammern, um die Reihenfolge der Ausführung festzulegen.

Proposition 3.1. *Seien A, B, C Mengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

i. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

iii. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

iv. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(i) und (ii) sind *Distributivregeln* und (iii) und (iv) nennt man die *de Morganschen Regeln*[2] (das Komplement einer Vereinigung ist gleich dem Schnitt der Komplemente usw.). Mittels Venn-Diagrammen kann man sich sofort überzeugen, dass die Aussagen plausibel sind ... aber ein Beweis ist dies noch nicht!

Beweis. Wir beweisen hier exemplarisch Teil (iii). Dazu zeigen wir, dass die Mengen $C \setminus (A \cup B)$ und $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ die gleichen Elemente haben. Denn es gilt

$$\begin{aligned} & x \in C \setminus (A \cup B) \\ \Leftrightarrow\ & (x \in C) \wedge (x \notin (A \cup B)) \\ \Leftrightarrow\ & (x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ \Leftrightarrow\ & ((x \in C) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in C) \wedge (x \notin B)) \\ \Leftrightarrow\ & (x \in C \setminus A) \wedge (x \in C \setminus B) \\ \Leftrightarrow\ & x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B). \end{aligned}$$

Die letzte Mengenoperation, die wir uns anschauen wollen, ist die Produktbildung. Sind A und B nicht-leere Mengen und $a \in A, b \in B$, so nennen wir einen Ausdruck der Form (a, b) ein **geordnetes Paar**. Die erste **Komponente** (oder Koordinate) dieses Paares ist a, die zweite b.

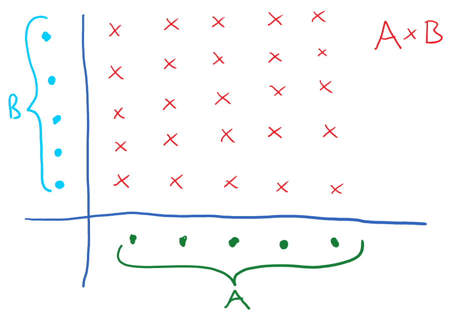
[2] Augustus de Morgan (1806-1871)

VORSICHT. (a) Wir benutzen für offene Intervalle und geordnete Paare die gleiche Notation! Aus dem Kontext sollte aber stets klar sein, worum es sich handelt. Im restlichen Teil dieses Kapitels werden wir mit (a,b) stets das Paar bezeichnen.

(b) Im Gegensatz zu zweielementigen *Mengen* kommt es bei Paaren auf die Reihenfolge an! Es ist zwar $\{1,2\} = \{2,1\}$, aber $(1,2) \neq (2,1)$. Genauer gilt $(a,b) = (c,d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

Die Menge aller solcher geordneter Paare nennen wir das **kartesische Produkt**[3] oder kurz **Produkt** von A und B. Schreibweise:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$



Wir denken bei dieser Definition natürlich an Punkte in der Ebene und ihre Koordinaten. Tatsächlich ist die aus der Schule bekannte Zahlenebene nichts anderes als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3.2. Abbildungen

Im täglichen Leben haben wir es ständig mit Zuordnungen zu tun, etwa wenn eine Lehrerin die Matheklausur ihrer Schüler benotet, wenn wir die Telefonnummern unserer Freunde im Handy speichern (Personen $\to$ Telefonnummern) oder wenn ein Wetterdienst für verschiedene Orte ihre erwartete Tageshöchsttemperatur angibt. Aus mathematischer Sicht handelt es sich hierbei meist um sogenannte Abbildungen.

Definition 3.2. Seien A, B nicht-leere Mengen. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) f von A nach B ordnet jedem Element $a \in A$ *genau ein* Element $f(a) \in B$ zu. Wir schreiben dann auch

$$f : A \to B, \quad a \mapsto f(a).$$

[3]nach René Descartes (1596-1650).

- Von den obigen Beispielen sind die Zuordnungen

$$f : \text{Menge der Schüler} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad a \mapsto \text{„Klausurnote von } a\text{“},$$

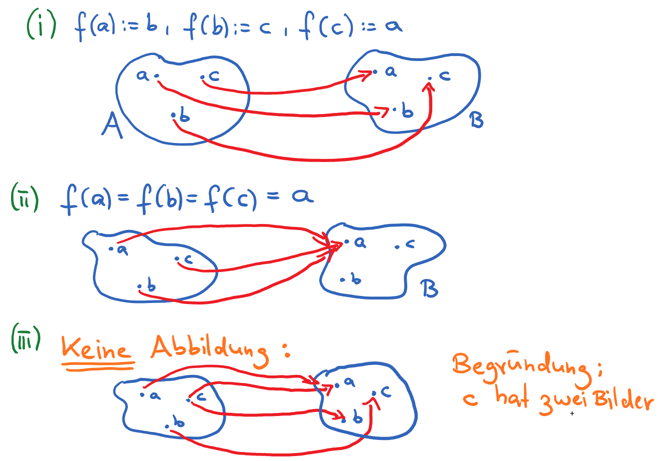
  und

$$g : \text{Menge der Orte} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \text{„Tageshöchsttemperatur am Ort } x\text{“}$$

  Beispiele für Abbildungen.

  Quiz: Warum liefert uns das Telefonnummern-Beispiel keine Abbildung? —Ende Vorlesung 5—

- Bei Abbildungen zwischen endlichen Mengen können wir die Abbildungsvorschrift explizit angeben und mittels Pfeildiagrammen beschreiben. Sei zum Beispiel $A = B = \{a, b, c\}$:



Für die Abbildung

$$f : A \to B, \quad a \mapsto f(a)$$

nennt man

- $f(a)$ den **Wert** von f an der Stelle a bzw. für das **Argument** a (oder das **Bild** von a unter f),
- a ein **Urbild** von $f(a)$ unter f,
- A den **Definitionsbereich** von f,
- B den **Zielbereich** von f,
- die Menge

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

  den **Wertebereich** (oder das **Bild**) von f.

Gilt $B = \mathbb{R}$, so sprechen wir in der Regel von der „Funktion f“ statt von der „Abbildung f“, obwohl beide Sprechweisen erlaubt sind.

BEACHTE. Zur Beschreibung einer Abbildung gehören drei Dinge: Definitionsbereich A, Zielbereich B und Abbildungsvorschrift $a \mapsto f(a)$.

VORSICHT. Während f an der Stelle a genau einen Wert hat (nämlich $f(a)$), kann $f(a)$ verschiedene Urbilder haben, wie das zweite Pfeildiagramm von oben zeigt.

Schauen wir uns einige weitere Beispiele an:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$ (Nachfolgerabbildung).

  Alternative Schreibweise: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) := n + 1$.

  Hier gilt $f(\mathbb{N}) = \{2, 3, 4, \ldots\}$.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ bzw. in alternativer Schreibweise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$.

  Hier ist $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.

  VORSICHT. In der Wahl des Zielbereiches hat man etwas freie Hand, es muss lediglich darauf geachtet werden, dass der Zielbereich eine Obermenge des Wertebereiches ist. Man hätte die obige Funktion also auch als $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$ einführen können, <u>nicht</u> jedoch als $f : \mathbb{R} \to [1, \infty), x \mapsto x^2$.

- Eine Funktion muss nicht durch einen einzelnen Ausdruck definiert werden, wie das folgende Beispiel zeigt: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

  $$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x, & \text{falls } x > 1/2. \end{cases}$$

  Quiz: Was ist hier der Wertebereich von f?

- **Quiz:** Können wir zu zwei nicht-leeren Mengen A und B stets eine Abbildung f von A nach B finden?

- Wichtige Abbildungen sind sogenannte **Folgen**. Als solche bezeichnen wir alle Abbildungen von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Für die Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir auch

  $$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

  wobei $a_n := a(n)$ das n-te Glied der Folge genannt wird. Zum Beispiel ist $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ gerade die Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a(n) = 1/n$.

Definition 3.3. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so nennen wir

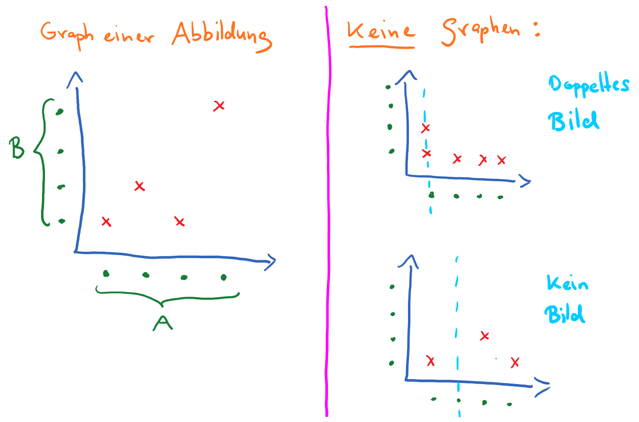
$$G(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$$

den **Graphen** von f.

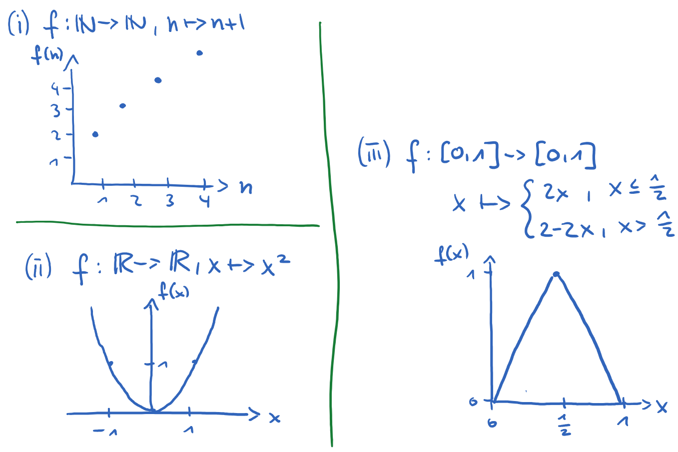
Der Graph einer Abbildung ist also eine spezielle Teilmenge von $A \times B$ (und damit ein Beispiel einer sogenannten **Relation** zwischen A und B). Dies führt sofort zu der Frage, welche Teilmengen $G \subseteq A \times B$ der Graph einer Abbildung $f : A \to B$ sind. Hier ist die Antwort: Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert, so dass $(a, b) \in G$. Oder in formaler Schreibweise:

$$\forall a \in A\ \exists!\, b \in B : (a, b) \in G.$$

Dies kann man sich sehr schön mittels Punktwolken veranschaulichen:



Schauen wir uns auch noch die Graphen der obigen Beispiele an:



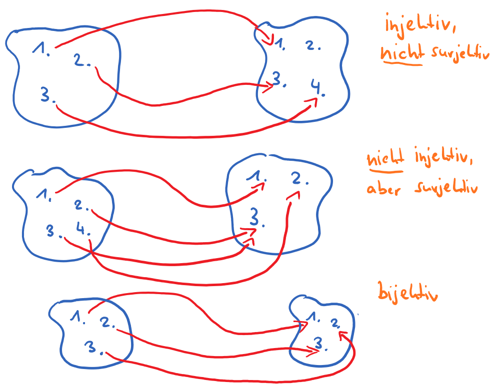
Wir wollen uns nun mit drei wichtigen Eigenschaften befassen, die Abbildungen haben können. Eine Abbildung $f: A \to B$ heißt

- **injektiv**, falls für jedes $b \in B$ **höchstens** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.

  Anschaulich: Kein Wert wird zweimal angenommen.
- **surjektiv**, falls für jedes $b \in B$ **mindestens** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.

  Anschaulich: Jeder Punkt im Zielbereich wird (mindestens einmal) angenommen.
- **bijektiv**, falls für jedes $b \in B$ **genau** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.

  Anschaulich: Jeder Punkt im Zielbereich wird genau einmal angenommen.



—Ende Vorlesung 6—

BEACHTE. Sei $f: A \to B$ gegeben.

- Die Injektivität von f ist äquivalent dazu, dass Folgendes gilt:

$$\forall a, a' \in A: \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

  Diese Formulierung eignet sich gut, um die Injektivität von konkreten Funktionen nachzuweisen. Alternativ kann man auch die Kontraposition zeigen:

$$\forall a, a' \in A: \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

- Die Surjektivität von f ist äquivalent zu $f(A) = B$, d.h. Zielbereich = Wertebereich. Oder mit Quantoren:

$$\forall b \in B \; \exists a \in A: \quad f(a) = b.$$

- Ferner ist f genau dann bijektiv, wenn sie injektiv **und** surjektiv ist. Mit Quantoren heißt dies gerade

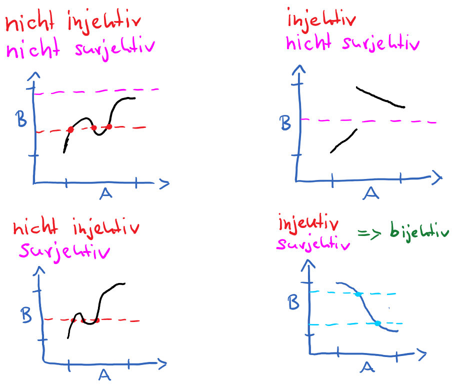
$$\forall b \in B \; \exists! a \in A: \quad f(a) = b.$$

Schauen wir uns weitere Beispiele an:

- Durch Einschränkung von Definitions- bzw. Zielbereich können wir die Eigenschaften einer Abbildung ändern:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 &\qquad \text{ist weder injektiv, noch surjektiv,} \\ f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2 &\qquad \text{ist surjektiv, aber nicht injektiv,} \\ f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^2 &\qquad \text{ist bijektiv.} \end{aligned}$$

- **Quiz:** Wie können wir allgemein am Graphen einer Funktion erkennen, ob Sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist?

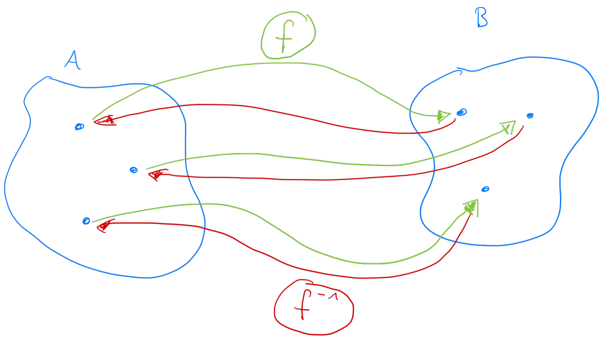


Die wichtigste Eigenschaft von bijektiven Abbildungen ist, dass Sie eine Umkehrabbildung besitzen.

Definition 3.4. Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann ist die **Umkehrabbildung** (bzw. **Inverse**) $f^{-1} : B \to A$ für $b \in B$ definiert durch

$$f^{-1}(b) = a,$$

wobei a das eindeutige Element von A mit $f(a) = b$ ist.

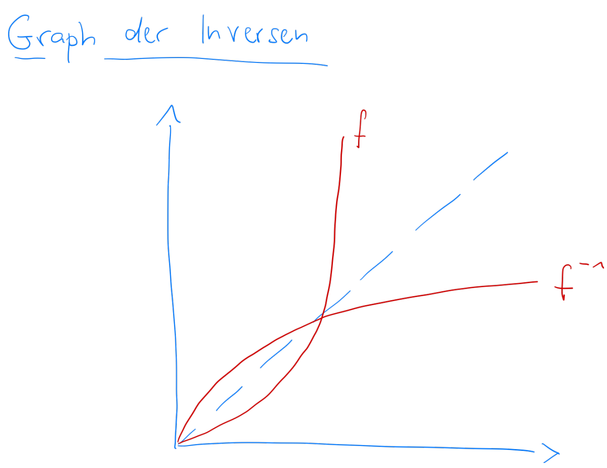


Es gilt also für bijektives $f : A \to B$ und $a \in A, b \in B$, dass

$$f(a) = b \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(b) = a.$$

Dies hat insbesondere auch zur Folge, dass sich der Graph der Umkehrabbildung einfach durch „Spiegelung“ des Graphen von f ergibt, d.h.

$$G(f^{-1}) = \{(f(a), a) \mid a \in A\}.$$



Betrachten wir ein Beispiel einer reellen Funktion (statt a, b verwenden wir hier meist x, y für die Benennung der Variablen).

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x+1}{2}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ rechnen wir

  $$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 1.$$

  Die Gleichung $f(x) = y$ hat also für jedes y im Zielbereich $\mathbb{R}$ genau eine Lösung im Definitionsbereich $\mathbb{R}$, d.h. f ist bijektiv. Gleichzeitig haben wir die Umkehrabbildung ausgerechnet: es gilt

  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(y) = 2y - 1.$$

  Wie hier geschehen beschreibt man das Argument der Umkehrfunktion häufig mit einem anderen Buchstaben als das Argument der Funktion (hier z.B. y bzw. x). Dies ist aber nicht zwingend notwendig. Man hätte genauso schreiben können

  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = 2x - 1.$$

***VORSICHT*.** Die Umkehrabbildung f^{-1} hat nichts mit der Abbildung $\frac{1}{f}$ zu tun! Hier ist zum Beispiel $f^{-1}(y) = 2y - 1$, aber

$$\left(\frac{1}{f}\right)(y) = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{\frac{y+1}{2}} = \frac{2}{y+1}.$$

- **Quiz:** Was ist die Umkehrabbildung von $f : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^2$?

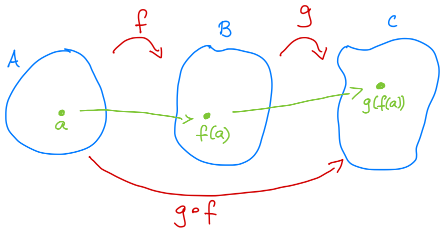
Konstruktion von Abbildungen

Aus gegebenen Abbildungen können wir neue konstruieren. Zum Beispiel durch Verknüpfen bzw. Hintereinanderausführen.

Definition 3.5. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

die **Verknüpfung** bzw. **Komposition** bzw. **Hintereinanderausführung** von f und g. Sprechweise: „g nach f“.



Wir betrachten ein paar Beispiele:

- $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. Dann gilt $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

und

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

***VORSICHT*.** Im Allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$. Die Verknüpfung von Abbildungen ist nicht kommutativ.

- Für $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$ ist nur eine der Verknüpfungen $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert. **Quiz:** Welche? Was kommt heraus?

- Für $f : A \to B, g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

  D.h. die Verknüpfung von Abbildungen ist **assoziativ**, die Reihenfolge der Auswertung spielt keine Rolle.

- Für $A \neq \emptyset$ ist die **Identitätsfunktion** id_A definiert als

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \quad \mathrm{id}_A(a) = a,$$

  d.h. sie bildet jedes Element von A auf sich selbst ab (oder anders formuliert, sie lässt die Elemente von A so wie sie sind).

  Die Identitätsfunktion spielt für die Verknüpfung von Abbildung eine ähnliche Rolle wie die 1 bei der Multiplikation von Zahlen: Für $f : A \to B$ und die Identitätsfunktionen $\mathrm{id}_B : B \to B$ bzw. $\mathrm{id}_A : A \to A$ gilt $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$, denn für alle $a \in A$ gilt

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = \underbrace{f(a)}_{\in B} = \mathrm{id}_B(f(a)) = (\mathrm{id}_B \circ f)(a).$$

Jetzt können wir eine zweite Charakterisierung der Umkehrabbildung angeben.

Satz 3.6. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(i) Ist f bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \textit{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B,$$

d.h.

$$\forall a \in A : \quad f^{-1}(f(a)) = a \quad \textit{und} \quad \forall b \in B : \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Die Umkehrabbildung hebt also die Wirkung von f wieder auf.

(ii) Die Umkehrabbildung ist durch die Eigenschaft in Teil (i) eindeutig charakterisiert. Genauer: Falls eine Abbildung $g : B \to A$ existiert, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \ \textit{und} \ f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

so ist f bijektiv und $g = f^{-1}$.

Beweis von Satz 3.6. (i) Sei $f : A \to B$ bijektiv und $a \in A$ beliebig. Setzen wir $b = f(a)$, so gilt nach Definition von f^{-1}, dass

$$a = f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = (f^{-1} \circ f)(a).$$

Ist umgekehrt $b \in B$ beliebig, so existiert genau ein $a \in A$ mit $b = f(a)$, und damit wie zuvor

$$b = f(a) = f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b).$$

(ii) Sei $g : B \to A$ eine Funktion mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Dass hieraus die Bijektivität von f folgt, ist eine Übungsaufgabe. Aus der Bijektivität folgt dann die Existenz von $f^{-1} : B \to A$ und damit aus Teil (i), dass

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

Später werden wir noch weitere Möglichkeiten kennen lernen, aus gegebenen Abbildungen neue zu machen. Im Falle von reellwertigen Funktionen etwa, indem man Summen oder Produkte betrachtet. Bevor wir hierzu kommen, müssen wir nun aber endlich die reellen Zahlen selbst etwas näher in Augenschein nehmen. ←Ende Vorlesung 7—

4. Die reellen Zahlen

Auch wenn Sie dies vielleicht nicht bemerkt haben, haben wir uns bisher auf ziemlich wackligem Grund bewegt und eine Reihe von Resultaten benutzt, ohne groß über ihre Gültigkeit nachzudenken. Zum Beispiel haben wir es ohne weiteres hingenommen, dass eine reelle Zahl x existiert, für die $x^2 = 2$ ist. Wie in der Einleitung schon angedeutet, ist dies aber gar nicht so klar. Ein ähnliches Problem begnetete uns bei der Surjektivität der Funktion

$$[0, \infty) \ni x \mapsto x^2 \in [0, \infty),$$

die wir an verschiedenen Stellen schon benutzt haben. Können wir wirklich sicher sein, dass für jedes $y \geq 0$ ein $x \geq 0$ existiert, so dass $x^2 = y$ gilt?

In diesem Kapitel wollen wir uns unter anderem mit dieser Frage beschäftigen. Dazu werden wir zunächst einige Grundtatsachen (Axiome) für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aufstellen, die wir als gültig voraussetzen und nicht weiter hinterfragen wollen. Alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen, wie zum Beispiel die Existenz von $\sqrt{2}$, sollten sich dann nur mit Hilfe dieser Grundtatsachen (und schon bewiesenen Aussagen) beweisen lassen. Man nennt dieses Vorgehen die **axiomatische Methode**. Wie Sie schon wissen, geht diese Methode zurück auf Euklid, welcher sie im Kontext der ebenen Geometrie vor über 2000 Jahren zum ersten Mal benutzte. Die axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen ist dagegen vergleichsweise jung und wurde erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts in die Mathematik eingeführt.

BEACHTE. Vielleicht motiviert Sie ein kurzer Ausblick, welche Resultate wir im Laufe der Vorlesung aus den Axiomen gewinnen werden:

- Jede reelle Zahl hat eine k-te Wurzel, die man beliebig genau berechnen kann.
- Wir können $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ bijektiv aufeinander abbilden, aber nicht $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.
- Es gilt $1 = 0.9999\ldots$
- Die unendliche Summe $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \pm \ldots$ konvergiert (gegen $\ln(2)$), während die unendliche Summe $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ divergiert.
- Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nirgendwo stetig sind.
- Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nirgendwo differenzierbar sind.
- Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 1$. **Quiz:** Welche?

Wir werden die Axiome für die reellen Zahlen in drei Gruppen einteilen

- arithmetische Axiome (die sogenannten **Körper-Axiome**),

die uns sagen, welchen Rechengesetzen die reellen Zahlen genügen sollen,

- Axiome der Anordnung,

die es erlauben, Größenvergleiche zwischen reellen Zahlen vorzunehmen, und das

- Vollständigkeitsaxiom,

das für die *Lückenfreiheit* der reellen Zahlen sorgt (und sie somit von $\mathbb{Q}$ unterscheidet).

Wir werden diesen drei Axiomengruppen jeweils einen eigenen Abschnitt in diesem Kapitel widmen. Daneben werden wir auch über die natürlichen Zahlen und das wichtige Beweisprinzip der vollständigen Induktion sprechen. Und schließlich werden auch Folgen und Reihen in diesem Kapitel besprochen und wir werden einen ersten genaueren Blick auf den *Grenzwertbegriff* werfen.

4.1. Die Körper-Axiome

Wir beginnen damit, die Rechenregeln für die reellen Zahlen festzulegen. Dazu stellen wir zunächst eine Liste von Eigenschaften zusammen, die wir uns für das Rechnen mit den reellen Zahlen wünschen. Jeden Zahlbereich, der diese Regeln erfüllt, nennt man in der Mathematik einen **Körper**. Die Regeln selbst heißen die **Körper-Axiome**. Neben $\mathbb{R}$ gelten sie etwa auch in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (oder in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$).

Definition 4.1. Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Abbildungen (sog. Verknüpfungen)

$$\begin{array}{rll} \textbf{Addition:} & + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, & (a,b) \mapsto a+b \\ \textbf{Multiplikation:} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, & (a,b) \mapsto a \cdot b, \end{array}$$

heißt **Körper**, falls Folgendes gilt:

i. **Kommutativität:**

$$\forall a, b \in \mathbb{K} : \qquad a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

ii. **Assoziativität:**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} : \qquad a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{und} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

iii. **Existenz eines neutralen Elements:**
Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$, so dass $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. In Formeln:

$$\exists\, 0 \in \mathbb{K}\ \forall a \in \mathbb{K} : \quad a + 0 = a.$$

Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. In Formeln:

$$\exists\, 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \forall a \in \mathbb{K}: \quad a \cdot 1 = a.$$

iv. **Existenz eines inversen Elements:**
Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0$. In Formeln:

$$\forall a \in \mathbb{K}\ \exists b \in \mathbb{K}: \quad a + b = 0.$$

Für jedes $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot b = 1$. In Formeln:

$$\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathbb{K}: \quad a \cdot b = 1.$$

v. **Distributivgesetz:**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Man mache sich klar, dass die Reihenfolge der Quantoren in den Axiomen (iii) und (iv) wichtig ist. **Quiz:** Wie ändert sich die Bedeutung, wenn in Axiom (iv) die Quantoren getauscht werden?

BEACHTE. Sie wundern sich vielleicht, dass wir die Subtraktion und Division in diesen Axiomen gar nicht erwähnt haben. Tatsächlich sind sie aber implizit enthalten, wie wir später sehen werden.

Vereinbarung. (i) Um Klammern zu sparen vereinbaren wir, dass *Punkt- vor Strichrechnung* geht. Dies haben wir oben beim Distributivgesetz auch schon benutzt, d.h. $a \cdot b + a \cdot c = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
(ii) Aus dem Assoziativgesetz folgt auch

$$a+((b+c)+d) = a+(b+(c+d)) = (a+b)+(c+d) = ((a+b)+c)+d = (a+(b+c))+d.$$

Es kommt also auch bei Summen mit vier Summanden nicht auf die Klammerung an. Wir werden daher die Klammern oft ganz weglassen, wenn nur die Addition (oder nur die Multiplikation) vorkommt.

Nun können wir also unser erstes Axiom für die reellen Zahlen festlegen.

Axiom 4.2 (Körper-Axiom)**.** Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen Körper.

Außer $\mathbb{R}$ gibt es noch weitere Körper, zum Beispiel den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. **Quiz:** Warum bilden $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ keine Körper?

Beispiel. Es gibt sogar Körper mit nur endlich vielen Elementen. Der folgende Körper $\mathbb{K}_2$ ist der kleinstmögliche (**Quiz:** Warum?):

$$\mathbb{K}_2 = \{0,1\} \text{ mit den Operationen } \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \text{ und } \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Für diesen Körper kann man die Axiome (i) bis (v) per Hand nachprüfen. Merken kann man sich die Verknüpfungstafeln auch so: Interpretieren Sie 0 als Symbol für „gerade“ und 1 als Symbol für „ungerade“!

BEACHTE. Bei der Auswahl von Axiomen muss man auf ein paar Dinge achten. Zwei Axiome dürfen sich etwa nicht widersprechen, da sie sonst nicht gleichzeitig gelten können. Außerdem sollte man nicht unnötig Axiome aufnehmen, die sich sowieso als Folgerung aus den schon vorhandenen ergeben. Zum Beispiel werden wir zeigen, dass es überflüssig wäre zu fordern, dass zu jedem $a \in \mathbb{K}$ *genau ein* $b \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $a + b = 0$ gilt. Das ergibt sich schon aus den übrigen Axiomen.

Wir wollen nun einige einfache Folgerungen aus den Körper-Axiomen herleiten. Achten Sie darauf, dass wir in den Beweisen wirklich nur diese Axiome (und nicht etwa unsere Anschauung) verwenden. Wir formulieren diese Folgerungen gleich für allgemeine Körper. Damit sind sie insbesondere auch für $\mathbb{R}$ gültig, aber eben auch für andere Körper.

Lemma 4.3. *Die neutralen Elemente in Axiom (iii) und die inversen Elemente in Axiom (iv) sind eindeutig bestimmt.*

Mit anderen Worten: Neben $0 \in \mathbb{K}$ kann es kein davon verschiedenes Element, sagen wir $0' \in \mathbb{K}$, mit der gleichen Eigenschaft geben. Das gleiche gilt für die multiplikative 1. Ferner existiert zu jedem $a \in \mathbb{K}$ *genau ein* $b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0$ und zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert *genau ein* $b \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot b = 1$. Natürlich sind wir diese Eigenschaften von den reellen Zahlen gewohnt und sie überraschen uns nicht. Aber dies ist nicht der Punkt. Die Eindeutigkeit wurde in den Körper-Axiomen nicht explizit erwähnt, es ist also nicht selbstverständlich, dass sie automatisch aus den Körper-Axiomen folgt. Dass sie es tut, ist ein Hinweis darauf, dass wir die Axiome gut und sinnvoll gewählt haben.

Beweis. (i) Wir beweisen die Eindeutigkeit von 0 (die von 1 ist eine Übung). Nehmen wir also einmal an, dass es ein weiteres Element $0' \in \mathbb{K}$ gibt, das Axiom (iii) erfüllt, d.h. $a + 0' = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt dies sicher auch für $a = 0$, d.h. es folgt

$$0 + 0' = 0.$$

Andererseits gilt nach Axiom (iii) auch $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Wenden wir dies auf $a = 0'$ an, so folgt

$$0' + 0 = 0'.$$

Aber Aufgrund von Axiom (i) ist die Addition kommutativ, d.h. aus diesen beiden Gleichungen folgern wir

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0.$$

(ii) Wir zeigen die Eindeutigkeit im Falle der Addition (Multiplikation ist eine Übung): Sei also $a \in \mathbb{K}$ beliebig. Nehmen wir wieder an, es gibt zwei inverse Elemente $b, b' \in \mathbb{K}$ zu a, d.h. es gilt $a + b = 0$ und $a + b' = 0$. Wir wollen zeigen, dass dann $b = b'$ gelten muss. Dazu rechnen wir wie folgt unter Verwendung der Körper-Axiome:

$$\begin{aligned} b &\overset{\text{(Def. von 0)}}{=} b + 0 \overset{\text{(Def. von } b')}{=} b + (a + b') \\ &\overset{\text{(Ass.)}}{=} (b + a) + b' \overset{\text{(Komm.)}}{=} (a + b) + b' \\ &\overset{\text{(Def. von } b)}{=} 0 + b' \overset{\text{(Komm.)}}{=} b' + 0 \overset{\text{(Def. von 0)}}{=} b'. \end{aligned}$$

Das vorherige Lemma erlaubt es nun also, von 0 als **dem** neutralen Element bezüglich der Addition und von 1 als **dem** neutralen Element der Multiplikation zu sprechen. Für **das** inverse Element bezüglich der Addition und **das** inverse Element bezüglich der Multiplikation führen wir nun die gewohnte Schreibweise ein.

Definition 4.4. Zu $a \in \mathbb{K}$ sei $-a$ das bezüglich $+$ inverse Element (additives Inverses). Weiterhin setzen wir für $a, b \in \mathbb{K}$

$$a - b := a + (-b).$$

Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei a^{-1} das bezüglich $\cdot$ inverse Element (multiplikatives Inverses). Weiterhin setzen wir für $a, b \in \mathbb{K}, b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

Die Division und Subtraktion waren also tatsächlich in den Körper-Axiomen versteckt. Wir wollen nun zeigen, dass für einen Körper die „üblichen" Rechengesetze gelten. —Ende Vorlesung 8—

Satz 4.5. *(1)* ***Umformen von Gleichungen:*** *Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$a + b = c \quad \Rightarrow \quad a = c - b.$$

$$b \neq 0 \text{ und } a \cdot b = c \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{b}.$$

(2) ***Allgemeine Rechenregeln:*** *Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$
\begin{array}{rcll}
-(-a) & = & a & (a) \\
(a^{-1})^{-1} & = & a, \text{ falls } a \neq 0 & (b) \\
-(a+b) & = & (-a)+(-b) & (c) \\
(a \cdot b)^{-1} & = & a^{-1} \cdot b^{-1}, \text{ falls } a \neq 0 \text{ und } b \neq 0 & (d) \\
a \cdot 0 & = & 0 & (e) \\
a \cdot (-b) & = & -(a \cdot b) & (f) \\
(-a) \cdot (-b) & = & a \cdot b & (g) \\
a \cdot b = 0 & \Leftrightarrow & a = 0 \text{ oder } b = 0. & (h)
\end{array}
$$

BEACHTE. Dieser Satz enthält also in (a) bzw. (g) unter anderem die bekannte Merkregel

„Minus mal Minus gleich Plus.“

Weiterhin zeigt (e), dass die 0 tatsächlich kein multiplikatives Inverses besitzt (denn für kein $a \in \mathbb{K}$ gilt $0 \cdot a = 1$). In anderen Worten:

„Durch die 0 darf nicht geteilt werden.“

Wir werden den Satz nun einmal sehr ausführlich beweisen und stets angeben, welches Axiom oder schon bewiesene Resultat wir in den einzelnen Schritten verwendet haben (später werden wir dies nicht mehr so detailliert machen)

Beweis.

(1) Aus $a + b = c$ folgt

$$
\begin{array}{lrl}
 & (a+b)+(-b) = c+(-b) & \\
\Rightarrow & a+(b+(-b)) = c-b & \text{(Ass. \& Def. 4.4)} \\
\Rightarrow & a+0 = c-b & \text{(Def. additives Inverses)} \\
\Rightarrow & a = c-b & \text{(Def. 0)}
\end{array}
$$

Der Beweis für die Multiplikation ist analog.

(2a) Es ist zu zeigen, dass a das additive Inverse von $(-a)$ ist, d.h. dass $(-a)+a = 0$ gilt. In der Tat gilt

$$0 \overset{\text{Def. } -a}{=} a + (-a) \overset{\text{Komm.}}{=} (-a) + a.$$

(2b) Analog zu (2a). Dies ist eine Übung.

(2c) Es ist

$$\begin{aligned}
(a+b)+((-a)+(-b)) &= a+b+(-a)+(-b) && \text{(Ass.)}\\
&= a+(-a)+b+(-b) && \text{(Komm.)}\\
&= (a+(-a))+(b+(-b)) && \text{(Ass.)}\\
&= 0+0=0 && \text{(Def. add. Inv. \& Def. 0)}
\end{aligned}$$

Also ist $(-a)+(-b)$ das additive Inverse von $(a+b)$, d.h. $-(a+b)=(-a)+(-b)$.

(2d) Analog zu (2c).
(2e) Es gilt

$$\begin{aligned}
& & a\cdot 0 &= a\cdot(0+0) && \text{(Def. 0)}\\
\Rightarrow & & a\cdot 0 &= a\cdot 0+a\cdot 0 && \text{(Distr.)}\\
\Rightarrow & & a\cdot 0-(a\cdot 0) &= a\cdot 0 && \text{(Teil (1) des Satzes)}\\
\Rightarrow & & 0 &= a\cdot 0 && \text{(Def. add. Inv.)}
\end{aligned}$$

(2f und 2g) Übung.
(2h) Wir müssen zwei Richtungen beweisen, „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“.
„$\Leftarrow$“: Zwei Fälle sind zu unterscheiden. Ist $b=0$, so gilt $a\cdot b=a\cdot 0=0$ wegen (e). Ist $a=0$, so folgt wegen der Kommutativität $a\cdot b=0\cdot b=b\cdot 0\overset{(e)}{=}0$.
„$\Rightarrow$“: Es sei $a\cdot b=0$. Wir wollen zeigen, dass $a=0$ oder $b=0$. Nehmen wir an, dass $a\neq 0$ gilt. Dann folgt

$$b=b\cdot 1=1\cdot b=(a\cdot a^{-1})\cdot b=(a^{-1}\cdot a)\cdot b=a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0=0.$$

In jedem Fall gilt also $a=0$ oder $b=0$. **Quiz:** Welche Regeln haben wir in der letzten Gleichungskette verwendet?

Vereinbarung. Im Folgenden werden wir den Multiplikationspunkt oft weglassen, $ab=a\cdot b$.

Wie wir oben gesehen haben, genügen die Körper-Axiome noch nicht einmal, um auszuschließen, dass $1+1=0$ ist (man denke an den Körper $\mathbb{K}_2$). Wir benötigen neben den Körper-Axiomen also noch weitere Axiome, um die reellen Zahlen vollständig zu charakterisieren.

4.2. Die Anordnungsaxiome

Dass und wie wir reelle Zahlen der Größe nach vergleichen können, soll in diesem Abschnitt diskutiert werden. Wir tun dies gleich wieder im Kontext allgemeiner Körper.

Die Idee für unsere erste Definition ist, dass eine Zahl a genau dann größer als eine Zahl b ist, wenn die Differenz $a - b$ positiv ist.

Definition 4.6. Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **angeordnet**, wenn es eine Teilmenge $\mathbb{K}_+ \subseteq \mathbb{K}$ gibt (die positiven Zahlen), so dass Folgendes gilt:

(A1) Für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a \in \mathbb{K}_+, \quad -a \in \mathbb{K}_+, \quad a = 0.$$

(A2) $\quad \forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a, b \in \mathbb{K}_+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{K}_+.$

(A3) $\quad \forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a, b \in \mathbb{K}_+ \Rightarrow ab \in \mathbb{K}_+.$

Bevor wir ein paar Eigenschaften über angeordnete Körper beweisen, wollen wir sie zunächst in die übliche Schreibweise einkleiden, indem wir setzen

$$\begin{aligned} a < b \quad &:\Leftrightarrow \quad b > a \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{K}_+ \\ a \leq b \quad &:\Leftrightarrow \quad b \geq a \quad :\Leftrightarrow \quad (a < b \quad \vee \quad a = b) \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: Das Symbol $:\Leftrightarrow$ bedeutet, dass die Aussage auf der linken Seite des Symbols durch die Aussage auf der rechten Seite des Symbols definiert wird). Damit lässt sich dann folgender, fast offensichtlich erscheinender Satz formulieren.

Satz 4.7. *In einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gelten folgende Eigenschaften.*

i. Vergleichbarkeit: Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b.$$

ii. Transitivität:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

iii. Verträglichkeit mit Addition:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c.$$

iv. Verträglichkeit mit Multiplikation positiver Zahlen:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad c > 0) \quad \Rightarrow \quad ac < bc.$$

v. Umkehrung der Ungleichung bei Multiplikation mit -1:

$$\forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad -a > -b.$$

und

$$\forall a,b,c \in \mathbb{K}: \quad a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc.$$

vi. Ist $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$, *so gilt* $a^2 := a \cdot a > 0$. *Insbesondere ist* $1 = 1^2 > 0$.

vii. Ungleichungen kann man addieren:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad c < d) \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d.$$

viii. Ungleichungen positiver Zahlen kann man multiplizieren:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{K}_+: \quad (a < b \quad \wedge \quad c < d) \quad \Rightarrow \quad ac < bd.$$

Weiterhin gelten (ii), (iii), (iv), (v), (vii) und (viii) auch, wenn man $<$ *überall durch* $\leq$ *und* $>$ *durch* $\geq$ *ersetzt.*

Quiz: Gilt (viii) auch, wenn nicht alle a, b, c, d positiv sind?

Beweis. (i) Klar, da nach (A1) gilt, dass $b - a$ genau eine der Aussagen

$$b - a \in \mathbb{K}_+, \quad -(b-a) = a - b \in \mathbb{K}_+, \quad b - a = 0$$

erfüllt.

(ii) Es gilt $a < b$ und $b < c$ genau dann, wenn $b - a \in \mathbb{K}_+$ und $c - b \in \mathbb{K}_+$, also wegen (A2) auch $(b-a) + (c-b) = c - a \in \mathbb{K}_+$, was gerade $a < c$ bedeutet.

(iii) Es sei $a < b$ und $c \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathbb{K}_+,$$

d.h. $a + c < b + c$.

(iv) Ist $a < b$ und $c > 0$, so heißt dies $b - a \in \mathbb{K}_+$ und $c \in \mathbb{K}_+$, d.h. aus (A3) folgt

$$(b - a)c = bc - ac \in \mathbb{K}_+,$$

was gerade $ac < bc$ bedeutet.

(v.1) Aus $a < b$ folgt mittels (iii) durch Addition von $c = -a - b$, dass

$$-b = a + (-a - b) < b + (-a - b) = -a,$$

d.h. $-a > -b$. Die umgekehrte Richtung folgt analog unter Verwendung von $-(-a) = a$. —Ende Vorlesung 9—

(v.2) Sei $a < b$ und $c < 0$. Dann folgt aus (v.1), dass $-c > 0$ und somit aus (iv), dass

$a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$. Aber

$$a \cdot (-c) < b \cdot (-c) \quad \Leftrightarrow \quad -(ac) < -(bc) \quad \overset{(v.1)}{\Leftrightarrow} \quad ac > bc.$$

(vi) Ist $a > 0$, so folgt aus (iv), dass $a \cdot a > 0$. Ist $a < 0$, so ist nach (v.1) die Zahl $-a > 0$ und somit nach dem schon Bewiesenen $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$.

(vii) Unter Verwendung von (iii) folgt aus $a < b$ und $c < d$, dass

$$a + c < b + c = c + b \quad \text{und} \quad c + b < d + b.$$

Mit (ii) folgt $a + c < d + b = b + d$.

(viii) Analog zu (vii) unter Verwendung von (iv).

Alle eben bewiesenen Eigenschaften gelten insbesondere für die reellen Zahlen, denn wir setzen von nun an Folgendes voraus.

Axiom 4.8 (Anordnungsaxiom)**.** Der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist angeordnet.

Ein weiteres Beispiel eines angeordneten Körpers bilden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

BEACHTE. Der Körper $\mathbb{K}_2$ lässt sich nicht anordnen, denn in jedem angeordneten Körper gilt nach dem vorherigen Satz zunächst $0 < 1$ und daher auch $1 = 0+1 < 1+1$, d.h. insgesamt

$$0 < 1 < 1 + 1.$$

Die drei Elemente $0, 1, 1 + 1$ sind insbesondere paarweise verschieden. In $\mathbb{K}_2$ gilt aber $1 + 1 = 0$.

Um die reellen Zahlen vollständig axiomatisch zu beschreiben fehlt uns noch ein Axiom, das die Lückenfreiheit der reellen Zahlen beschreibt (und $\mathbb{R}$ somit von $\mathbb{Q}$ unterscheidet). Dieses sogenannte Vollständigkeitsaxiom werden wir allerdings erst etwas später diskutieren. Zunächst wollen wir einen kleinen Abschnitt über die natürlichen Zahlen einfügen.

4.3. Einschub: Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion

Da wir uns dafür entschieden haben, das Analysis-Gebäude auf Basis der reellen Zahlen aufzubauen, müssen wir nun auch noch zeigen, dass die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen mit ihren gewohnten Eigenschaften aus den reellen Zahlen (auf Basis der Körper- und Anordnungsaxiome) zurückgewonnen werden können. Man könnte zum Beispiel versucht sein, zu definieren

$$\mathbb{N} = \{1, \underbrace{1+1}_{=:2}, \underbrace{1+1+1}_{=:3}, \ldots\}.$$

Die Zahlen $1, 2, 3$ usw. sind dann tatsächlich alle verschieden, wie wir weiter oben schon gesehen hatten. Allerdings ist die Verwendung von Pünktchen in so einer Definition aus mathematischer Sicht nicht sehr befriedigend. Wir werden deswegen nun eine bessere Methode zur Einführung von $\mathbb{N}$ wählen, die uns zugleich ein weiteres wichtiges Beweisprinzip liefern wird.

4.3.1. Die natürlichen Zahlen

Wir beginnen damit, denjenigen Teilmengen der reellen Zahlen, die die 1 enthalten und bei denen Addition von 1 niemals aus der Menge herausführt, einen speziellen Namen zu geben.

Definition 4.9. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls Folgendes gilt:

(i) $1 \in M$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \in M \;\Rightarrow\; x + 1 \in M$.

Mit anderen Worten, die Zahl 1 ist Element von M und mit jeder Zahl x auch ihr „Nachfolger“ $x + 1$.

Beispiele für induktive Mengen sind etwa $\mathbb{R}$ oder das Intervall $[1, \infty)$. Mit 1 enthält jede induktive Menge auch $2 := 1 + 1$ damit $3 := 1 + 1 + 1$ und so weiter. D.h. jede induktive Menge enthält zumindest die Zahl 1 und alle Zahlen, die man durch wiederholtes Addieren von 1 erhalten kann. Die Idee ist nun, die natürlichen Zahlen als die kleinste induktive Menge zu definieren. Und das geht so:

Definition 4.10.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M \\ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{für jede induktive Teilmenge } M \subseteq \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\}. \end{aligned}$$

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ werden also genau aus den reellen Zahlen gebildet, die in jeder induktiven Menge enthalten sind. Nach dem oben gesagten enthält $\mathbb{N}$ also die 1 und alle Zahlen, die man von 1 aus durch wiederholtes addieren von 1 erhalten kann. Dass $\mathbb{N}$ darüber hinaus keine weiteren Zahlen enthält, werden wir etwas später besprechen.

Lemma 4.11. *Es gilt:*
(i) $\mathbb{N}$ *ist induktiv.*
(ii) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ *induktiv, so gilt* $\mathbb{N} \subseteq M$.
(iii) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ *induktiv und* $M \subseteq \mathbb{N}$, *so ist* $M = \mathbb{N}$.

BEACHTE. Aus (i) und (ii) folgt, dass $\mathbb{N}$ die kleinste (bzgl. $\subseteq$) induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Beweis des vorherigen Lemmas. (i) Da 1 in jeder induktiven Menge enthalten ist, ist $1 \in \mathbb{N}$. Nun sei $x \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass auch $x + 1 \in \mathbb{N}$ gilt. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $x + 1$ in jeder induktiven Menge enthalten ist. Aber ist M eine induktive Menge, so folgt aus $x \in \mathbb{N}$ zunächst, dass $x \in M$ gilt und damit auch $x + 1 \in M$, da M induktiv ist. Tatsächlich ist also $x + 1$ in jeder induktiven Menge enthalten. Also ist $x + 1 \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ induktiv.

(ii) Jedes $x \in \mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Menge enthalten, also insbesondere gilt auch $x \in M$, d.h. $\mathbb{N} \subseteq M$.

(iii) Aus (ii) folgt $\mathbb{N} \subseteq M$ und nach Vor. gilt $M \subseteq \mathbb{N}$, d.h. insgesamt folgt $\mathbb{N} = M$.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man nun die gewohnten Eigenschaften der natürlichen Zahlen tatsächlich beweisen. Der folgende Satz enthält ein paar dieser Eigenschaften. Aus Zeitgründen beweisen wir nur eine der Aussagen.

Satz 4.12. *Für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt:*

(i) $n \geq 1$,

(ii) das Intervall $(n-1, n)$ *enthält keine natürliche Zahl:* $(n-1, n) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

(iii) $n + m \in \mathbb{N}$ *und* $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Teilbeweis. Wir beweisen nur die erste Aussage von Teil (iii). Dazu fixieren wir zunächst einmal die Zahl $m \in \mathbb{N}$ und betrachten die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid n + m \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen nun, dass M induktiv ist:

i. Da $m \in \mathbb{N}$ gilt und $\mathbb{N}$ induktiv ist, ist zunächst auch $1 + m = m + 1 \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass $1 \in M$ gilt.

ii. Nun sei $n \in M$, d.h. $n + m \in \mathbb{N}$. Wieder folgt aufgrund der Induktivität von $\mathbb{N}$, dass $(n + m) + 1 \in \mathbb{N}$. Umordnen der Terme zeigt also $(n + 1) + m \in \mathbb{N}$, was bedeutet, dass auch $n + 1 \in M$ gilt.

Aus der Induktivität von M folgt nun aus dem vorherigen Lemma, dass $\mathbb{N} \subseteq M$ gilt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + m \in \mathbb{N}$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Nachdem wir die natürlichen Zahlen aus den reellen Zahlen zurückgewonnen haben, können wir nun auch die ganzen und die rationalen Zahlen wie gewohnt einführen:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

4.3.2. Die vollständige Induktion

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kommt immer dann zum Zuge, wenn man beweisen will, dass eine Aussage $B(n)$, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängt, für alle natürlichen Zahlen wahr ist. Solche Aussagen könnten zum Beispiel sein

a) $4|(5^n - 1)$, b) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. c) $2^n > n^2$.

Wie würde man für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen, dass die entsprechende Aussage $B(n)$ wahr ist? Eine Möglichkeit wäre, zunächst die Wahrheit von $B(1)$ zu zeigen, dann die von $B(2)$ usw. Sie sehen, dass dies keine gute Strategie ist, denn auch nach sehr langer Zeit hätten Sie stets nur endlich viele der Aussagen als wahr erkannt.

***VORSICHT*.** Sie dürfen auch nicht einfach nach den ersten paar gültigen Fällen abbrechen und sagen, wenn z.B. $B(1)$ bis $B(10)$ wahr sind, dann wird $B(n)$ sicher für alle n wahr sein. Zum Beispiel ist für $n = 1, 2, \ldots, 39$ die Zahl $p(n) = n^2 + n + 41$ stets eine Primzahl und man könnte vermuten, dass dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aber es ist $p(40) = 1681 = 41 \cdot 41$. Es gibt noch extremere Beispiele dieser Art, etwa eine Vermutung von Pólya [a], die eine andere Aussage $C(n)$ über Primzahlen betrachtet. Diese hat sich erst für $n = 906.150.257$ als falsch heraus gestellt.

[a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Vermutung_von_P%C3%B3lya`

Eine bessere Strategie liefert der folgende Satz.

Satz 4.13 (Vollständige Induktion). *Über die Aussagen $B(n), n \in \mathbb{N}$, sei bekannt:*

(A) $B(1)$ ist wahr,

(S) $\forall n \in \mathbb{N} : B(n) \Rightarrow B(n+1)$, d.h. wenn die Aussage für eine Zahl n wahr ist, dann ist sie auch für die folgende Zahl $n + 1$ wahr.

Dann ist die Aussage $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man nennt (A) den **Induktionsanfang** und (S) den **Induktionsschritt**.

Beweis. Betrachte die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid B(n) \text{ ist wahr } \}.$$

Dann ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und nach Voraussetzung ist M induktiv. Aus Lemma 4.11 folgt $M = \mathbb{N}$, d.h. $B(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Wenn ihnen der Beweis zu abstrakt ist, gibt Ihnen die folgende Skizze eine andere Möglichkeit, über die Gültigkeit von Induktionsbeweisen nachzudenken.

$$\begin{array}{cl}
B(1) \text{ ist wahr} & \leftarrow \textit{wegen (A)} \\
\Downarrow & \leftarrow \textit{wegen (S) mit } \; n = 1 \\
B(2) \text{ ist wahr} & \\
\Downarrow & \leftarrow \textit{wegen (S) mit } \; n = 2 \\
B(3) \text{ ist wahr} & \\
\Downarrow & \leftarrow \textit{wegen (S) mit } \; n = 3 \\
B(4) \text{ ist wahr} & \\
\vdots &
\end{array}$$

—Ende Vorlesung 10—

Ein Beweis der Aussagen $B(n)$ mittels vollständiger Induktion zerfällt also in zwei Stufen:

(A) **Induktionsanfang**: Wir beweisen $B(1)$.

(S) **Induktionsschritt** von n nach $n+1$: Hier betrachten wir eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$, die für den Rest des Beweises nicht mehr verändert wird. Um zu zeigen, dass die Implikation $B(n) \Rightarrow B(n+1)$ wahr ist, darf man nun voraussetzen, dass $B(n)$ wahr ist (das nennt man die **Induktionsvoraussetzung** und kürzt man oft mit **I.V.** ab). Dann muss unter Verwendung dieser Vorauss. und logischer Schlüsse gezeigt werden, dass auch $B(n+1)$ wahr ist.

Hat man (A) und (S) gezeigt, so ist $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, wie aus Satz 4.13 folgt.

Betrachten wir ein paar Beispiele.

Proposition 4.14. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

In Worten: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$. Die ersten beiden Fälle stimmen: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}, 3 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$. Aber dies ist noch kein Beweis.

Beweis durch vollständige Induktion. Die Aussage $B(n)$ lautet hier, dass $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(A) Die Aussage $B(1)$ lautet, dass $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Diese Aussage ist wie besprochen wahr.

(S) Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und es sei vorausgesetzt, dass $B(n)$ wahr ist, d.h. es gelte

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{(I.V.)}$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch $B(n+1)$ wahr ist, d.h. dass

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}.$$

Das Ausrufezeichen „!“ bedeutet, dass wir die Gültigkeit dieser Gleichung zeigen müssen. Dazu starten wir mit der linken Seite und wandeln diese unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung schrittweise um, bis wir bei der rechten Seite angelangt sind:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) \\ &\overset{\textit{(I.V.)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Wegen (A) und (S) folgt die Proposition mit vollständiger Induktion.

Vielleicht fragen Sie sich, wo die Aussagen, die man mit Induktion beweisen soll, eigentlich herkommen. Hier gibt es leider keine allgemeingültige Antwort, aber oft ist es so, dass man durch Probieren zu einer Vermutung kommt, die man anschließend per vollständiger Induktion zu beweisen versucht. Für den speziellen Fall der Formel aus der vorherigen Proposition kann man folgendermaßen auf die Formel kommen: Betrachten wir den Fall $n = 100$ und bilden wir Paare von Zahlen

$$\begin{aligned} 100 + 1 &= 101 \\ 99 + 2 &= 101 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ 52 + 49 &= 101 \\ 51 + 50 &= 101. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also $1 + 2 + \ldots + 100 = 50 \cdot 101 = \frac{100 \cdot 101}{2}$. Es wird gesagt, dass der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) als Grundschüler seinen Lehrer zur Verzweiflung gebracht hat, als er diesen Trick benutzte.

Als nächstes wollen wir, für ganzzahlige Potenzen, die Potenzgesetze per Induktion beweisen. Dazu machen wir zunächst noch eine Beobachtung.

BEACHTE. Man darf beim Induktionsanfang auch mit einer anderen Zahl starten: Sei n_0 eine ganze Zahl (sie darf also auch 0 oder negativ sein) und seien $B(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ Aussagen, für die folgendes bekannt ist

$$\text{(A)} \quad B(n_0) \text{ ist wahr.} \qquad \text{(B)} \quad \forall n \geq n_0 : B(n) \Rightarrow B(n+1).$$

Dann ist $B(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

Satz 4.15 (Ganzzahlige Potenzen)**.** *Ist $a \in \mathbb{R}$, so definieren wir die Potenzen $a^n, n \in \mathbb{N}_0$, wie folgt rekursiv:*

$$a^0 := 1, \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ist ferner $a \neq 0$, so definieren wir die negativen Potenzen $a^{-n}, n \in \mathbb{N}$, durch

$$a^{-n} := (a^{-1})^n.$$

Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm} \quad \textit{und} \quad a^n b^n = (ab)^n,$$

wobei $a, b \neq 0$ zu wählen sind, falls negative Exponenten vorkommen.

Man beachte, dass es sich hierbei streng genommen auch um eine "induktive" Definition handelt. Man zeigt, wie man a^{n+1} definiert, wenn man a^n schon definiert hat und hat die Ausdrücke deshalb für alle natürlichen Zahlen definiert.

Teilbeweis. Wir beweisen nur einen kleinen Teil exemplarisch, nämlich, dass $a^{n+m} = a^n a^m$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dazu fixieren wir $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig und beweisen für dieses fixierte m die Aussagen

$$B(n): \quad a^{n+m} = a^n a^m$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ per Induktion.

(A) Für $n_0 = 0$ ist die Aussage $B(0)$, dass $a^m = a^0 a^m$. Aber dies ist wahr, denn nach Definition gilt $a^0 = 1$.

(S) Nun sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es sei vorausgesetzt, dass $B(n)$ wahr ist, dass also

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad \textit{(I.V.)}$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch $B(n+1)$ wahr ist, d.h. dass

$$a^{(n+1)+m} \stackrel{!}{=} a^{n+1} a^m.$$

Wir formen hierzu die linke Seite wieder schrittweise um:

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{(n+m)+1} \stackrel{\text{Def. der Potenz}}{=} a^{n+m} \cdot a \\ &\stackrel{\text{(I.V.)}}{=} (a^n \cdot a^m) \cdot a = (a^n \cdot a) \cdot a^m \stackrel{\text{Def. der Potenz}}{=} a^{n+1} \cdot a^m. \end{aligned}$$

Wegen (A) und (S) folgt die Behauptung nun mit vollständiger Induktion.

BEACHTE. Die Setzung $a^0 := 1$ ist zwingend erforderlich, damit die Potenzrechengesetze so gelten, wie sie angegeben sind. Denn aus $a^0 \cdot a \stackrel{!}{=} a^{0+1} = a^1 = a$ für $a \neq 0$ folgt, dass $a^0 = 1$ gelten muss.

Bevor wir den nächsten Induktionsbeweis betrachten, wollen wir zwei Begriffe einführen.

Definition 4.16. (i) **Fakultät:** Man definiert $0! := 1$ und

$$n! = (n-1)! \cdot n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sprechweise „n-Fakultät“.
(ii) **Binomialkoeffizienten:** Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann definieren wir den Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, gesprochen „n über k“, als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es gilt also $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ und die Fakultät wächst sehr schnell

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad \ldots.$$

Die Binomialkoeffizienten kann man mit Hilfe des **Pascalschen**[1] **Dreiecks** berechnen:

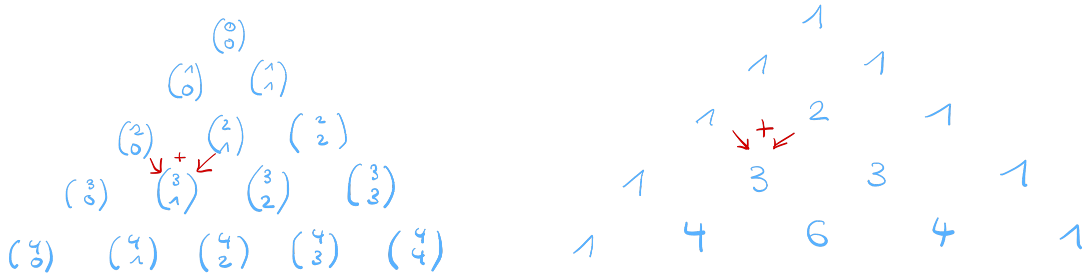


Abbildung 4.1.: *Das Pascalsche Dreieck.*

Dies folgt aus folgendem Lemma.

Lemma 4.17. *Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt:*

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

3) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ *für* $1 \leq k \leq n$

Beweis. Lässt sich direkt (ohne Induktion) nachrechnen. Dies ist eine Übungsaufgabe.

Sowohl die Fakultät als auch die Binomialkoeffizienten spielen eine wichtige Rolle in der Kombinatorik, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.18. *(i) Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge ist gleich $n!$.*
(ii) $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. Insbesondere gilt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ besitzt die $3! = 6$ Anordnungen

$$(1,2,3) \qquad (1,3,2) \qquad (2,1,3) \qquad (2,3,1) \qquad (3,1,2) \qquad (3,2,1).$$

Sie hat $\binom{3}{3} = 1$ Teilmenge mit drei Elementen, $\binom{3}{2} = 3$ Teilmengen mit zwei Elementen, $\binom{3}{1} = 3$ Teilmengen mit einem Element und $\binom{3}{0} = 1$ Teilmenge mit keinem Element. —Ende Vorlesung 11—

Beweis des Satzes. (i) Dies ist eine Übungsaufgabe.
(ii) Dies beweisen wir per Induktion. Hier ist

$$B(n) := \text{„Jede } n\text{-elementige Menge besitzt für alle } 0 \leq k \leq n \text{ genau } \binom{n}{k} \text{ Teilmengen mit } k \text{ Elementen“}.$$

[1] Blaise Pascal (1623-1662)

(A) Wir beweisen die Aussage $B(0)$. Diese lautet, dass jede nullelementige Menge genau eine nullelementige Teilmenge enthält, was offensichtlich wahr ist ($\emptyset \subseteq \emptyset$).

(S) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und die Aussage $B(n)$ als wahr vorausgesetzt (I.V.). Wir müssen zeigen, dass dann auch $B(n+1)$ wahr ist. Dazu sei

$$M := \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$$

eine beliebige $(n+1)$-elementige Menge und $k \in \mathbb{N}_0$ eine Zahl mit $0 \leq k \leq n+1$. Wenn wir zeigen können, dass M genau $\binom{n+1}{k}$ Teilmengen mit k Elementen besitzt, ist die Aussage $B(n+1)$ als wahr verifiziert.

Da M genau eine nullelementige Teilmenge und genau eine $(n+1)$-elementige Teilmenge besitzt (und $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$), genügt es im folgenden den Fall $1 \leq k \leq n$ zu betrachten. Hier teilen wir die k-elementigen Teilmengen von M in zwei disjunkte Familien auf:

$$\mathcal{X}_1 := \{A \subseteq M \mid A \text{ hat } k \text{ Elemente und } a_{n+1} \in A\}$$

und

$$\mathcal{X}_2 := \{A \subseteq M \mid A \text{ hat } k \text{ Elemente und } a_{n+1} \notin A\}.$$

Die Mengen in $\mathcal{X}_1$ enthalten also neben a_{n+1} genau $k-1$ Elemente aus der Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Da die Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ nach Induktionsannahme genau $\binom{n}{k-1}$ Teilmengen mit $k-1$ Elementen besitzt, sind in $\mathcal{X}_1$ also auch $\binom{n}{k-1}$ Elemente enthalten. Die Mengen in $\mathcal{X}_2$ wiederum werden aus beliebigen k-elementigen Teilmengen von $\{a_1, \ldots, a_n\}$ gebildet, wovon es nach Induktionsvoraussetzung genau $\binom{n}{k}$ gibt. Insgesamt enthält unsere Menge M also genau

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

k-elementige Teilmengen. Nach Lemma 4.17, Teil (3), ergibt diese Summe gerade

$$\binom{n+1}{k},$$

was den Beweis des Induktionsschrittes abschließt.

Aus (A) und (S) folgt dann die Gültigkeit von (ii) mittels vollständiger Induktion.

Aus der Schule kennen Sie die **binomische Formel**

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Unser nächstes Ziel ist eine Verallgemeinerung dieser Formel auf höhere Potenzen. Um dies handlich aufschreiben zu können, führen wir etwas neue Notation ein.

Definition 4.19. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Das griechische Σ (Sigma) steht dabei für „Summe“. Sprechweise: Die Summe über alle a_k von $k = 0$ bis $k = n$.

Natürlich kann man auch bei $k = 1$ oder $k = 2$ anfangen zu zählen,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \text{usw.}$$

Beispielsweise ist $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n$. Wir können daher das Resultat von Proposition 4.14 auch kurz schreiben als

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Quiz: Was sind $\sum_{k=1}^{n} 1$ und $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$?

Satz 4.20 (Binomischer Lehrsatz). *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ausgeschrieben lautet die Formel also

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks können wir die hier auftretenden Binomialkoeffizienten schnell auswerten. Unter Verwendung von $x^0 = 1$ und $x^1 = x$ erhält man z.B.

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x + y \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.
\end{aligned}$$

Beweis des binomischen Lehrsatzes. Auch dies könnten wir mit Induktion beweisen und sie sollten einmal die Literatur nach einem solchen Beweis durchforsten und ihn sich ansehen.

Unser Beweis stützt sich stattdessen auf die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten. Es ist nämlich

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{\text{1.Klammer}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{2.Klammer}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{n.Klammer}}.$$

Multiplizieren Sie dieses Produkt aus, erhält man eine Summe von Termen mit jeweils n Faktoren x oder y. Jeder dieser Terme entsteht, indem man in jeder Klammer $(x+y)$ entweder x oder y wählt. Ein Term der Form

$$x^{n-k}y^k$$

entsteht dabei, wenn man von den n Klammern genau k auswählt, wo man y nimmt. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Nun, wir wählen von den n Klammern genau k aus, d.h. die gesuchte Anzahl entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$, wovon es $\binom{n}{k}$ gibt.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren wichtigen Formel.

Satz 4.21 (Geometrische Summenformel)**.** *Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,,\ldots\}$, dass*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Auf der linken Seite steht also $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

Beweis. Einen Induktionsbeweis dieser Formel durchzuführen ist eine Übungsaufgabe. Alternativ könnte man auch so argumentieren:

$$\begin{aligned}\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\right) \cdot (1-x) = 1 &+ x + x^2 + \ldots + x^n \\ &- x - x^2 - \ldots - x^n - x^{n+1}.\end{aligned}$$

Und bei dieser Differenz bleibt gerade $1 - x^{n+1}$ übrig.

Beispiel. Für den Fall $x = \frac{1}{10}$ und $n = 100$ sagt der Satz zum Beispiel, dass

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^{100}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{101}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}.$$

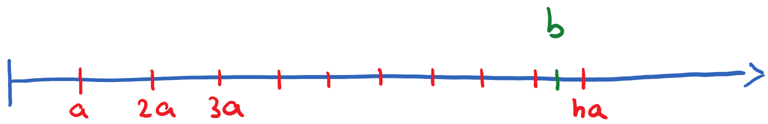
Quiz: Was hat dies mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte zu tun? —Ende Vorlesung 12—

4.4. Das Archimedische Axiom und die Konvergenz von Folgen

Um in diesem Kapitel über die Konvergenz von Folgen sprechen zu können, müssen wir den reellen Zahlen zunächst ein weiteres (provisorisches) Axiom hinzuzufügen.

4.4.1. Das Archimedische Axiom

Archimedes hatte im Rahmen der Geometrie folgende Beobachtung formuliert: Hat man zwei Strecken a, b auf einer Geraden, so kann man, wenn man die kleinere von beiden nur genügend oft abträgt, die größere übertreffen.



Ein analoges Axiom wollen wir von nun an für die reellen Zahlen fordern.

Axiom 4.22 (Axiom von Archimedes)**.** Zu je zwei reellen Zahlen $a, b > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.

BEACHTE. Das Archimedische Axiom hat für uns vorerst nur einen provisorischen Charakter, denn wir werden es später durch das stärkere Vollständigkeitsaxiom ersetzen, welches das Archimedische Axiom implizieren wird.

Schauen wir uns eine erste interessante Konsequenz aus diesem Axiom an.

Satz 4.23 (Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen Zahlen)**.** *Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.*

Mit anderen Worten: Jedes Intervall $(x, y) \neq \emptyset$ enthält eine rationale Zahl.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $0 < x < y$. Gesucht sind natürliche Zahlen m, n mit $x < \frac{m}{n} < y$, d.h. $nx < m < ny$. Wir unterteilen in zwei Schritte:

(i) Da $y - x > 0$, finden wir mit Hilfe des Archimedischen Axioms (mit $a = y - x, b = 1$) ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n(y - x) > 1$, d.h. $ny > 1 + nx$.

(ii) Ebenfalls aus dem Archimedischen Axiom (mit $a = 1, b = nx$) folgt, dass ein $p \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $p = p \cdot 1 > nx$. Es sei nun $m \in \mathbb{N}$ die kleinste unter allen Zahlen p mit dieser Eigenschaft, d.h. $m > nx$ aber $m - 1 \leq nx$ (hier benutzen wir, dass jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt).

Dann folgt aus (i) und (ii), dass $nx < m \leq 1 + nx < ny$. Dies wollten wir zeigen.

BEACHTE. Da neben $\mathbb{R}$ auch $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper ist, der das Archimedische Axiom erfüllt, können wir die Existenz von $\sqrt{2}$ aus den bisherigen Axiomen noch nicht beweisen (denn sonst müsste auch $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gelten). Hierzu benötigen wir noch ein weiteres Axiom, nämlich das Vollständigkeitsaxiom. Dies betrachten wir etwas später.

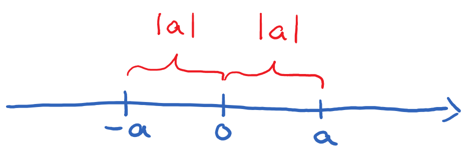
Bevor wir uns mit Folgen reeller Zahlen und dem zugehörigen Konvergenzbegriff beschäftigen können, müssen wir noch kurz die Betragsfunktion diskutieren.

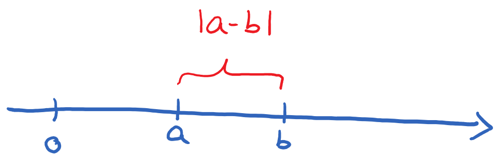
Definition 4.24. (i) Für die Zahl $a \in \mathbb{R}$ definieren wir ihren **(Absolut-)Betrag** durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

(ii) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so nennen wir $|a-b|$ den **Abstand** von a und b

Beispielsweise ist $|1| = |-1| = 1$ und $|4-(-1)| = |5| = 5$. Stellen wir uns die reellen Zahlen wieder als Zahlengerade vor, so gibt $|a|$ tatsächlich gerade den Abstand von a zum Ursprung an, und $|a-b|$ beschreibt den Abstand der Punkte a und b auf der Zahlengeraden.





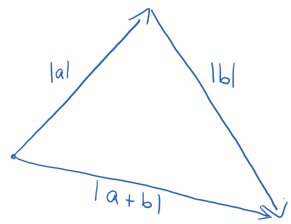
Satz 4.25 (Rechenregeln für den Betrag)**.** *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|a| \geq 0$.

(ii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(iii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. *Insbesondere gilt* $|-a| = |a|$ *und* $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, *falls* $b \neq 0$.

(iv) ***Dreiecksungleichung:*** $|a+b| \leq |a| + |b|$



Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^2$.

Der Name Dreiecksungleichung kommt von der entsprechenden Ungleichung für Vektoren im $\mathbb{R}^n$, für die die Ungleichung auch gültig ist.

Teilbeweis des Satzes. Alle Punkte sind leicht zu beweisen. Wir beweisen exemplarisch die Dreiecksungleichung.

(iv) Es gilt $a \le |a|$. Dies ist klar für $a \ge 0$ und folgt für $a < 0$ aus $|a| = -a > 0$. Da man Ungleichungen addieren darf, folgt also aus $a \le |a|, b \le |b|$, dass

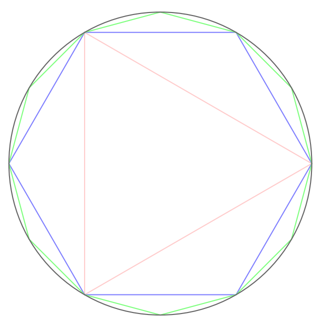
$$a + b \le |a| + |b|.$$

Ebenso ist $-a \le |a|, -b \le |b|$, d.h.

$$-(a + b) = -a + (-b) \le |a| + |b|.$$

Da in jedem Fall $|a + b|$ mit $a+b$ oder $-(a+b)$ übereinstimmt, folgt $|a+b| \le |a|+|b|$.

4.4.2. Folgen reeller Zahlen



Wir haben im ersten Kapitel schon davon gehört, dass Archimedes die Kreisfläche näherungsweise mittels Approximation durch regelmäßige n-Ecke berechnen konnte: Bezeichnet A_n den Flächeninhalt eines im Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, so kann man elementargeometrisch eine Rekursionsformel herleiten, mit der man A_{2n} mittels A_n berechnen kann. Beginnt man etwa bei $n = 6$, so erhält man

$$A_6 = 2.5981, A_{12} = 3.0000, A_{24} = 3.1058, A_{48} = 3.1326, A_{96} = 3.1394, A_{192} = 3.1410, \ldots.$$

Diese Folge von Zahlen nähert sich recht schnell dem Flächeninhalt π des Einheitskreises. Archimedes selbst konnte auf diese Weise die Schranken

$$3.14085 \approx 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \approx 3.14286$$

herleiten, also π auf zwei Nachkommastellen genau bestimmen.

Sie sehen an diesem Beispiel schon, dass Zahlenfolgen und die Frage, ob eine solche Folge konvergiert (und wenn ja, gegen welchen Wert) eine sehr wichtige Rolle in der Analysis spielen. Wir wollen daher zunächst noch einmal explizit wiederholen, was wir unter einer solchen Folge verstehen.

Definition 4.26. Jede Abbildung von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt eine **Folge**. Für eine solche Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir auch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ oder } (a_1, a_2, \ldots) \text{ oder kurz } (a_n),$$

wobei $a_n := a(n)$ das n-te Glied der Folge genannt wird.

Natürlich darf auch jeder andere Buchstabe als Folgenindex verwendet werden:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots).$$

BEACHTE. Man kann den Folgenbegriff noch etwas verallgemeinern, indem man für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ auch jede Abbildung von $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ als Folge bezeichnet, für die dann entsprechend

$$(a_n)_{n=n_0}^{\infty} \text{ oder } (a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots)$$

geschrieben wird.

Betrachten wir einige Beispiele:

- $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, $\quad (\frac{n}{n+1})_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$.
- Für $a \in \mathbb{R}$:

  $(a)_{n=1}^{\infty} = (a, a, a, \ldots)$ (eine konstante Folge),

  $(a^n)_{n=0}^{\infty} = (1, a, a^2, a^3, \ldots)$.

- $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ oder $((-1)^n)_{n=0}^{\infty} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

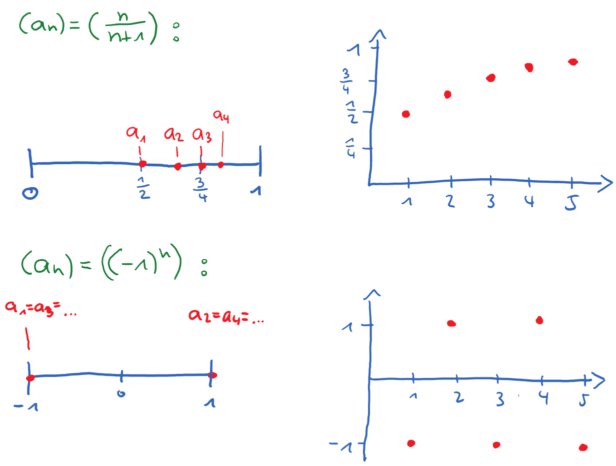
- Folgen können auch **rekursiv** definiert werden, zum Beispiel die **Fibonacci-Folge:**[2]

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

  also

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

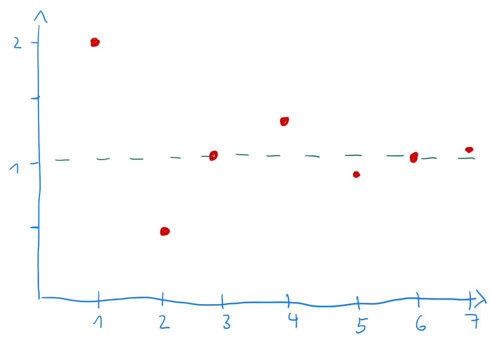
Um eine Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zu veranschaulichen, können wir ihren Wertebereich skizzieren (Ergebnis ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$) oder ihren Graphen zeichnen (Ergebnis ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$).



Wir wollen uns nun dem Thema „Konvergenz von Folgen“ widmen. Schauen wir uns dazu einmal die folgende etwas merkwürdige Folge an:

$$a_n := \begin{cases} \frac{n+1}{n} & , n = 1, 4, 7, 10, \ldots \\ \frac{n-1}{n} & , n = 2, 5, 8, 11, \ldots \\ 1 & , n = 3, 6, 9, 12, \ldots \end{cases}$$

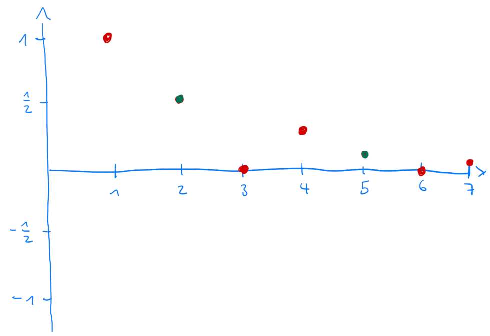
Also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 1/2, 1, 5/4, 4/5, 1, \ldots)$.



[2] Leonardo da Pisa (Fibonacci genannt), 1170 - 1240.

Aus der Zeichnung sehen wir, dass sich die Folgenglieder der Zahl 1 auf eine gewisse Art immer mehr annähern. Aber was bedeutet hier eigentlich „annähern“?

- Es bedeutet **nicht**, dass die Folgenglieder monoton von oben oder unten gegen die 1 „streben“ (denn z.B. ist $a_5 < 1 < a_7$).
- Es bedeutet auch **nicht**, dass der Abstand der Folgenglieder zur 1 immer kleiner wird. Denn der Abstand von a_n zur 1 wird gerade durch $|a_n - 1|$ beschrieben und der Graph der Folge $(|a_n - 1|)_{n\in\mathbb{N}}$ sieht so aus:



- Die letzte Zeichnung führt uns allerdings auf den richtigen Weg, denn sie zeigt etwas anderes wichtiges. Es gilt z.B.
  - $|a_n - 1| \leq 1/2$ für alle $n \geq 2$,
  - $|a_n - 1| \leq 1/3$ für alle $n \geq 3$,
  - $|a_n - 1| \leq 1/4$ für alle $n \geq 3$,
  - $|a_n - 1| \leq 1/5$ für alle $n \geq 5$, usw.

  Es sieht so aus, als könnte man für jeden vorgegebenen Abstand (wie z.B. $1/2, 1/3, \ldots$) einen gewissen Folgenindex finden, ab dem die Folgenglieder diesen Abstand zum Grenzwert nicht mehr überschreiten. Es ist genau diese Eigenschaft, die das Annähern an den Grenzwert 1 gut charakterisiert.

—Ende Vorlesung 13—

Wir halten also allgemeiner fest:

> Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert a soll bedeuten, dass zu **jedem** vorgegebenen (noch so kleinen) Abstand $\varepsilon > 0$ ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren soll, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder einen Abstand von höchstens ε zu a besitzen, d.h. für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Nach all diesen Vorbemerkungen kommen wir nun zu unserer formalen Definition der Folgenkonvergenz.

Definition 4.27. Es sei (a_n) eine Folge. Wir nennen diese

(i) **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

In diesem Fall schreiben wir

$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und nennen a **Grenzwert** der Folge (a_n),

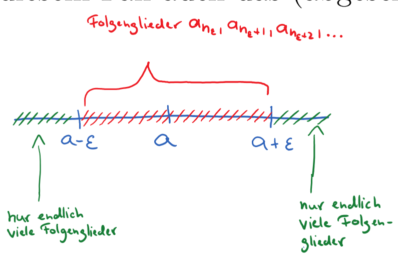
(ii) **konvergent**, falls sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert,

(iii) **divergent**, falls sie nicht konvergent ist.

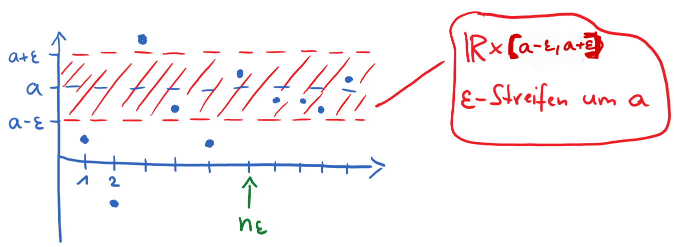
Wir wollen die Bedeutung von (4.1) noch einmal wiederholen: für **jeden** (noch so kleinen) vorgegebenen Abstand $\varepsilon > 0$ muss ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren (der von ε abhängen darf), so dass die Folgenglieder $a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, \ldots$ höchstens den Abstand ε zu a besitzen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Folgenglieder $a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, \ldots$ alle im Interval $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ liegen, d.h.

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon.$$

Man nennt dieses Intervall in diesem Fall auch das (abgeschlossene) **ε-Intervall** um a.



Wir können die Konvergenz von (a_n) gegen a auch mit Hilfe des Graphen der Folge untersuchen: (a_n) konvergiert gegen a, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ die Paare (n, a_n) im **ε-Streifen** $\mathbb{R} \times [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ liegen.



Nun sollten wir endlich ein paar von unseren obigen Beispielen mit Hilfe dieses Konvergenzbegriffs untersuchen:

- Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} := (c)_{n=1}^{\infty} = (c, c, c, \ldots)$ konvergiert gegen c, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Dieses Resultat ist natürlich offensichtlich. Trotzdem wollen wir einmal ganz genau nachprüfen, ob die Konvergenzdefinition hier erfüllt ist: Sei also ein beliebiger Abstand $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir suchen ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - c| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Was ist in diesem Fall $a_n - c$? Nun, es gilt

  $$a_n - c = c - c = 0 \text{ und damit auch } |a_n - c| = 0$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können also zum Beispiel $n_\varepsilon = 1$ wählen, und es folgt die gewünschte Abschätzung:

  $$\forall n \geq 1: \quad |a_n - c| \leq \varepsilon.$$

  In diesem Fall kann man also sogar für jedes $\varepsilon > 0$ das gleiche $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wählen.

- Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} := (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Auch diese Aussage müssen wir beweisen: Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Gesucht ist ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$:

  $$|a_n - 0| \leq \varepsilon.$$

  Da in diesem Fall $|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$, soll also für alle $n \geq n_\varepsilon$ gelten, dass

  $$\frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad n \cdot \varepsilon \geq 1.$$

  Wie finden wir so ein n_ε? Antwort: Wir benutzen das Archimedische Axiom (mit $a = \varepsilon$ und $b = 1$). Nach diesem existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $n_\varepsilon \cdot \varepsilon > 1$. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann erst recht

  $$n \cdot \varepsilon \geq n_\varepsilon \cdot \varepsilon > 1,$$

  d.h. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

  > **BEACHTE.** An dieser Stelle sehen wir nun, warum wir das Archimedische Axiom einführen mussten. Ohne dieses hätten wir die Konvergenz $1/n \to 0$ für $n \to \infty$ nicht zeigen können.

- Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} := (1 + \frac{(-1)^n}{n})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen 1, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$: Denn hier gilt

  $$|a_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

  und wir haben zuvor gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $1/n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

- Nicht jeder Folge kann man unmittelbar ansehen, ob sie konvergiert. Ist zum Beispiel die rekursiv definierte Folge

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

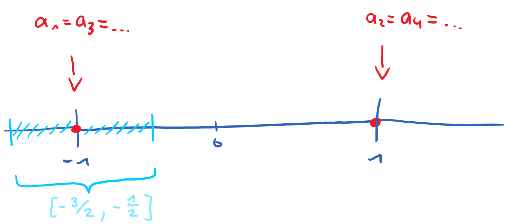
konvergent? Auch deswegen ist es wichtig, mit so einer präzisen Definition der Konvergenz zu arbeiten, wie wir sie oben gegeben haben.

- Die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty = ((-1)^n)_{n=1}^\infty$ divergiert. Hierzu müssen wir zeigen, dass die Folge gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Mit Quantoren ausgedrückt bedeutet dies:

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \exists n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| > \varepsilon.$$

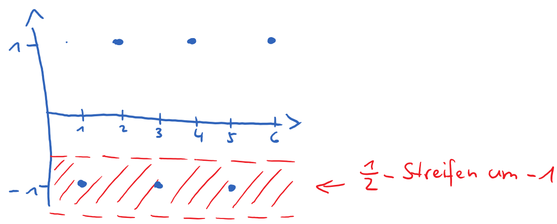
Anders ausgedrückt: Die Folge (a_n) divergiert, falls für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein ε-Intervall $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ existiert, das unendlich viele Folgenglieder **nicht** enthält.

Für unsere Folge enthält etwa für jedes $a \in \mathbb{R}$ das Intervall $[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$ immer unendlich viele Folgenglieder nicht, da $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



Außerhalb von $[-3/2, -\frac{1}{2}]$ liegen die Glieder $a_2, a_4, a_6, \ldots$

Allgemein gilt: $\forall a \in \mathbb{R}$ liegen außerhalb von $[a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}]$ unendlich viele Folgenglieder.



Außerhalb von jedem $\frac{1}{2}$- Streifen liegen unendlich viele Folgenglieder.

Machen Sie sich klar, dass die Reihenfolge und Art der Quantoren in der Definition der Folgenkonvergenz extrem wichtig ist. **Quiz:** Was bedeuten die folgenden Aussagen?

- $\exists \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall \varepsilon > 0 \; \forall n \geq n_0 : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$ —Ende Vorlesung 14—

Andere Details sind nicht ganz so wichtig, zum Beispiel würde es auch genügen zu zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \leq 2\varepsilon.$$

Allgemein gilt die folgende Charakterisierung.

Lemma 4.28. *Sei $R > 0$. Dann sind für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a \in \mathbb{R}$ äquivalent:*

i. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

ii. *Es gilt:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \leq R \cdot \varepsilon.$$

Die ursprüngliche Konvergenzdefinition ist gerade der Fall $R = 1$.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $R \geq 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Aber wegen $R \geq 1$ gilt $\varepsilon \leq R \cdot \varepsilon$, d.h.

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq R \cdot \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass auch (ii) gilt.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Nun gelte (ii), d.h.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \leq R \cdot \varepsilon.$$

Es ist sinnvoll, die Variable ε hier einmal durch eine andere, sagen wir ε' zu ersetzen. Dies ändert natürlich nichts an der Aussage. Es gelte also

$$\forall\varepsilon' > 0\ \exists n_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_{\varepsilon'} : |a_n - a| \leq R \cdot \varepsilon'.$$

Nun ist die Variable ε wieder frei und wir können mit ihr arbeiten. Wir wählen $\varepsilon > 0$ und beliebig. Dann setzen wir $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{R}$ und erhalten aus der Annahme (ii) ein $n_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_{\varepsilon'} : \quad |a_n - a| \leq R \cdot \varepsilon'.$$

Aber es gilt $R \cdot \varepsilon' = R \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$, d.h.

$$\forall n \geq n_{\varepsilon'} : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Wählen wir nun also noch $n_\varepsilon := n_{\varepsilon'}$, so folgt: Zu dem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ haben wir ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gefunden, so dass

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Insgesamt wurde also gezeigt, dass

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon,$$

aber dies ist gerade die Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Bevor wir uns mit weiteren Beispielen beschäftigen, wollen wir eine wichtige Eigenschaft von konvergenten Folgen festhalten.

Definition 4.29. Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls ein $S \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq S.$$

In diesem Fall heißt S eine **obere Schranke** der Folge. Analog heißt eine Folge **nach unten beschränkt**, falls $s \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$s \leq a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier heißt s eine **untere Schranke** der Folge. Ist die Folge nach oben und nach unten beschränkt, so heißt sie **beschränkt**.

Quiz: Geben Sie obere und untere Schranken für die Folgen $(1/n), ((n+1)/n)$ und $((-1)^n)$ an. Geben Sie Beispiele unbeschränkter Folgen an.

Lemma 4.30. *Es sind äquivalent:*

i. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ist beschränkt.*

ii. Es existiert $M \geq 0$*, so dass* $|a_n| \leq M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Beweis. Dies ist eine Übungsaufgabe.

Satz 4.31. *Jede konvergente Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ist* ***beschränkt****.*

Quiz: Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist jede beschränkte Folge konvergent?
Antwort: Nein! Z.B. ist die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt, denn es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq a_n \leq 1,$$

aber die Folge ist nicht konvergent!

BEACHTE. Die Beschränktheit einer Folge ist notwendig, aber nicht hinreichend für deren Konvergenz.

Beweis des Satzes. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Daraus folgt insbesondere mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Weiter setzen wir

$$m := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_\varepsilon - 1}|).$$

Dann gilt also $|a_n| \leq 1 + |a|$ falls $n \geq n_\varepsilon$ und $|a_n| \leq m$ falls $1 \leq n \leq n_\varepsilon - 1$. Setzen wir also

$$M := \max(1 + |a|, m),$$

so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|a_n| \leq M$, d.h. die Folge (a_n) ist beschränkt.

Hier ist ein erstes Beispiel zur Anwendung des vorherigen Satzes.

Beispiel. Die Fibonacci-Folge $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ divergiert, da sie nicht beschränkt ist.

Wie wir bei den obigen Beispielen gesehen haben, kann es sehr mühsam sein, die Konvergenz einer Folge mit Hilfe der $(\varepsilon - n_\varepsilon)$-Definition zu überprüfen. Glücklicherweise hat man es oft mit Folgen zu tun, die sich aus Summen, Differenzen, Produkten oder Quotienten schon bekannter Folgen zusammensetzen. In diesem Fall können die folgenden Rechenregeln uns das Leben sehr erleichtern.

Satz 4.32 (Summen, Produkte und Quotienten konvergenter Folgen)**.** *Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

(i) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

(ii) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

(iii) Ist $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n, so ist die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Quiz: Folgt aus $b_n \neq 0$ automatisch, dass $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, falls die Folge konvergiert?

Schauen wir uns zur Verdeutlichung des Satzes zunächst ein Beispiel an. Weitere folgen dann in der Übung.

- Wir betrachten die Folge
$$\left(\frac{3n^2 + 13n}{4n^2 + 5}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Hier handelt es sich um einen Quotienten der Folgen $(a_n) = (3n^2 + 13n)$ und $(b_n) = (4n^2 + 5)$. Da diese Folgen nicht konvergieren (sie sind nicht beschränkt), müssen wir zunächst einen kleinen Trick anwenden, um die Quotientenregel des vorherigen Satzes nutzbar zu machen. Wir schreiben

$$\frac{3n^2 + 13n}{4n^2 + 5} = \frac{n^2(3 + \frac{13}{n})}{n^2(4 + \frac{5}{n^2})} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{4 + \frac{5}{n^2}}.$$

Schauen wir uns nun die Folgen im Zähler und Nenner an: Zunächst folgt mit (ii) (angewandt auf die Folgen $a_n = b_n = \frac{1}{n}$) und mit $\lim \frac{1}{n} = 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Dann folgt erneut mit (ii) (angewandt auf die konstante Folge $a_n = 5$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5 \cdot 0 = 0$$

und somit schließlich aus (i), dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{5}{n^2}\right) = 4 + 0 = 4.$$

Analog sieht man, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{13}{n}\right) = 3,$$

so dass man am Ende Teil (iii) verwenden darf und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 13n}{4n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{13}{n}}{4 + \frac{5}{n^2}} = \frac{3}{4}$$

erhält.

Teilbeweis von Satz 4.32. Wir beweisen nur Teil (i). Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen $a_n \to a$ für $n \to \infty$ existiert dann ein $n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_\varepsilon^{(1)} : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

und wegen $b_n \to b$ für $n \to \infty$ existiert $n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_\varepsilon^{(2)} : \quad |b_n - b| \leq \epsilon.$$

Setzen wir $n_\varepsilon := \max(n_\varepsilon^{(1)}, n_\varepsilon^{(2)})$, so folgt

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \wedge \quad |b_n - b| \leq \varepsilon.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann für alle $n \geq n_\varepsilon$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Aus Lemma 4.28 folgt dann $a_n + b_n \to a + b$ für $n \to \infty$.

Bisher haben wir noch gar nicht ausgeschlossen, dass eine Folge zwei Grenzwerte besitzen kann. Dies wollen wir jetzt schnell nachholen.

Satz 4.33 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Konvergiert die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ gegen a und gegen b, so ist $a = b$.*

Beweis. Es gilt $0 = a_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. einerseits gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_n) = 0.$$

Andererseits folgt aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit den Folgenrechenregeln auch

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_n) = a - b.$$

Also folgt $a - b = 0$ bzw. $a = b$.

--Ende Vorlesung 15--

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel im Umgang mit Folgen ist die folgende Proposition.

Proposition 4.34. *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen.*

(i) ***Monotonie der Grenzwertbildung:*** *Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) ***Sandwichprinzip:*** *Ist $\lim a_n = \lim b_n$ und ist (c_n) eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch (c_n) konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Quiz: Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, falls $a_n < b_n$ für alle n?

Beweis. (i) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $a > b$ gilt. Zu $\varepsilon := \frac{a-b}{4} > 0$ existieren dann $n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$ und $n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_\varepsilon^{(1)}: \quad a - \varepsilon \overset{(1)}{\leq} a_n \leq a + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \forall n \geq n_\varepsilon^{(2)}: \quad b - \varepsilon \leq b_n \overset{(2)}{\leq} b + \varepsilon.$$

Hier benutzen wir, dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ genau dann, wenn $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$. Für alle $n \geq \max(n_\varepsilon^{(1)}, n_\varepsilon^{(2)})$ folgt dann

$$b_n \overset{(2)}{\leq} b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{4} = \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a = a - \frac{3}{4}(a-b) < a - \frac{a-b}{4} = a - \varepsilon \overset{(1)}{\leq} a_n,$$

d.h. für jene n ist $b_n < a_n$. Aber dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_n \leq b_n$ für alle n, d.h. unsere Annahme $a > b$ war falsch und es gilt $a \leq b$.
(ii) Dies ist eine Übungsaufgabe.

Wir wenden das Sandwichprinzip sogleich an, um das Konvergenzverhalten der Folge $(c^n)_{n=1}^\infty$ zu untersuchen.

Beispiel 4.35. Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $|c| < 1$ (d.h. $-1 < c < 1$). Wir beweisen, dass

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0.$$

Um dies zu zeigen setzen wir $b := 1/|c| > 1$ und schreiben $b = 1 + x$ mit $x := b - 1 > 0$. Aus der Bernoulli-Ungleichung (siehe Übungsblatt 6) folgt, dass $b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert

$$0 < \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

d.h. aus dem Sandwichprinzip folgt wegen $\frac{1}{nx} \to 0$ für $n \to \infty$, dass $\lim \frac{1}{b^n} = \lim |c|^n = 0$. Wegen $|c|^n = |c^n| = |c^n - 0|$ gilt also

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |c^n - 0| \leq \epsilon,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

Im Falle $c > 1$ strebt die Folge (c^n) in einem exakten Sinne gegen unendlich. Um dies genau zu beschreiben, führen wir einen Begriff ein.

Definition 4.36. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls Folgendes gilt:

$$\forall\, R > 0\ \exists n_R \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_R :\ a_n \geq R.$$

Entsprechend schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$ gilt.
Liegt einer dieser Fälle vor, so heißt die Folge (a_n) **bestimmt divergent** (gegen ∞ bzw. $-\infty$)

BEACHTE. Bestimmte Divergenz (gegen ∞) bedeutet also, dass **jede** Zahl $R > 0$ von der Folge irgendwann für immer (für alle $n \geq n_R$) überschritten wird.

Aus dem Archimedischen Axiom folgt etwa sofort, dass $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Um weitere Folgen als bestimmt divergent zu kennzeichnen, ist folgendes Resultat hilfreich.

Proposition 4.37. *Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

Beweis. Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n| \leq \varepsilon.$$

Nun sei $R > 0$ beliebig. Wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{R}$ und $n_R := n_\varepsilon$, so folgt für alle $n \geq n_R$, dass

$$\forall n \geq n_R : \quad a_n = |a_n| \leq \frac{1}{R},$$

also

$$\forall n \geq n_R : \quad \frac{1}{a_n} \geq R.$$

Dies zeigt $\frac{1}{a_n} \to \infty$ für $n \to \infty$. Die umgekehrte Richtung zeigt man analog.

Damit folgt etwa aus dem obigen Beispiel 4.35, dass $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$, falls $c > 1$ (denn dann ist $\frac{1}{c} < 1$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^n = 0$).

Quiz: Ist die Folge (c^n) im Falle $c < -1$ (bestimmt) konvergent?

Wir werden später noch einmal auf Folgen zurückkommen, müssen nun aber endlich unser letztes Axiom für die reellen Zahlen besprechen.

4.5. Das Vollständigkeitsaxiom

In diesem Abschnitt wollen wir das letzte Axiom für die reellen Zahlen aufstellen, das sogenannte Vollständigkeitsaxiom. Erst dieses Axiom wird für die Lückenfreiheit von $\mathbb{R}$ sorgen und die reellen Zahlen somit von den rationalen Zahlen unterscheiden.

Um das Axiom zu formulieren, benötigen wir zunächst noch einige Vorbetrachtungen. Dazu schauen wir uns die folgende Teilmenge

$$M = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$$

der reellen Zahlen an. Diese hat ein kleinstes Element, nämlich $0 = 1 - \frac{1}{1}$, aber kein größtes Element. Allerdings hat M mit der Zahl 1 eine kleinste obere Schranke, denn

- $1 - \frac{1}{n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (also ist 1 eine obere Schranke),

- für jedes $S < 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $1 - 1/N > S$ (also ist kein $S < 1$ eine obere Schranke).

Die hier vorkommenden Begriffe wollen wir nun noch einmal genau definieren.

Definition 4.38. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

- M heißt **nach oben beschränkt**, falls ein $S \in \mathbb{R}$ existiert mit:

$$\forall x \in M : \quad x \leq S.$$

  Solch ein S nennen wir eine **obere Schranke** von M. Genauso heißt $s \in \mathbb{R}$ eine **untere Schranke** von M und M **nach unten beschränkt**, falls

$$\forall x \in M : \quad s \leq x.$$

- Ist M nach oben und nach unten beschränkt, so heißt M **beschränkt**.
- Besitzt M eine kleinste obere Schranke S_0, so nennen wir diese ein **Supremum** von M. Dann gilt also

1. S_0 ist eine obere Schranke von M.
2. Ist S eine beliebige obere Schranke von M, so gilt $S_0 \leq S$.

- Analog heißt eine größte untere Schranke von M (falls existent) ein **Infimum** von M.

BEACHTE. M besitzt höchstens ein Supremum bzw. Infimum (Warum?). Wir bezeichnen dieses mit $\sup M$ bzw. $\inf M$. Gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so nennen wir es das **Maximum** $\max M$ bzw. das **Minimum** $\min M$ von M.

- Für unser Ausgangsbeispiel $M = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ gilt etwa $\inf M = \min M = 0$ und $\sup M = 1$. Ein Maximum existiert nicht.

- Für das Intervall $M = (0, \infty)$ gilt $\inf M = 0$. Ein Minimum existiert nicht. Da das Intervall nicht nach oben beschränkt ist, existiert auch kein Supremum (erst recht kein Maximum).

—Ende Vorlesung 16—

Unser Gefühl sagt uns, dass jede nach oben beschränkte Menge immer ein Supremum besitzen sollte. In der Tat, hat man erst einmal eine obere Schranke gefunden, so lässt man sie einfach auf der Zahlengeraden so lange nach links wandern, bis man die Ausgangsmenge 'berührt'. Da wir uns die Zahlengerade als kontinuierlich und ohne Lücken vorstellen, sollte der Berührpunkt dann das gesuchte Supremum sein. Natürlich ist dies kein strenger mathematischer Beweis. Dazu müsste man zeigen, dass die Existenz von

Suprema streng logisch aus den bisherigen Axiomen für die reellen Zahlen abgeleitet werden kann. Und tatsächlich kann man das nicht! Dies werden wir später wie folgt sehen: Der angeordnete Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt bislang die selben Axiome wie die reellen Zahlen (auch das Archimedische Axiom gilt in $\mathbb{Q}$). Allerdings ist die Menge

$$M_2 := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

im angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ zwar nach oben beschränkt (z.B. ist $2 \in \mathbb{Q}$ eine obere Schranke), besitzt aber in $\mathbb{Q}$ kein Supremum, d.h. die Menge

$$\{S \in \mathbb{Q} : S \text{ ist obere Schranke von } M_2\}$$

besitzt in $\mathbb{Q}$ kein kleinstes Element.

Wir werden also folgendes Axiom zu unserer Axiomenliste für die reellen Zahlen hinzufügen müssen.

Axiom 4.39 (Vollständigkeitsaxiom)**.** Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Zwei kurze Bemerkungen hierzu sind angebracht.

- Für die leere Menge $\emptyset$ ist jede reelle Zahl s eine obere Schranke (denn welches Element der leeren Menge sollte größer als s sein?). D.h. die leere Menge hat keine kleinste obere Schranke.
- Äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom ist, dass jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum besitzt (denn ist M nach unten beschränkt, so ist $-M := \{-m : m \in M\}$ nach oben beschränkt und $\inf(M) = -\sup(-M)$).

Mit dem Vollständigkeitsaxiom wird das archimedische Axiom nun zu einem Satz.

Satz 4.40. *Zu je zwei reellen Zahlen $a, b > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.*

Beweis. Nehmen wir an, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \cdot a \leq b$. Dann ist die Menge

$$M = \{n \cdot a \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$$

nach oben beschränkt. Sei $s := \sup(M)$. Da $s - a$ dann keine obere Schranke von M ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N \cdot a > s - a$, d.h. $(N+1) \cdot a > s$. Da $(N+1) \cdot a \in M$ und s eine obere Schranke von M ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Mit diesem Satz können wir nun unsere Axiome für die reellen Zahlen noch einmal zusammenfassen.

Axiome der reellen Zahlen. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein angeordneter Körper, in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Wir werden eine ganze Reihe von sehr nützlichen Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom ableiten. So liefert es uns etwa sofort die bis hierhin noch offene Existenz von Quadratwurzeln.

Satz 4.41. *Sei $a \geq 0$. Dann existiert genau eine reelle Zahl $s \geq 0$ mit der Eigenschaft $s^2 = a$. Wir bezeichnen sie mit $s = \sqrt{a}$ und nennen sie die* ***Wurzel*** *von a.*

***VORSICHT*.** Für $a > 0$ ist mit $\sqrt{a}$ immer die positive Wurzel von a gemeint. Die Gleichung $s^2 = a$ hat jedoch für $a > 0$ genau zwei Lösungen, nämlich $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$. Beweis:

$$s^2 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s - \sqrt{a})(s + \sqrt{a}) = 0.$$

Beweis von Satz 4.41. Für $a = 0$ ist $s = 0$ eine Lösung. Da $s^2 > 0$, falls $s \neq 0$ (Satz 4.7), ist es auch die einzige Lösung. Im Folgenden betrachten wir nun den Fall $a > 0$.

1. **Eindeutigkeit**: Seien $s, t \geq 0$ Zahlen mit der Eigenschaft $s^2 = t^2 = a$. Dann gilt

$$0 = a - a = s^2 - t^2 = (s - t)(s + t).$$

Da $s + t > 0$ ist, muss $s - t = 0$, d.h. $s = t$ gelten.

2. **Existenz**: Wir betrachten exemplarisch nur den Fall $a = 2$, beweisen also die Existenz von $\sqrt{2}$, d.h. von einer Zahl $s > 0$ mit $s^2 = 2$. Sei dazu

$$M_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}.$$

Dann ist 2 eine obere Schranke von M_2, denn für $x > 2$ gilt $x^2 > 4$, d.h. für alle $x \in M_2$ muss $x \leq 2$ gelten. Sei nun

$$s := \sup(M_2),$$

was nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert. Wir zeigen in drei Schritten, dass $s > 0$ gilt und $s^2 = 2$ ist.

(S1) Es ist $s > 0$: In der Tat, da $1 \in M_2$, folgt $s \geq 1 > 0$.

(S2) Es gilt $s^2 \leq 2$: Da s die kleinste obere Schranke von M ist, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $s - 1/n$ keine obere Schranke von M. Also existiert $x_n \in M$ mit $s - 1/n < x_n \leq s$. Mit dem Sandwichprinzip (Prop.4.34) folgt insbesondere, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ gilt, also mit der Produktregel auch $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = s^2$. Da $x_n \in M$ gilt ferner $x_n^2 < 2$, d.h. mit Monotonie (Prop.4.34) auch

$$s^2 = \lim_{n\to\infty} x_n^2 \leq 2.$$

(S3) Es gilt $s^2 = 2$: Falls dies falsch wäre, müsste wegen Schritt 2 gelten, dass $s^2 < 2$ ist. Da $(s+1/n)^2 \to s^2$ für $n \to \infty$, existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $(s+1/N)^2 < 2$. Da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen (Satz 4.23), existiert ferner ein $y_N \in \mathbb{Q}$, das zwischen s und $s + 1/N$ liegt, d.h.

$$0 < s < y_N < s + 1/N \quad \text{also auch} \quad y_N^2 < (s + 1/N)^2 < 2.$$

Also gilt $y_N \in M$ und $s < y_N$, im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von M ist. Unsere Annahme, dass $s^2 < 2$ ist, hat also zu einem Widerspruch geführt und muss falsch sein, d.h. $s^2 = 2$.

BEACHTE. (i) Mit einem ähnlichen Beweis wie dem obigen lässt sich auch zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, und $a \geq 0$ genau ein $s \geq 0$ mit $s^k = a$ existiert, die **k-te Wurzel** von a, $s = \sqrt[k]{a}$. Wir werden hierfür später vermutlich noch ein alternatives Argument sehen.

(ii) Der Beweis zeigt auch, dass die Menge M_2 im angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ kein Supremum $s \in \mathbb{Q}$ besitzt, da für dieses $s^2 = 2$ gelten müsste, was aber nach Satz 2.7 für rationale Zahlen nicht möglich ist. Das Vollständigkeitsaxiom ist also im angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ **nicht** erfüllt.

Nun haben wir zwar die Existenz von Quadratwurzeln gezeigt, wissen damit aber doch noch nicht, wie man sie konkret berechnen soll. Etwas später werden wir hierzu einen leicht anwendbaren Algorithmus angeben. Zuvor wollen wir allerdings über andere wichtige Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom sprechen, die mit Folgen und Reihen zu tun haben. —Ende Vorlesung 17—

5. Folgen und Reihen

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun wieder mit Folgen und deren Konvergenz beschäftigen, und anschließend einen Blick auf Reihen, d.h. unendliche Summen werfen.

5.1. Konvergenzkriterien für Folgen

Unser erstes Ziel ist die Formulierung von einigen hinreichenden Konvergenzkriterien. Wie wir sehen werden, ergeben sich diese fast unmittelbar aus dem Vollständigkeitsaxiom.

Das erste Kriterium wird sich mit monotonen Folgen beschäftigen.

Definition 5.1. Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge. Diese heißt

- **monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- **streng monoton wachsend**, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- **monoton fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- **streng monoton fallend**, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist die Folge (streng) monoton wachsend oder fallend, so nennen wir sie auch einfach **(streng) monoton**.

Schauen wir uns ein paar Beispiele an. Wir untersuchen die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit (vergleiche Definition 4.29).

- Die Folge $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend (sogar streng monoton) und beschränkt.
- Die Folge $(n)_{n=1}^{\infty}$ ist streng monoton wachsend und nach unten, nicht aber nach oben beschränkt.
- Die Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht monoton, aber beschränkt.
- **Quiz:** Gibt es eine Folge, die sowohl monoton wächst als auch monoton fällt? Oder eine, die streng monoton wächst und streng monoton fällt?

Satz 5.2. *Für jede Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *gilt:*

(1) Ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist sie konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(2) Ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist sie konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Quiz: Gilt die Umkehrung obiger Aussagen: Ist jede konvergente Folge monoton (wachsend oder fallend) und beschränkt?

Beweis von Satz 5.2. Wir beweisen nur Teil 1. Der Teil 2 folgt analog.

Dass die Folge nach oben beschränkt ist bedeutet, dass ein $S \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq S.$$

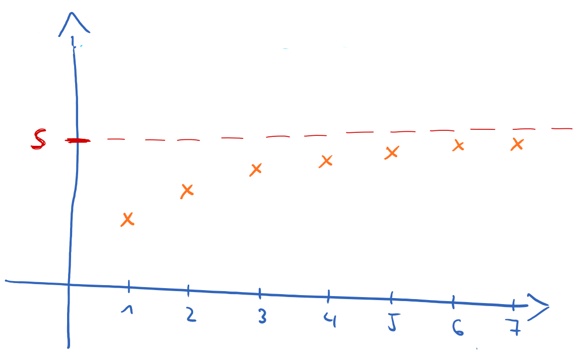
Insbesondere ist also die Menge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt, d.h. es existiert $s := \sup(M)$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von M ist, existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Da die Folge (a_n) monoton wächst und s eine obere Schranke von M ist, gilt dann insbesondere

$$s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \quad \text{und} \quad a_n \leq s$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$, d.h.

$$\forall n \geq n_\varepsilon: \quad s - \varepsilon < a_n \leq s.$$

Dies zeigt für das beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$, dass $|a_n - s| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$., d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.



Eine monoton wachsende Folge konvergiert gegen das Supremum s ihrer Bildmenge.

Als direkte Anwendung des vorherigen Satzes erhalten wir das folgende Verfahren zur Berechnung von Wurzeln.

Satz 5.3 (Heron-Verfahren[a]). *Sei $a > 0$. Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch*

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $a_0 > 0$ beliebig gewählt werden darf. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\sqrt{a} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

[a]nach Heron von Alexandria, griech. Mathematiker der Antike.

Das Heron-Verfahren konvergiert sehr schnell. Wenn Sie dies mit Ihrem Taschenrechner vergleichen, sehen Sie, dass z.B. für $a = 2$ mit Startwert $a_0 = 2$ bereits das dritte Glied der Folge (a_n) auf 2 Nachkommastellen mit $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$ übereinstimmt.

Beweis. Wir zeigen unten, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass (a_n) monoton fällt. Damit ist (a_n) nach Satz 5.2 konvergent und die Monotonie der Grenzwertbildung zeigt, dass $s := \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$ gelten muss. Dann bleibt zu zeigen, dass $s^2 = a$ gilt. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$2a_{n+1}a_n = a_n^2 + a,$$

die sich aus der Rekursionsvorschrift durch Multiplikation mit $2a_n$ ergibt. Da $a_n \to s$ und $a_{n+1} \to s$ für $n \to \infty$, können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten und erhalten so unter Verwendung der Folgenrechenregeln, dass

$$2s^2 = s^2 + a,$$

d.h. es gilt $s^2 = a$. Die noch fehlende Positivität und Monotonie von (a_n) zeigen wir nun in drei Schritten.

(S1) Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Dies beweisen wir per Induktion. Offensichtlich gilt die Aussage für $n = 0$, da $a_0 > 0$ nach Voraussetzung. Nun gelte $a_n > 0$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ (Induktionsvoraussetzung). Es ist zu zeigen, dass auch $a_{n+1} > 0$ gilt. Aber dies ist klar, denn aus der Definition von a_{n+1} folgt mit der Induktionsvoraussetzung wegen $a > 0$ auch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) > 0.$$

(S2) Es gilt $a_{n+1}^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Tatsächlich folgt direkt aus der Definition

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2a_n\frac{a}{a_n} + \frac{a^2}{a_n^2}\right) - a \\ &= \frac{(a_n^2 + 2a + \frac{a^2}{a_n^2}) - 4a}{4} = \frac{(a_n^2 - 2a + \frac{a^2}{a_n^2})}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2a_n\frac{a}{a_n} + \frac{a^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{a}{a_n}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(S3) Es gilt $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Für den Beweis benutzen wir die Definition der Folge und den zweiten Beweisschritt.

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - a\right) \overset{(S2)}{\geq} 0.$$

Was steckt hinter dem Heron-Verfahren: Die Gleichung $s^2 = a$ zu lösen bedeutet geometrisch, ein Quadrat mit Seitenlänge s und Flächeninhalt a zu konstruieren. Um dies zu tun starten wir mit einem beliebigen Rechteck mit Flächeninhalt a. Hat die eine Seite dieses Rechtecks die Länge a_0, so ergibt sich für die angrenzende Seite die Länge $b_0 = \frac{a}{a_0}$. Um dieses Rechteck einem Quadrat ähnlicher zu machen, müssen wir die Länge der längeren Seite verkleinern und die der kürzeren Seite vergrößern. Dies tun wir, indem wir statt a_0 den Mittelwert von a_0 und b_0 verwenden

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{a}{a_0}\right)$$

und dann $b_1 = \frac{a}{a_1}$ wählen. Dies führen wir nun fort, d.h.

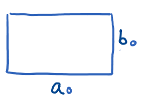
$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right), \quad b_2 = \frac{a}{a_2},$$

und so weiter.

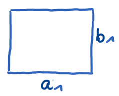
—Ende Vorlesung 18—

Heron-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{a}$

1. Schritt a_0 beliebig, $b_0 = \frac{a}{a_0}$



2. Schritt $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = \frac{a}{a_1}$



$\vdots$

Auch die Eulersche Zahl e können wir nun definieren. Dazu betrachten wir die Folge

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei wir beachten, dass $0! := 1$. Es ist also

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Da

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)!} > S_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist diese Folge streng monoton wachsend. Ist sie auch nach oben beschränkt? Ja, denn man zeigt leicht per Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{2}{2^k}$$

und damit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2^k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Aber mit der geometrischen Summenformel gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

d.h. insgesamt folgt

$$S_n \leq 2 \cdot 2 = 4$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Folge $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt, d.h. konvergent. Damit haben wir die folgende Proposition bewiesen.

Proposition 5.4. *Der Grenzwert*

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

existiert und wird die ***Eulersche Zahl***[a] *genannt.*

[a] nach Leonhard Euler (1707-1783)

Genauer gilt

$$e = 2,71828\ldots$$

und man kann zeigen, dass es sich um eine irrationale Zahl handelt.

VORSICHT. Die Irrationalität von e folgt nicht allein aus der Tatsache, dass e durch die Summation unendlich vieler rationaler Zahlen entsteht. Zum Beispiel gilt $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ **Quiz:** Warum?

Da die Eulersche Zahl eine so große Wichtigkeit in der Mathematik hat, wollen wir noch eine zweite Darstellung gewinnen.

Satz 5.5. *Es gilt*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir eine Anwendung beschreiben.

Beispiel. Nehmen wir an, eine Bank verzinst einen Betrag B mit 100 Prozent pro Jahr (eine sehr großzügige Bank). Wie viel Geld erhalten Sie nach einem Jahr? Dies hängt davon ab, wie oft im Jahr verzinst wird.

Bei einer jährlichen Verzinsung offensichtlich den Betrag $(1+1)\cdot B = 2B$. Wird jedoch unterjährig verzinst, so erhalten Sie zum Beispiel bei halbjähriger Verzinsung nach einem Jahr einen Betrag von

$$(1 + \frac{1}{2})^2 \cdot B = 2.25B$$

Wird sogar täglich verzinst, so erhalten Sie nach einem Jahr den Betrag

$$(1 + \frac{1}{365})^{365} \cdot B \approx 2.7145B.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cdot B = e \cdot B$$

entspricht demnach dem Betrag, den man bei kontinuierlicher Verzinsung erhalten würde.

Kommen wir nun zum

Beweis des Satzes. Wir setzen wie oben

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n =: e$ und zerlegen den Beweis in drei Schritte.

(S1) Es gilt $a_n \leq S_n \leq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Um dies zu zeigen, verwenden wir den binomischen Lehrsatz, der besagte

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Mit $x = 1$ und $y = \frac{1}{n}$ folgt dann

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Aber nun gilt für $1 \leq k \leq n$, dass

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{n^k} \\
&= \frac{1}{k!} \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \\
&= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \leq \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

und damit wie gewünscht

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n.$$

Dass $S_n \leq e$ gilt, folgt aus der Tatsache, dass die Folge $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend gegen e konvergiert.

(S2) Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton wachsend: Hierzu beachten wir zunächst, dass aus der Bernoulli-Ungleichung ($(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq -1$) folgt, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hiermit sehen wir dann, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1},$$

d.h. die Folge ist monoton wachsen.

(S3) Nach Schritt 1 und 2 ist die Folge (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, d.h. $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und wegen

$$a_n \leq S_n \leq e$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a := \lim_{n\to\infty} a_n \leq e$. Wenn wir zeigen können, dass auch $a \geq e$ gilt, muss folglich $a = e$ gelten und wir sind fertig. Dazu seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$. Wie in Schritt 1 gilt dann

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k},$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, da wir weniger positive Terme addieren. Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$ gilt also

$$a_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Nun schicken wir $n \to \infty$ und benutzen die Monotonie der Grenzwertbildung und die Summenregel für konvergente Folgen. Es folgt

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_n &\geq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = S_m. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass (siehe oben)

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1\right] = \frac{1}{k!}.$$

Wir haben also gezeigt, dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$a \geq S_m,$$

d.h. es folgt wieder mit der Monotonie der Grenzwertbildung, dass

$$a \geq \lim_{m\to\infty} S_m = e,$$

was den Beweis abschließt. --Ende Vorlesung 19—

Unser nächstes Ziel ist ein Konvergenzkriterium, das auch auf nicht-monotone Folgen angewandt werden kann. Dazu müssen wir allerdings ein paar Vorarbeiten leisten und zunächst über Teilfolgen sprechen.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese entsteht also, indem man die Folge

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

von links nach rechts durchläuft und gewisse Glieder für die neue Folge herausgepickt werden.

- Zum Beispiel ist $(1/n^2) = (1, 1/4, 1/9, \ldots)$ eine Teilfolge der Folge

$$(1/n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, \ldots).$$

  Hier ist $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 9, \ldots$

- **Quiz:** Nennen sie Teilfolgen der Folge $((-1)^n)$.

Mittels Teilfolgen kann man sehr schnell zeigen, dass eine Folge nicht konvergiert.

Proposition 5.6. *Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge. Dann ist auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent und konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.*

Beweis. Übung.

- Mit der vorherigen Proposition erhalten wir sofort einen neuen Beweis, dass die Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ divergiert, denn die konstanten Folgen $(1, 1, 1, \ldots)$ und $(-1, -1, -1, \ldots)$ sind Teilfolgen dieser Folge mit unterschiedlichen Grenzwerten.

Da wir wissen, dass beschränkte **monotone** Folgen konvergieren, ist das folgende Lemma sehr hilfreich.

Lemma 5.7. *Jede Folge (a_n) besitzt eine monotone (also monoton wachsende oder monoton fallende) Teilfolge.*

Beweis. Nenne einen Index $n \in \mathbb{N}$ niedrig, falls $a_n \leq a_k$ für alle $k \geq n$ (siehe Abbildung 5.1). Dann können zwei Fälle eintreten:

1. Fall: Es gibt unendlich viele niedrige Indices $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

2. Fall: Es gibt nur endlich viele oder gar keine niedrige Indices. Ist dann $N \in \mathbb{N}$ der größte niedrige Index (bzw. $N = 0$, falls keine existieren), so setze $n_1 = N + 1$. Dann existiert $n_2 > n_1$ mit $a_{n_1} > a_{n_2}$, da n_1 nicht niedrig ist. Aber auch n_2 ist nicht niedrig, d.h. es existiert $n_3 > n_2$ mit $a_{n_2} > a_{n_3}$ usw. Dies liefert eine monoton fallende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Der folgende unscheinbare Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis.

Satz 5.8 (Bolzano-Weierstraß[a]). *Jede beschränkte (d.h. nach oben und unten beschränkte) Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

[a] nach Bernard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstraß (1815-1897).

Beweis. Laut vorherigem Lemma existiert eine monotone Teilfolge von (a_n), die wegen Satz 5.2 dann konvergieren muss.

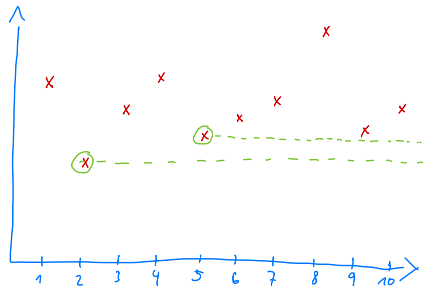


Abbildung 5.1.: *Die Indices* 2 *und* 5 *sind niedrig.*

Wir wollen den Satz von Bolzano-Weierstraß nun benutzen, um ein Kriterium anzugeben, das es erlaubt, über die Konvergenz einer nicht-monotonen Folge zu entscheiden, ohne ihren Grenzwert kennen zu müssen (für monotone Folgen haben wir so etwas schon: sie konvergieren, falls sie beschränkt sind). Dazu nennen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Cauchy-Folge**[1], falls Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Die Folgenglieder einer Cauchy-Folge rücken also beliebig nahe zusammen: alle auf a_{n_ε} folgenden Folgenglieder haben untereinander einen Abstand von höchstens ε (und das darf beliebig klein sein). Der folgende Satz verwundert also nicht allzu sehr.

Satz 5.9 (Cauchy-Kriterium)**.** *Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent:*

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund von Lemma 4.28 existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $n, m \geq n_\varepsilon$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

(2) $\Rightarrow$ (1): 1.Wir zeigen, dass (a_n) beschränkt ist: Da (a_n) nach Voraussetzung eine Cauchy-Folge ist, existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_1$ gilt, dass

[1]nach Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

$|a_n - a_m| \leq 1$, d.h. für $n \geq n_1$ gilt mit der Dreiecksungleichung $|a_n| = |a_n - a_{n_1} + a_{n_1}| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1}| \leq 1 + |a_{n_1}| =: M$. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_1-1}|, M).$$

2. Wegen 1. folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) konvergiert. Sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

3. Wir zeigen, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Zunächst existiert nach Voraussetzung ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \qquad (n, m \geq n_\varepsilon).$$

Nun wähle $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt, dass $n_k \geq n_\varepsilon$ (das geht, weil $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst und unbeschränkt ist). Dann folgt mit der Deiecksungleichung für alle $n \geq n_\varepsilon$ und alle $k \geq k_0$ (d.h. $n_k \geq n_\varepsilon$), dass

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \leq \varepsilon + |a_{n_k} - a|.$$

Schicken wir nun $k \to \infty$, so folgt aus $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, dass $|a_{n_k} - a| \to 0$, d.h. aus der Monotonie der Grenzwertbildung folgt aus der Ungleichung $|a_n - a| \leq \varepsilon + |a_{n_k} - a|$, dass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Da dies für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt, folgt die behauptete Konvergenz $a_n \to a$.

Schauen wir uns als Anwendung des Satzes das folgende Beispiel an: Sei $a_1 := 1$ und

$$a_n := 1 + \frac{1}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Es gilt also zum Beispiel $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3/2, a_4 = 5/3, \ldots$ Wir wollen zeigen, dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist, sie also konvergiert (die Folge ist nicht monoton!). Dazu zeigt man zunächst leicht per Induktion, dass $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit

$$a_n a_{n-1} = a_{n-1} + 1 \geq 2, \quad n \geq 2.$$

Es folgt für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| &= \left|1 + \frac{1}{a_n} - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_{n-1} - a_n}{a_n a_{n-1}}\right| \\
&\leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}| \\
&\leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n-1}} |a_2 - a_1| = \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

und damit schließlich für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, dass

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{m-2}} \left(1 + 2 + \ldots + 2^{m-n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{m-2}} \frac{2^{m-n} - 1}{2 - 1} \\
&= \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{m-2}}\right) \leq \frac{1}{2^{n-2}},
\end{aligned}$$

wobei wir in der drittletzten Zeile die geometrische Summenformel (Satz 4.21) verwendet haben. Geben wir uns nun $\epsilon > 0$ beliebig vor, so existiert wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/2^{n-2} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ folgt also

$$|a_m - a_n| \leq \varepsilon,$$

d.h. (a_n) ist eine Cauchy-Folge und nach dem vorherigen Satz existiert $\lim_{n\to\infty} a_n =: \varphi$. In der Übung werden Sie zeigen, dass aus der Rekursionsformel folgt, dass $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dies ist gerade der goldene Schnitt. Wir haben hier also nebenbei gezeigt, dass sich der goldene Schnitt als Kettenbruch darstellen lässt:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}$$

--Ende Vorlesung 20—

5.2. Reihen: Grundbegriffe

In diesem Abschnitt geht es um unendliche Summen, sogenannte Reihen, d.h. um die Frage, ob für eine gegebene Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ die unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

Sinn macht und, falls ja, welchen Wert sie annimt.

Definition 5.10. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ nennt man

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

deren n**-te Partialsumme**. Für die Folge dieser Partialsummen schreiben wir

$$(s_n)_{n=1}^\infty =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

und nennen sie **Reihe** mit den Gliedern a_k. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n=1}^\infty$, so bezeichnet man auch ihren Grenzwert mit $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und nennt diesen die **Summe** der Reihe.

Das Symbol $\sum_{k=1}^\infty a_k$ hat also zwei Bedeutungen:

(i) Die Folge $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$ der Partialsummen.

(ii) Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k$, falls dieser existiert.

Schauen wir uns gleich ein paar Beispiele an:

- Ist $a_k = c > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ Summanden}} = nc$$

  und die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty c$ ist somit nicht konvergent (sondern bestimmt divergent gegen ∞).

- Ist $a_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist nach Proposition 4.14

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

  Auch die Reihe $\sum_{k=1}^\infty k$ ist somit nicht konvergent (sondern bestimmt divergent gegen ∞).

- **Quiz:** Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ konvergent?
- Ist $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so zeigt die Beobachtung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

dass

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

BEACHTE. Man nennt eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ eine **Teleskopreihe**. Warum?

Natürlich kann man bei einer Reihe auch bei einem anderen Startindex anfangen zu summieren. Dann gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

für jede Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ und alle $k_0 \in \mathbb{N}$. Der Wert der beiden Reihen unterscheidet sich aber im Konvergenzfall natürlich, es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1}).$$

Die folgende Proposition enthält ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen.

Proposition 5.11. *Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $a_k \to 0$ für $k \to \infty$.*

Die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

kann also höchstens dann Sinn machen, wenn $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ gilt. Aber Vorsicht: es ist nicht garantiert, dass sie in diesem Fall Sinn macht, da es sich nur um ein notwendiges Kriterium handelt.

Beweis. Sei $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ist $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme der Reihe, so gilt nach Definition der Konvergenz sowohl $s_n \to s \quad \text{für } n \to \infty$, als auch $s_{n-1} \to s \quad \text{für } n \to \infty$. Mit Satz 4.32 folgt also

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Ist die Konvergenz $a_k \to 0$ für $k \to \infty$ auch hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$? Leider ist die Antwort Nein, wie das folgende Beispiel zeigt.

- Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
nennt man die **harmonische Reihe**. Die Partialsummen dieser Reihe wachsen sehr sehr langsam an, zum Beispiel ist
$$\sum_{k=1}^{1.000.000} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1.000.000} \approx 14,39.$$
Man könnte also versucht sein zu denken, dass die Reihe konvergiert. Aber dies ist falsch. Schauen wir uns dazu ein paar spezielle Partialsummen an:
$$\begin{aligned} s_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ s_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{2} \\ s_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) > \frac{4}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
Beachtet man, dass $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3$, so erkennt man die allgemeine Abschätzung
$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > \frac{n+2}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$
welche man nun per Induktion beweisen könnte. Dies zeigt, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist und die harmonische Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
somit divergiert.

BEACHTE. Wir halten also fest: Die Bedingung $a_k \to 0$ für $k \to \infty$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Eine der wichtigsten Reihen ist die sogenannte **geometrische Reihe** (vergleiche Satz 4.21).

Satz 5.12 (Geometrische Reihe). *Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$*, falls* $|x| < 1$.

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *ist divergent, falls* $|x| \geq 1$.

In diesem Satz haben wir übrigens einmal beide Bedeutungen des Symbols $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nebeneinander.

Beweis. (i) Im Falle $|x| < 1$ erhalten wir aus der geometrischen Summenformel (vergleiche Satz 4.21), dass

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da $x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ und $|x| < 1$ (siehe Kapitel 4.5), folgt mit den Folgenrechenregeln aus Satz 4.32, dass

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x},$$

was zu zeigen war.

(ii) Im Falle $|x| > 1$ ist $(x^k)_{k=0}^{\infty}$ wie in Kapitel 4.5 gesehen keine Nullfolge, d.h. aus Proposition 5.11 folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergiert.

Betrachten wir ein paar Anwendungen dieses Satzes:

- Für $x = \pm\frac{1}{2}$ erhalten wir die Formeln:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

- **Quiz:** Ist $0.999999\ldots =: 0.\overline{9} < 1$? Antwort: Nein!

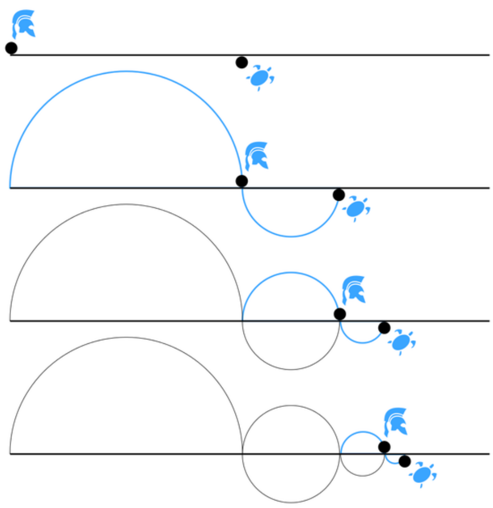
$$\begin{aligned}
0.9 &= 9 \cdot \frac{1}{10}, \\
0.99 &= 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\
0.999 &= 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \\
&\vdots \\
0.999\ldots &= 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ usw. Über den genauen Zusammenhang von reellen Zahlen und Dezimalbruchentwicklungen werden wir später noch einmal sprechen. —Ende Vorlesung 21—

- Nun können wir auch endlich das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte auflösen: Zenon betrachtete die Position der Läufer nach der 1. Sekunde, nach $1+\frac{1}{10}$ Sekunden, nach $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ Sekunden, usw. Dabei ist die Schildkröte stets vor dem Läufer. Allerdings gilt

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

D.h. Zenon beschreibt uns nur die ersten 10/9 Sekunden des Rennens und nach dieser Zeit wird Achilles die Schildkröte einholen.



Bildquelle: Wikimedia

5.3. Reihen: Konvergenzkriterien

Viele aus der Schule bekannte Funktionen haben Darstellungen als unendliche Reihen, z.B.

$$\begin{aligned}
\exp(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (\textbf{Exponentialfunktion}) \\
\sin(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (\textbf{Sinusfunktion}) \\
\cos(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (\textbf{Cosinusfunktion}).
\end{aligned}$$

Um überhaupt sicher zu sein, dass diese Reihen konvergieren, benötigen wir ein paar hinreichende Kriterien für Reihenkonvergenz.

Das folgende Kriterium ist das wohl wichtigste, auf das viele weitere zurück geführt werden können.

Satz 5.13. *(Majorantenkriterium) Es gelte $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sei konvergent. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Man bezeichnet in diesem Fall die Reihe $\sum b_k$ als eine Majorante für die Reihe $\sum a_k$.

Beweis. Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{und} \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

d.h. (t_n) ist die Folge der Partialsummen der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und (s_n) die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Aus der Konvergenz der Folge (t_n) folgt, dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist (vergleiche Satz 5.9). Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n, m \geq n_\varepsilon : \quad |t_n - t_m| \leq \varepsilon.$$

Aber für diese n, m gilt mit der Dreiecksungleichung und wegen $0 \leq |a_k| \leq b_k$ auch, dass (ohne Einschränkung sei $n > m$)

$$\begin{aligned}
|s_n - s_m| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k \\
&= \left| \sum_{k=m+1}^{n} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{m} b_k \right| = |t_n - t_m| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist auch die Folge (s_n) eine Cauchy-Folge, die wieder nach Satz 5.9 konvergiert. Aber die Konvergenz dieser Folge ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Wir betrachten gleich zwei Anwendungen des Majorantenkriteriums.

- Es sei $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konvergent (für $a = 1$, die harmonische Reihe, gilt dies wie oben gesehen nicht).

  Beweis: Für $k \geq 2$ gilt
  $$0 \leq \frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$
  und die (Teleskop-)Reihe
  $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1$$
  konvergiert (vergleiche das Beispiel vor Proposition 5.11). Aus dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a}$. Da das Hinzufügen (oder Ändern) von endlich vielen Gliedern zwar den Wert nicht aber das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert, zeigt dies auch die Konvergenz der Reihe
  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}.$$

  BEACHTE. Man kann zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ist es nicht erstaunlich, dass hier die Kreiszahl π auftaucht!

- Bekanntlich steht die Dezimalzahl $123,456$ als Abkürzung für
  $$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}.$$
  Allgemeiner steht die Dezimalzahl
  $$z_{-m}\, z_{-m+1}\, \ldots\, z_0, z_1\, z_2 \ldots,$$
  mit $z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $k \geq -m$, als Abkürzung für die reelle Zahl
  $$z_{-m} \cdot 10^m + z_{-m+1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + z_0 \cdot 10^0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot 10^{-k}.$$

Hier muss man jedoch aufpassen, denn ist die auftauchende Reihe überhaupt konvergent? Ja, denn es gilt

$$0 \leq z_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot 10^{-k}$$

und die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konvergiert.

> **BEACHTE.** Man kann zeigen, dass sich jede reelle Zahl als Dezimalzahl darstellen lässt. Die Darstellung muss nicht eindeutig sein, z.B. gilt $1 = 1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots$. Schließt man aber solche Fälle aus, wo nur endlich viele Ziffern $\neq 9$ sind, ist die Darstellung eindeutig.

Auch die folgenden beiden Konvergenzkriterien sind Folgerungen aus dem Majorantenkriterium.

Korollar 5.14. *Es sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine reelle Folge und $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge mit $b_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

i. (Wurzelkriterium) Falls $a := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert, so gilt:

a) Ist $a < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

b) Ist $a > 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

c) Ist $a = 1$, so ist keine Konvergenzaussage möglich.

ii. (Quotientenkriterium) Falls $b := \lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}$ existiert, so gilt:

a) Ist $b < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

b) Ist $b > 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

c) Ist $b = 1$, so ist keine Konvergenzaussage möglich.

Teilbeweis. Wir beweisen exemplarisch das Wurzelkriterium. Sei also $a := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

1.Fall ($0 \leq a < 1$): Wähle $\varepsilon := \frac{1-a}{2} > 0$. Dann existiert ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall k \geq k_\varepsilon : \quad \left| \sqrt[k]{|a_k|} - a \right| \leq \varepsilon,$$

d.h.

$$\forall k \geq k_\varepsilon : \quad a - \varepsilon \leq \sqrt[k]{|a_k|} \leq a + \varepsilon.$$

Aus der zweiten dieser Ungleichungen folgt insbesondere, dass

$$\forall k \geq k_\varepsilon : \quad |a_k| \leq (a+\varepsilon)^k.$$

Aber $a+\varepsilon = a+\frac{1-a}{2} = 1-\frac{1-a}{2} < 1$, d.h. die geometrische Reihe $\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} (a+\varepsilon)^k$ ist konvergent. Aus dem Majorantenkriterium folgt dann auch die Konvergenz von $\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} a_k$. Da die Addition endlich vieler Glieder zu einer Reihe nichts an ihrem Konvergenzverhalten ändern, konvergiert damit auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2.Fall ($a > 1$): Wähle $\varepsilon := \frac{a-1}{2} > 0$. Wie im ersten Fall sehen wir, dass ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\forall k \geq k_\varepsilon : \quad a - \varepsilon \leq \sqrt[k]{|a_k|} \leq a + \varepsilon$$

und aus der ersten dieser Ungleichungen folgt wegen $a - \varepsilon = a - \frac{a-1}{2} = 1 + \frac{a-1}{2} > 1$, dass

$$\forall k \geq k_\epsilon : \quad 1 < (a - \varepsilon)^k \leq |a_k|.$$

Aber dies zeigt, dass die Folge der Summanden (a_k) keine Nullfolge ist, d.h. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert nach Proposition 5.11.

3. Fall ($a = 1$): Für die Folgen $(\frac{1}{k})$ bzw. $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ gilt mit Übung 9.2, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1.$$

Aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, während $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (siehe oben).

Schauen wir uns auch hierzu noch ein paar Beispiele an.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die **Exponentialreihe**

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  konvergent. Beweis: Wir setzen $b_k := \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt für den Quotienten

  $$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0$$

  für $k \to \infty$.

  Mit Hilfe der Exponentialreihe wird die **Exponentialfunktion**

  $$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  definiert. Es gilt $\exp(1) = e$ und allgemeiner $\exp(x) = e^x$ (wobei wir die rechte Seite hier streng genommen noch gar nicht definiert haben). Ein ähnlicher Beweis zeigt, dass die oben schon eingeführten Sinus- und Cosinusreihen ebenfalls konvergieren.

- Betrachte

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{2^k},$$

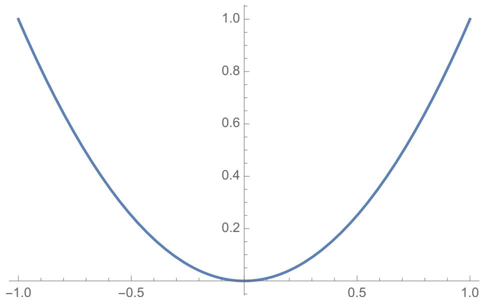
d.h.
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots$$
Mit $a_k = \frac{2+(-1)^k}{2^k}$ gilt hier
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+(-1)^{k+1}}{2+(-1)^k}$$
und die rechte Seite konvergiert für $k \to \infty$ nicht (warum?), das Quotientenkriterium ist also nicht anwendbar. Das Wurzelkriterium jedoch schon: Wegen
$$\frac{1}{2^k} \leq a_k \leq \frac{3}{2^k}$$
folgt
$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[k]{a_k} \leq \frac{1}{2}\sqrt[k]{3},$$
d.h. wegen $\sqrt[k]{3} \to 1$ folgt aus dem Sandwichprinzip, dass
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2}$$
und die Reihe konvergiert. —Ende Vorlesung 22—

6. Reelle Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit reellen Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschäftigen, insbesondere damit, was Stetigkeit und Differenzierbarkeit solcher Funktionen bedeutet und warum Funktionen mit diesen Eigenschaften interessant sein können.

6.1. Stetige Funktionen

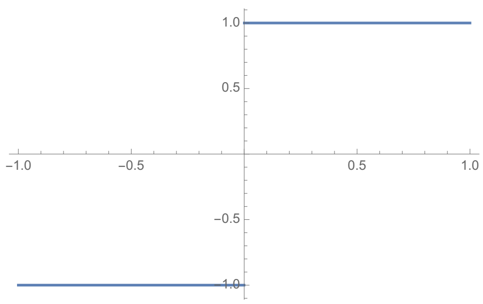
In der Schule lernt man, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig heißt, wenn man ihren Graphen „ohne Absetzen“ durchzeichnen kann, oder gleichbedeutend, wenn die Funktion „keine Sprünge“ macht. Damit wäre zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ stetig,



die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

aber nicht. Diese ist unstetig an der Stelle $x = 0$.



Leider ist es manchmal schwierig oder sogar aussichtslos, den Graphen einer Funktion zu zeichnen. Zum Beispiel bei der Dirichletschen[1] Sprungfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sollte man so eine Funktion dann stetig oder unstetig nennen?

Sie merken, dass der obige intuitive Stetigkeitsbegriff nicht ausreicht und eine genaue mathematische Definition vonnöten ist. Hierbei sollte die Stetigkeit von $f : D \to \mathbb{R}$ in $p \in D$ so definiert sein, dass folgender Gedanke präzise ausgedrückt wird.

Wenn sich x der Zahl p annähert, soll sich der Funktionswert $f(x)$ der Zahl $f(p)$ annäheren.

Dies entspricht gerade unserer Vorstellung, dass die Funktion nicht springt bzw. dass wir beim Zeichnen des Graphen den Stift nicht absetzen müssen. Ein geeigneter Weg, diesen Gedanken mathematisch auszudrücken, bedient sich der Folgenkonvergenz.

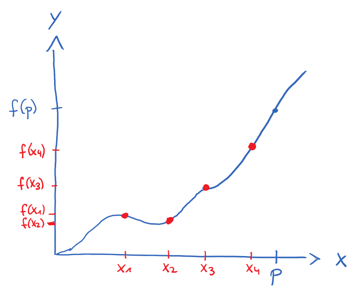
Definition 6.1 (Stetigkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ferner sei $p \in D$. Dann heißt f **stetig im Punkt** p, wenn für *alle* Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D[a] die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

Ist die Funktion im Punkt p nicht stetig, so sagen wir sie sei **im Punkt p unstetig**. Schließlich sagen wir, dass f (global) **stetig** ist, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

[a] Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge **in** D, falls alle Folgenglieder in D liegen, d.h. $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Laufen wir also im Definitionsbereich von f mit einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf den Punkt p zu, so muss die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ im Wertebereich auf den Bildpunkt $f(p)$ zulaufen. Und dies muss für **jede** im Definitionsbereich gegen p laufende Folge gelten, d.h. egal wie unser Argument x sich p annähert, die zugehörigen Bildpunkte laufen gegen $f(p)$.



[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Ein paar weitere Bemerkungen sind angebracht:

- Die Stetigkeit einer Funktion in $p \in D$ ist eine *lokale Eigenschaft*, d.h. sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in unmittelbarer Nähe von p ab. Eine Funktion kann in einigen Punkten des Definitionsbereichs stetig sein und in anderen nicht.
- *Es macht keinen Sinn, über Stetigkeit/Unstetigkeit einer Funktion in einem Punkt zu sprechen, in dem sie nicht definiert ist.* Zum Beispiel werden wir später zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist!
- Für (global) stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ gilt also für jede im Definitionsbereich konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

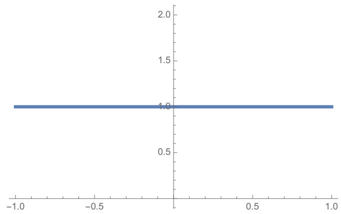
  Kurz: *Man darf einen Limes in eine stetige Funktion hineinziehen.*

Es wird Zeit für ein paar Beispiele.

a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c$$

ist stetig (d.h. stetig in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$).

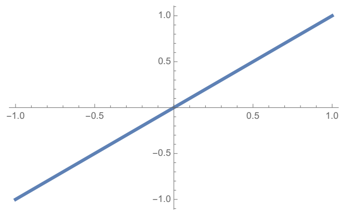


Beweis: Sei $p \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$. Dann gilt sowohl $f(x_n) = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als auch $f(p) = c$. Es handelt sich also bei der Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ um die konstante Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese konvergiert offensichtlich gegen $c = f(p)$, d.h. $f(x_n) \to f(p)$ für $n \to \infty$.

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

ist stetig. Der Beweis ist klar, denn dass $x_n \to p$ genau dann gilt, wenn $f(x_n) \to f(p)$ folgt hier auf triviale Weise.

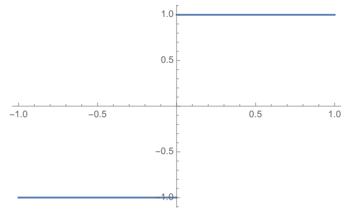


Das nächste Beispiel zeigt, dass mit unserer Stetigkeitsdefinition Sprünge tatsächlich zu Unstetigkeiten führen.

c) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

ist im Punkt $p = 0$ unstetig.



Beweis: Ist x_n eine Nullfolge mit positiven Gliedern, d.h. $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (Beispiel?), so gilt $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Aber $f(0) = -1$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(0).$$

BEACHTE. Wir merken uns: Um zu zeigen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in D$ unstetig ist, genügt es *eine* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D zu finden, so dass zwar $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(p).$$

Quiz: Wo ist folgende Funktion stetig?

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

Jetzt können wir auch entscheiden, wie es mit der Dirichletschen Sprungfunktion aussieht.

d) Die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$ unstetig.

Beweis:

1. Fall: $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. $f(p) = 0$. Da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen (Satz 4.23), existiert eine Folge rationaler Zahlen x_n mit $x_n \to p$. Da dann $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(p).$$

2. Fall: $p \in \mathbb{Q}$, d.h. $f(p) = 1$. Dann besteht die Folge $x_n = p + \frac{\sqrt{2}}{n}$ nur aus irrationalen Zahlen (warum?) und $x_n \to p$ für $n \to \infty$. Insbesondere gilt $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.

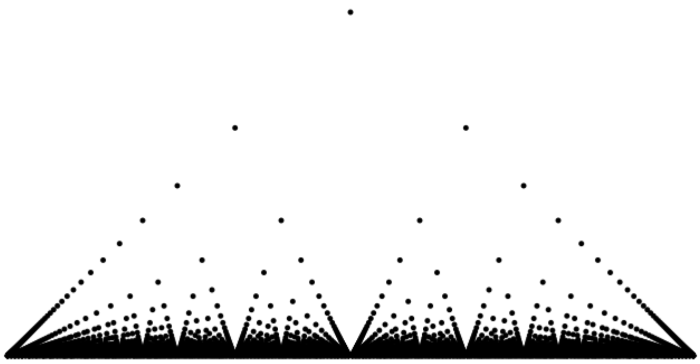
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(p).$$

BEACHTE. Es gibt noch verrücktere Beispiele, etwa die Thomaesche Funktion

$$f : [0,1] \to [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} 1/q & , x > 0 \text{ und } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}, \\ 0 & , x \text{ irrational }, \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

Diese ist stetig in allen irrationalen Punkten in $[0,1]$ und unstetig in allen rationalen Punkten in $[0,1]$.

—Ende Vorlesung 23—



Die Thomaesche Funktion. Bildquelle: Wikipedia.

e) Die Wurzelfunktion $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$w(x) = \sqrt{x}$$

ist stetig.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass w in jedem Punkt $p \in [0,\infty)$ stetig ist. Wir betrachten nur den schwierigeren Fall $p > 0$. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,\infty)$ mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad |x_n - p| \leq \varepsilon.$$

Dann gilt für diese n auch

$$\begin{aligned} |w(x_n) - w(p)| &= |\sqrt{x_n} - \sqrt{p}| = \frac{|(\sqrt{x_n} - \sqrt{p})(\sqrt{x_n} + \sqrt{p})|}{|\sqrt{x_n} + \sqrt{p}|} \\ &= \frac{|x_n - p|}{|\sqrt{x_n} + \sqrt{p}|} \leq \frac{|x_n - p|}{\sqrt{p}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die Quadratwurzel einer nichtnegativen Zahl wieder nichtnegativ ist. Wir haben also gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |w(x_n) - w(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \varepsilon.$$

Nach Lemma 4.28 zeigt dies, dass $\lim_{n\to\infty} w(x_n) = w(p)$ gilt. Dies mussten wir zeigen.

BEACHTE. Die Wurzelfunktion $w : [0, \infty) \to [0, \infty), w(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = x^2$. Man kann zeigen, dass die Umkehrfunktion jeder bijektiven stetigen Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ wieder stetig ist.

Um die Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen zu prüfen, ist das folgende Resultat sehr hilfreich.

Satz 6.2. *Sei $c \in \mathbb{R}$. Sind die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig im Punkt $p \in D$, so sind auch die Funktionen $f + g, f - g, cf$ und $f \cdot g$ stetig in p. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ stetig in p.*

Hierbei sind die auftretenden Funktionen punktweise definiert, d.h.

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

usw. Zum Beispiel lässt sich die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = 2x^2 + x$ mit Hilfe der, wie oben gezeigt, stetigen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x$$

ausdrücken als $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot g(x) + g(x)$, d.h. $p = f \cdot g \cdot g + g$. Damit ist diese Funktion nach Satz 6.11 stetig.

Beweis von Satz 6.11. Dies folgt sofort aus den Folgenrechenregeln in Satz 4.32. Ist zum Beispiel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$, so folgt zunächst aus der Stetigkeit von f und g in p, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(p).$$

Aber nach Satz 4.32 existiert dann auch $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) \overset{\text{Satz 4.32}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(p)+g(p).$$

Beachtet man nun noch, dass $f(x_n)+g(x_n) = (f+g)(x_n)$ und $f(p)+g(p) = (f+g)(p)$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f+g)(p),$$

d.h. $f+g$ ist in p stetig. Analog zeigt man die Stetigkeit der anderen Funktionen.

Korollar 6.3. *Jede* ***Polynomfunktion*** *(oder kurz: jedes* ***Polynom****)*

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,\quad x\in\mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ ist stetig. Ferner ist jede ***rationale Funktion***

$$r:D\to\mathbb{R},\quad r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

mit Polynomen $p,q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $D=\{x\in\mathbb{R}: q(x)\neq 0\}$ stetig.

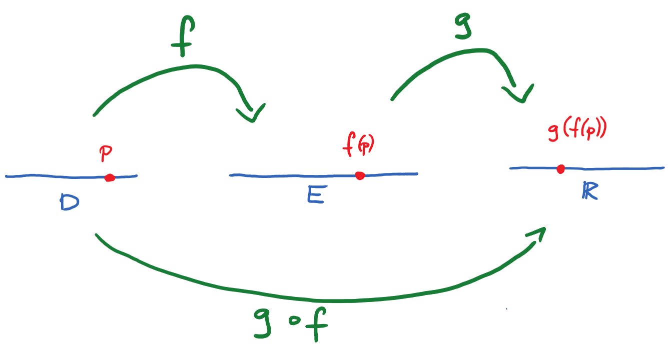
Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{x}$$

ist ein Beispiel einer stetigen rationalen Funktion.

Auch Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.

Satz 6.4. *Seien $D,E\subseteq\mathbb{R}$ und $f:D\to E$ und $g:E\to\mathbb{R}$ Funktionen. Ist f stetig im Punkt p und g stetig im Punkt $f(p)$, so ist die Funktion $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ stetig im Punkt p.*



Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. Da f in p stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

Für die Folge $y_n := f(x_n)$ gilt also $y_n \to f(p)$ für $n \to \infty$. Da g im Punkt $f(p)$ stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(p)),$$

d.h. insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(p)) = (g\circ f)(p).$$

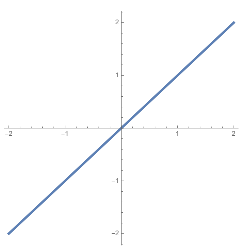
Schauen wir uns auch hierzu zwei Anwendungen an.

a) Die Betragsfunktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig.

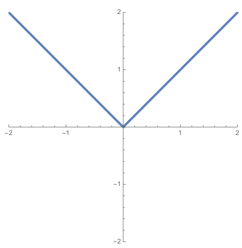
   Beweis: Es gilt $b = g\circ f$, wobei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty), f(x) = x^2$ und $g : [0,\infty) \to [0,\infty), g(x) = \sqrt{x}$ jeweils stetig sind.

b) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, so auch die Maximumfunktion $\max(f,g) : D \to \mathbb{R}, \max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x))$ (und analog für die Minimumfunktion).

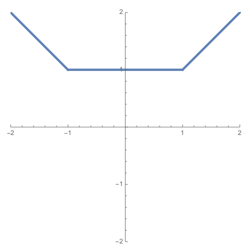
   Beweis: Für zwei reelle Zahlen a, b gilt $\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ (Übung!). Also gilt $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$. Nun benutze a) und Satz 6.11 und Satz 6.4.



$f(x) = x.$



$f(x) = |x|$



$f(x) = \max(|x|, 1)$

Zum Schluss wollen wir noch kurz über die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

sprechen. Auch dies ist eine stetige Funktion, allerdings folgt dies hier nicht, wie im Fall von Polynomen, aus der Summen- und Produktregel. Denn diese gilt nur für den Fall von Summen oder Produkten von endlich vielen stetigen Funktionen. Ist also etwa (x_n)

eine reelle Folge mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$, so gilt zwar für jedes feste $m \in \mathbb{N}$, dass die Polynomfunktion

$$s_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

stetig ist, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} s_m(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{x_n^k}{k!} = s_m(p) = \sum_{k=0}^{m} \frac{p^k}{k!},$$

aber hieraus folgt nicht unmittelbar die Stetigkeit der Exponentialfunktion in p. Der Grund ist, dass hierbei zwei Grenzwertprozesse vertauscht werden müssen:

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_m(x_n) \stackrel{?}{=} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_m(x_n) = \lim_{m\to\infty} s_m(p) = \exp(p).$$

Tatsächlich können beim Vertauschen zweier Grenzwerte Dinge schief gehen. Zum Beispiel ist

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{n}{n+m} \neq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+m}.$$

Quiz: Was kommt raus?

Um die Stetigkeit der Exponentialfunktion zu zeigen, müssen wir also anders argumentieren. Dazu zeigen wir zunächst, dass diese stetig in $p = 0$ ist. Hierzu schätzen wir für $|x| < 1$ unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe ab

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(0)| = |\exp(x) - 1| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1-|x|} - 1 \end{aligned}$$

Dass wir in der ersten Ungleichung die Dreiecksungleichung auch für Reihen (also unendliche Summen) anwenden dürfen, folgt übrigens aus der Stetigkeit der Betragsfunktion (warum?).

Ist nun (x_n) eine reelle Folge mit $x_n \to 0$, so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $|x_n| < 1$ gilt. Setzen wir $x = x_n$ in obige Ungleichungskette ein, so geht die rechte Seite

$$\frac{1}{1-|x_n|} - 1 \to 0$$

für $n \to \infty$, d.h. auch $\lim_{n\to\infty} |\exp(x_n) - \exp(0)| = 0$. Aber dies ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(0)$, was die Stetigkeit von exp in $p = 0$ zeigt.

Um die Stetigkeit der Exponentialfunktion in $p \neq 0$ zu zeigen, würde man nun zunächst die **Funktionalgleichung** der Exponentialfunktion zeigen, nämlich

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ist dann (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, so schreiben wir zunächst

$$\exp(x_n) - \exp(p) = \exp(p)\left(\exp(x_n - p) - \exp(0)\right).$$

Da $y_n := x_n - p \to 0$ für $n \to \infty$, folgt aus der schon gezeigten Stetigkeit von exp in 0, dass

$$\exp(y_n) - \exp(0) \to 0,$$

d.h. aus der Gleichung darüber folgt $\exp(x_n) \to \exp(p)$ für $n \to \infty$. Für einen Beweis der Funktionalgleichung bleibt in dieser Vorlesung leider keine Zeit. —Ende Vorlesung 24—

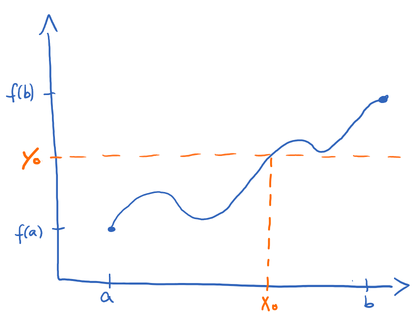
6.2. Der Zwischenwertsatz und seine Folgerungen

Wir wollen uns nun noch etwas intensiver mit stetigen Funktionen und ihren Eigenschaften auseinandersetzen und beginnen mit dem sogenannten Zwischenwertsatz.

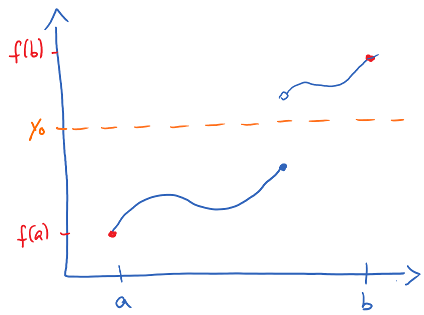
Satz 6.5 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$. Ferner sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und c eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.*[a] *Dann nimmt f den Wert c an, d.h. es existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$.*

[a] Es gilt also entweder $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(b) \leq c \leq f(a)$.

Dieser Satz ist anschaulich klar: Da f stetig ist, kann man den Graphen zeichnen ohne abzusetzen. Startet man unterhalb der Geraden $y = c$ und landet man oberhalb (oder umgekehrt), so muss man zwischendurch die Gerade treffen. Genauso klar ist, dass der Satz für unstetige Funktionen im Allgemeinen falsch ist.



Graph einer stetigen Funktion.



Graph einer unstetigen Funktion

Allerdings wissen wir auch, dass stetige Funktionen sehr kompliziert sein können und man den Graphen eventuell gar nicht zeichnen kann. Um zu zeigen, dass der Satz auch für solche komplizierteren Funktionen gilt, müssen wir ihn also formal unter Rückführung auf die Axiome beweisen.

Beweis des Zwischenwertsatzes.

Wir betrachten nur den Fall $f(a) \le f(b)$ (der Fall $f(b) \le f(a)$ wird analog behandelt).

1. Schritt: Wir werden zwei Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ in $[a,b]$ konstruieren, die die folgenden Eigenschaften haben:

(i) $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist monoton wachsend, $(b_n)_{n=1}^\infty$ ist monoton fallend und $a_n \le b_n$ für $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $f(a_n) \le c \le f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dazu setzen wir $a_1 = a$ und $b_1 = b$, d.h. nach Voraussetzung des Satzes gilt

$$f(a_1) \le c \le f(b_1)$$

und selbstverständlich ist $b_1 - a_1 = b - a = \frac{b-a}{2^{1-1}}$. Nun betrachten wir den Mittelpunkt $\frac{a_1+b_1}{2}$ des Intervalls $[a,b] = [a_1,b_1]$. Ist dann

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \ge c, \text{ so setzen wir } a_2 = a_1 \text{ und } b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}.$$

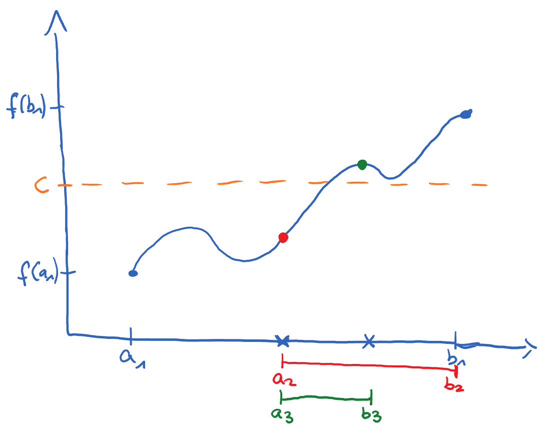
Ist hingegen

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < c, \text{ so setzen wir } a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{ und } b_2 = b_1.$$

Als Ergebnis erhalten wir, dass $[a_2,b_2]$ die linke oder rechte Hälfte des Intervalls $[a_1,b_1]$ ist, d.h. insbesondere gilt

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^{2-1}},$$

und nach Konstruktion gilt $a_1 \le a_2 \le b_2 \le b_1$ und $f(a_2) \le c \le f(b_2)$. Dieses Verfahren setzen wir nun einfach (induktiv) fort und erhalten die gewünschten Folgen mit den Eigenschaften (i)-(iii).



2. Schritt: Nach Punkt (i) des ersten Schritts sind die Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton und beschränkt, letzteres, weil sie im beschränkten Intervall $[a, b]$ enthalten sind. Nach Satz 5.2 sind beide Folgen also konvergent. Nach Punkt (ii) des ersten Schrittes und den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt ferner

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0,$$

d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: p$. Wegen

$$a \leq a_n \leq b, \quad n \in \mathbb{N},$$

folgt ferner $p \in [a, b]$. Aber dann ist f in p definiert und nach Voraussetzung stetig, d.h. es folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

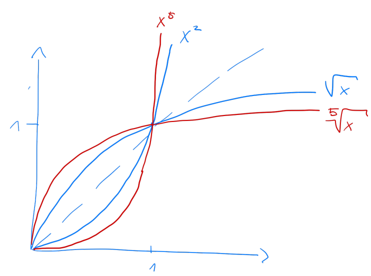
Wegen Punkt (iii) des ersten Schrittes folgt schließlich mit dem Sandwichprinzip, dass

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(p), \qquad \text{d.h. es gilt } f(p) = c.$$

Schauen wir uns einige Anwendungen des Zwischenwertsatzes an.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^k$ bijektiv.

Beweis: Die Funktion ist streng monoton wachsend, d.h. injektiv. Ist nun $a \in (0, \infty)$ beliebig, so gilt für das (stetige) Polynom $g(x) := x^k - a$, dass $g(0) = -a < 0$ und $g(a+1) = (a+1)^k - a \geq a + 1 - a = 1 > 0$. Nach dem ZWS existiert also ein $p \in [0, a+1]$ mit $g(p) = 0$, d.h. $f(p) = p^k = a$. Da auch $f(0) = 0$ gilt, ist die Funktion insgesamt auch surjektiv.



BEACHTE. Für $a \geq 0$ nennen wir die eindeutige Zahl $p \in [0, \infty)$ mit $p^k = a$ die (positive) k-te Wurzel von a und bezeichnen sie mit $\sqrt[k]{a}$. Man erinnere sich daran, dass wir die Existenz von $\sqrt[2]{a} := \sqrt{a}$ früher schon auf anderem Wege bewiesen hatten.

(b) Die stetige Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Übung 11.4 streng monoton wachsend (also injektiv), erfüllt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0.$$

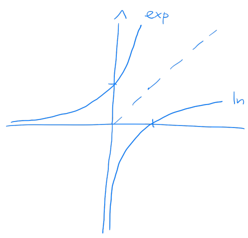
Ist nun $y \in (0, \infty)$ beliebig, so existiert also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\exp(-n_0) < y < \exp(n_0).$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein $p \in (-n_0, n_0)$ existiert mit $\exp(p) = y$. Also haben wir gezeigt, dass die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

bijektiv ist.



BEACHTE. Man nennt die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion die **natürliche Logarithmusfunktion** und schreibt sie als

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

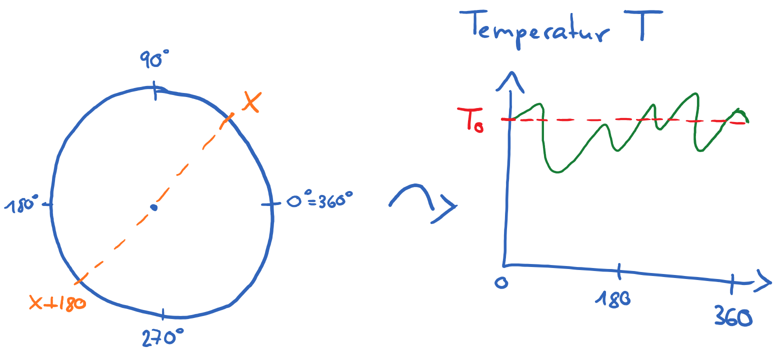
Aus der Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ ergibt sich

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad x, y \in (0, \infty).$$

(c) Das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1$ hat mindestens eine Nullstelle (und zwar zwischen $x = 1$ und $x = 2$).

Beweis: Es gilt $f(2) = 2 \cdot 32 - 3 \cdot 4 - 1 > 0$ und $f(1) = 2 - 3 - 1 < 0$. Da f stetig ist existiert nach dem ZWS ein $p \in (1, 2)$ mit $f(p) = 0$.

BEACHTE. Auf die gleiche Art kann man zeigen, dass jedes Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Aber Vorsicht: Für Polynome mit geradem Grad gilt dies nicht! Beispiel: $q(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.



(d) Ein Beispiel für eine etwas physikalischere Anwendung: Zu jedem Zeitpunkt existieren auf dem Erdäquator zwei *gegenüberliegende* Punkte mit gleicher Lufttemperatur.

Beweis: Wir beschreiben die Temperatur durch eine Funktion $T : [0, 360] \to \mathbb{R}$. Diese ist stetig und erfüllt $T(0) = T(360)$. Sei

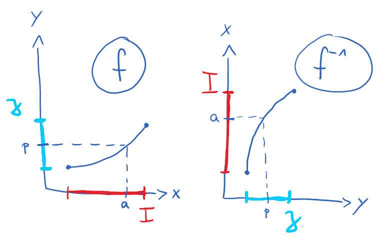
$$f : [0, 180] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = T(x) - T(x + 180),$$

d.h. die stetige Funktion f beschreibt die Temperaturdifferenz der gegenüberliegenden Punkte x und $x + 180$. Gilt also $f(x) = 0$, so haben x und $x + 180$ die gleiche Temperatur. Man beachte, dass $f(0) = T(0) - T(180) = T(360) - T(180) = -(T(180) - T(360)) = -f(180)$. Nun unterscheiden wir drei Fälle:

1. $f(0) = 0$: Dann haben die Punkte $x = 0$ und $x = 180$ die gleiche Temperatur.
2. $f(0) > 0$: Dann gilt $f(180) < 0$ und da f stetig ist, folgt aus dem ZWS, dass ein $p \in (0, 180)$ existieren muss mit $f(p) = 0$, d.h. p und $p + 180$ haben die gleiche Temperatur.
3. $f(0) < 0$: Analoge Argumentation wie bei Fall 2.

—Ende Vorlesung 25—

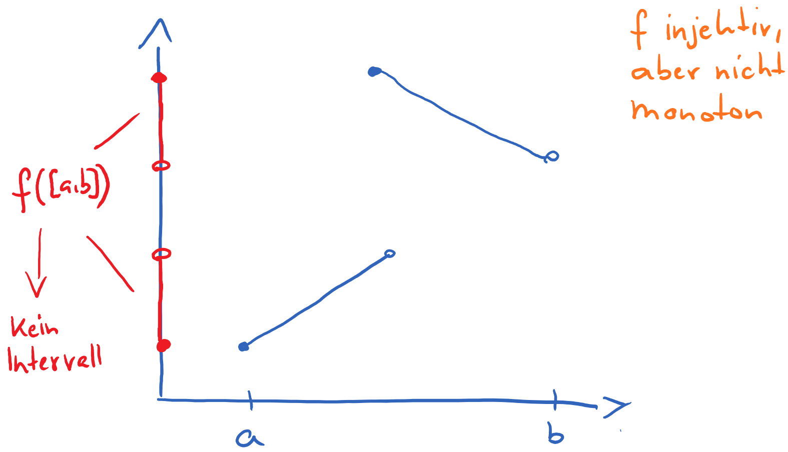
Nun wollen wir als Anwendung des Zwischenwertsatzes noch zeigen, dass auch die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion wieder stetig ist. Auch dies ist anschaulich klar: beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden reißt der Graph nicht auseinander.



Satz 6.6 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to J$ sei stetig und bijektiv. Dann ist J ein Intervall und f ist streng monoton. Ferner ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ stetig und streng monoton.*

Genauer: Ist f streng monoton wachsend (fallend), so ist auch f^{-1} streng monoton wachsend (fallend).

Man beachte, dass eine unstetige bijektive Funktion $f : I \to J$ weder monoton sein muss, noch muss ihr Wertebereich $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sein.



Beweis von Satz 6.6.

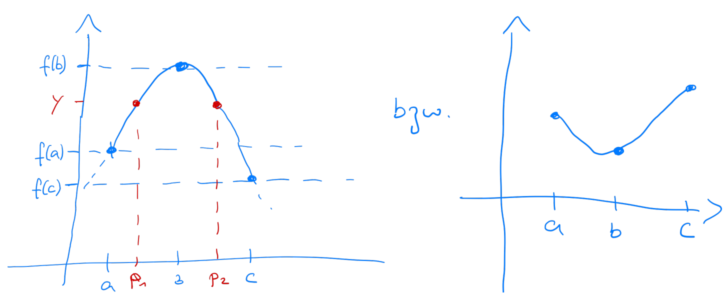
1. Schritt (f ist streng monoton): Wäre dies nicht der Fall, so würden $a, b, c \in I$ existieren mit $a < b < c$

$$f(a) < f(b) \quad \text{und} \quad f(b) > f(c)$$

oder

$$f(a) > f(b) \quad \text{und} \quad f(b) < f(c).$$

In beiden Fällen wird man zu einem Widerspruch geführt. Wir zeigen dies für den ersten



Fall. Dazu wählen wir uns $y \in (f(a), f(b)) \cap (f(c), f(b))$. Nach dem Zwischenwertsatz existieren dann $p_1 \in (a, b)$ und $p_2 \in (b, c)$ mit $f(p_1) = y$ und $f(p_2) = y$. Aber dies steht im Widerspruch zur Injektivität von f.

Im weiteren Beweis betrachten wir nur den Fall, dass f streng monoton wächst. Im Falle einer streng monoton fallenden Funktion würde man genauso argumentieren.

2. Schritt (f^{-1} ist streng monoton wachsend): Seien $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$. Sei $x_1 := f^{-1}(y_1)$ und $x_2 := f^{-1}(y_2)$. Wäre $x_1 \geq x_2$, so folgte aus dem streng monotonen Wachstum von f, dass

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $x_1 < x_2$ also $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ folgen muss. Also ist f^{-1} streng monoton wachsend.

3. Schritt (J ist ein Intervall): Wir benutzen, dass eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}$ genau dann ein Intervall ist, wenn Folgendes gilt:

$$\forall y, z \in J : \quad y \leq z \Rightarrow [y, z] \subseteq J,$$

d.h. mit zwei Punkten ist auch stets ihre Verbindungsstrecke in J enthalten. Seien also $y, z \in J$ mit $y \leq z$ beliebig. Wähle $a = f^{-1}(y)$ und $b = f^{-1}(z)$. Nach Schritt 2 gilt $a \leq b$. Nun sei

$$c \in [y, z] = [f(a), f(b)].$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert wieder ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$. Demnach liegt c im Zielbereich von f, d.h. $c \in J$. Aber dies zeigt

$$[y, z] \subseteq J,$$

d.h. wie oben erwähnt folgt, dass J ein Intervall ist.

4. Schritt (f^{-1} ist stetig): Sei $p \in J$. Wir betrachten nur den Fall, dass p kein Randpunkt des Intervalls J ist. Nun sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in J mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$. Es ist zu zeigen, dass

$$f^{-1}(x_n) \to \underbrace{f^{-1}(p)}_{=:a} \quad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. dass zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f^{-1}(x_n) - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig (aber so klein, dass $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subseteq I$[2]). Da f streng monoton

[2] Dies geht, weil p und damit a nach Voraussetzung kein Randpunkt von J ist.

wächst, gilt

$$p - f(a-\varepsilon) = f(a) - f(a-\varepsilon) > 0 \quad \text{und} \quad f(a+\varepsilon) - p = f(a+\varepsilon) - f(a) > 0,$$

d.h.

$$\varepsilon' := \min\left(p - f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon) - p\right) > 0.$$

Da $x_n \to p$ für $n \to \infty$ existiert also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - p| < \varepsilon' \quad \text{bzw.} \quad p - \varepsilon' < x_n < p + \varepsilon'.$$

Aber die letzte Ungleichungskette impliziert wegen der Wahl von ε', dass

$$f(a-\varepsilon) = p - (p - f(a-\varepsilon)) < x_n < p + (f(a+\varepsilon) - p) = f(a+\varepsilon)$$

oder kurz

$$f(a-\varepsilon) < x_n < f(a+\varepsilon).$$

Da f^{-1} streng monoton wächst, folgt

$$a - \varepsilon = f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(x_n) < f^{-1}(f(a+\varepsilon)) = a + \varepsilon.$$

Es gilt also $|f^{-1}(x_n) - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ und der Beweis ist komplett.

Als unmittelbare Anwendungen dieses Satzes notieren wir:

- Die k-te Wurzelfunktion

  $$w_k : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad w_k(x) = \sqrt[k]{x}$$

  ist als Umkehrfunktion der stetigen Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty), x \mapsto x^k$ wieder stetig.

- Die natürliche Logarithmusfunktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist als Umkehrfunktion der stetigen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ wieder stetig.

Wir wollen nun noch auf die Frage eingehen, wie wir allgemeine Potenzen x^a für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren können. Was ist also z.B. mit

$$2^{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad e^e$$

eigentlich gemeint. Beginnen wir mit rationalem a. Wir setzen für $p, q \in \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p} \quad \text{und} \quad x^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}.$$

Hier gibt es allerdings eine kleine Spitzfindigkeit, denn ein Bruch hat ja keine eindeutige Darstellung: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{np}{nq}.$$

Damit obige Definition Sinn macht, darf sie nicht von der Wahl des Repräsentanten des Bruchs abhängen, d.h. es müsste gelten

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[nq]{x^{np}}$$

Aber dies ist der Fall, denn durch eine Äquivalenzumformung sehen wir (hier verwenden wir, dass alle vorkommenden Zahlen > 0 sind)

$$\begin{aligned} \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[nq]{x^{np}} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{nq} = \left(\sqrt[nq]{x^{np}}\right)^{nq} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q\right)^n = x^{np} \\ &\Leftrightarrow \quad (x^p)^n = x^{np}. \end{aligned}$$

Aber die letzte Gleichung ist wahr, also auch die erste. Damit haben wir gezeigt, dass unsere Definition von x^a für $a \in \mathbb{Q}$ einen Sinn macht. Man kann nun leicht zeigen, dass die üblichen Potenzrechengesetze weiterhin gelten, also z.B.

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x > 0, \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Um x^a auch für beliebige reelle a zu definieren, betrachten wir zunächst einen Zwischenschritt.

Lemma 6.7. *Für $a \in \mathbb{Q}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(a \cdot c) = (\exp(c))^a.$$

Insbesondere gilt $\exp(a) = e^a$ für $a \in \mathbb{Q}$.

Beweis. 1. Schritt: Betrachten wir den Fall $a = 2$:

$$\exp(2 \cdot c) = \exp(c + c) = \exp(c)\exp(c) = (\exp(c))^2.$$

Genauso folgt die Behauptung für den Fall $a = n \in \mathbb{N}$ durch n-maliges Anwenden der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

2. Schritt: Betrachten wir nun den Fall $a = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt mittels zweimaligem Anwenden des ersten Schrittes

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q} \cdot c\right)\right)^q = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot c\right) = \exp(p \cdot c) = (\exp(c))^p.$$

Ziehen wir die q-te Wurzel auf beiden Seiten, folgt

$$\exp\left(\frac{p}{q} \cdot c\right) = (\exp(c))^{\frac{p}{q}}.$$

3. Schritt: Aus der Gültigkeit der Behauptung für $x \in \mathbb{Q}$ folgt auch die Behauptung für $-x$. Dies ist eine Übung. Aus Schritt 2 und 3 folgt dann die Behauptung.

Das vorherige Lemma zeigt mit der Wahl $c = \ln(x)$ insbesondere, dass für $a \in \mathbb{Q}$

$$\exp\left(a \cdot \ln(x)\right) = \left(\exp(\ln(x))\right)^a = x^a.$$

Dies veranlasst zu folgender Definition für allgemeine reelle Exponenten a.

Definition 6.8. Sei $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$x^a := \exp(a \cdot \ln(x))$$

Insbesondere ist wegen $\ln(e) = 1$ dann

$$e^a := \exp(a).$$

Da die Exponential- und Logarithmusfunktion jeweils stetig sind, sehen wir somit insbesondere auch, dass die Funktionen

$$(0, \infty) \ni x \mapsto x^a \in (0, \infty), \qquad a \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

und

$$\mathbb{R} \ni a \mapsto x^a \in (0, \infty), \qquad x > 0 \text{ fest}$$

jeweils stetig sind. Damit können wir nun z.B. $2^{\sqrt{2}}$ auf zwei Arten berechnen. Direkt über die Definition als

$$2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln(2)) = e^{\sqrt{2}\ln(2)},$$

oder mit Hilfe einer rationalen Folge $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $a_n \to \sqrt{2}$ für $n \to \infty$ (vergleiche zum Beispiel das Heron-Verfahren) als

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{p_n}{q_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[q_n]{2^{p_n}}.$$

—Ende Vorlesung 26—

6.3. Differenzierbare Funktionen

Der Vollständigkeit halber wollen wir zumindest noch einen ganz kurzen Blich auf differenzierbare Funktionen werfen.

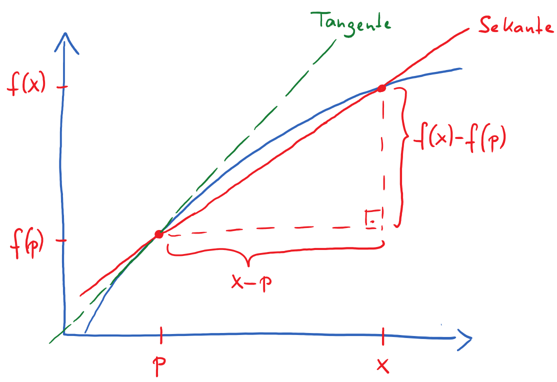
Definition 6.9. Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in I$. Falls der Grenzwert

$$f'(p) := \lim_{\substack{x\to p\\ x\neq p}} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existiert, so heißt f **im Punkt** p **differenzierbar** und der Grenzwert $f'(p)$ heißt **die Ableitung von** f **in** p. Wir sagen f ist **differenzierbar**, falls sie in jedem $p \in I$ differenzierbar ist.

BEACHTE. Die Existenz des obigen Grenzwerts bedeutet genauer, dass eine reelle Zahl existiert, dir wir mit $f'(p)$ bezeichnen, so dass für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I \setminus \{p\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} = f'(p).$$



BEACHTE. Für $x \in I \setminus \{p\}$ heißt

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

der **Differenzenquotient** von f für p und x. Dieser gibt die Steigung der **Sekante** des Graphen von f durch $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$ an. Beim Grenzübergang $x \to p$ geht die Sekante in die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$ über. Die Ableitung (auch **Differentialquotient** genannt) $f'(p)$ gibt also (im Falle der Existenz) die Steigung dieser Tangente an.

Wir halten sofort folgenden Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit fest:

Satz 6.10. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in I$ differenzierbar, so ist f dort auch stetig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$. Es ist zu zeigen, dass $f(x_n) \to f(p)$ für $n \to \infty$.

Dazu genügt es den Fall zu betrachten, dass $x_n \neq p$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (warum?). Hier erhalten wir

$$f(x_n) - f(p) = \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} \cdot (x_n - p) \to f'(p) \cdot 0 = 0$$

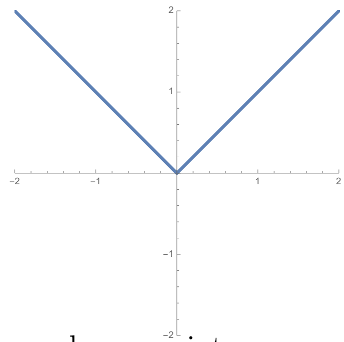
für $n \to \infty$, d.h. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$.

VORSICHT. Die Umkehrung des Satzes gilt nicht! Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar!

- Die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

ist im Punkte $p = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar. **Quiz:** Was ist mit den anderen Punkten?



Beweis: 1. Die Stetigkeit der Betragsfunktion haben wir oben schon gezeigt.

2. Für die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n}| - |0|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Andererseits gilt für die Folge $y_n = -\frac{1}{n}$, dass $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}| - |0|}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Insgesamt zeigt dies, dass

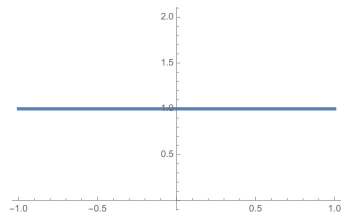
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

nicht existiert, die Betragsfunktion also in $p = 0$ nicht differenzierbar ist.

- Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c$$

ist differenzierbar. Ferner gilt $f'(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}$. Der Beweis ist klar, die Differenzenquotienten sind konstant gleich 0.



- Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^k$$
ist differenzierbar. Ferner gilt für alle $p \in \mathbb{R}$
$$f'(p) = kp^{k-1}$$

Beweis: Sei $p \in \mathbb{R}$ beliebig. Schauen wir uns den Differenzenquotienten an:
$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \frac{x^k - p^k}{x - p}.$$
Den Nenner müssen wir irgendwie loswerden, da er für $x \to p$ gegen 0 geht. Für $k = 1$ und $k = 2$ geht das einfach, denn
$$k = 1 : \quad \frac{x - p}{x - p} = 1.$$
$$k = 2 : \quad \frac{x^2 - p^2}{x - p} = \frac{(x + p)(x - p)}{x - p} = x + p.$$
Auch für $k = 3$ funktioniert es
$$\begin{aligned} k = 3 : \quad \frac{x^3 - p^3}{x - p} &= \frac{x^3 - x^2p + x^2p - xp^2 + xp^2 - p^3}{x - p} \\ &= \frac{x^2(x - p) + xp(x - p) + p^2(x - p)}{x - p} = x^2 + xp + p^2. \end{aligned}$$
Für allgemeines k folgt analog:
$$\frac{x^k - p^k}{x - p} = x^{k-1} + x^{k-2}p + x^{k-3}p^2 + \ldots + xp^{k-2} + p^{k-1}.$$
Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ und $x_n \neq p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus den Folgenrechenregeln
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} = p^{k-1} + p^{k-2} \cdot p + p^{k-3} \cdot p^2 + \ldots + p \cdot p^{k-2} + p^{k-1} = k \cdot p^{k-1}.$$

Um die Differenzierbarkeit von zusammengesetzten Funktionen zu prüfen, ist das folgende Resultat sehr hilfreich. Hier sind I, J offene Intervalle in $\mathbb{R}$.

Satz 6.11. *(a) Sind die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar im Punkt $p \in I$, so sind auch die Funktion $f + g, f - g$ und $f \cdot g$ in p differenzierbar. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in p. Ferner gilt* *in diesen Fällen*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(p) &= f'(p) \pm g'(p), && \textit{(Summenregel)} \\
(f \cdot g)'(p) &= f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p), && \textit{(Produktregel)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(p) &= \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2} && \textit{(Quotientenregel).}
\end{aligned}$$

(b) Gilt $f : I \to J$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und ist f differenzierbar im Punkt $p \in I$ und g differenzierbar im Punkt $f(p)$, so ist die Funktion $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt p und es gilt

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p). \qquad \textit{(Kettenregel)}$$

Die Kettenregel besagt, dass die Ableitung von $g \circ f$ das Produkt aus der Ableitung der äußeren Funktion g (an der Stelle $f(p)$) und der Ableitung der inneren Funktion f (an der Stelle p) ist.

Teilbeweis. Wir beweisen exemplarisch die Produktregel. Dazu sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $I \setminus \{p\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Dann folgt aufgrund unserer Differenzierbarkeitsvoraussetzung und der Stetigkeit von g in p

$$\begin{aligned}
\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(p)}{x_n - p} &= \frac{f(x_n)g(x_n) - f(p)g(p)}{x_n - p} \\
&= \frac{(f(x_n) - f(p))g(x_n) + f(p)(g(x_n) - g(p))}{x_n - p} \\
&= \underbrace{\frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p}}_{\overset{n\to\infty}{\to} f'(p)} \cdot \underbrace{g(x_n)}_{\overset{n\to\infty}{\to} g(p)} + f(p) \cdot \underbrace{\frac{g(x_n) - g(p)}{x_n - p}}_{\overset{n\to\infty}{\to} g'(p)},
\end{aligned}$$

d.h. aus Satz 4.32 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(p)}{x_n - p} = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

Aus dem vorherigen Satz folgt zum Beispiel, dass jede Polynomfunktion und jede rationale Funktion differenzierbar ist.

BEACHTE. Die Exponentialfunktion ist ein Grenzwert von Polynomen mit wachsendem Grad:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Würde sich die Summenregel auch auf diesen Fall übertragen, so erhielten wir:

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\exp(x).\end{aligned}$$

Dies ist tatächlich richtig, die Exponentialfunktion ist differenzierbar und es gilt $\exp'(x)=\exp(x)$. Allerdings ist die Begründung so nicht ausreichend, denn die Summenregel aus Satz 6.11 überträgt sich unmittelbar nur auf die Summe von endlich vielen Funktionen. Das Problem hier ist, dass wir zwei Grenzwertprozesse vertauschen, nämlich einmal die Ableitungsbildung und die Bildung des Grenzwertes $n\to\infty$. Und beim Vertauschen von Grenzwerten können Dinge schief gehen, wie wir oben schon einmal diskutiert hatten.

Anhand der ersten und zweiten Ableitung können wir Aussagen zum Wachstums- und Krümmungsverhalten einer Funktion machen. So gilt zum Beispiel

Satz 6.12. *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar. Ist $f'(x)>0$ für alle $x\in(a,b)$, so ist f streng monoton wachsend.*

Entsprechend ist f streng monoton fallend, wenn $f'(x)<0$ für alle $x\in(a,b)$. Dies folgt aus dem vorherigen Resultat, wenn man dieses auf die Funktion $-f$ anwendet.

Aus Zeitgründen können wir auf diese und ähnliche Resultate in dieser Vorlesung leider nicht mehr eingehen.

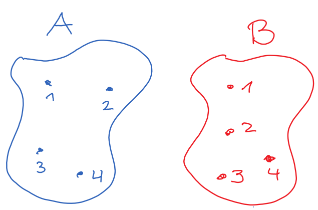
—Ende Vorlesung 27—

7. Vergleich unendlicher Mengen

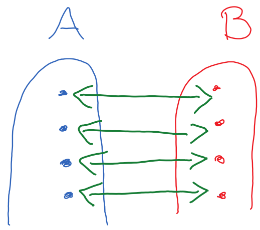
In diesem kurzen letzten Abschnitt der Vorlesung wollen wir noch einmal über Mengen sprechen und uns überlegen, wie man die Größe von unendlichen Mengen vergleichen kann. Dazu beginnen wir mit einer kurzen Geschichte:

> *Im Hotel Hilbert gibt es unendlich viele Zimmer, durchnummeriert mit*
>
> $$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$
>
> *Gerade sind alle Zimmer belegt. Dummerweise kommt in diesem Moment ein neuer Gast im Hotel an. Den Hotelier stört dies jedoch nicht. Er gibt einfach per Lautsprecher durch, dass jeder Gast ins benachbarte Zimmer aufrücken soll, d.h.*
>
> $$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 4, \ldots$$
>
> *Alle bisherigen Gäste haben also weiterhin ein Zimmer und der neue Gast bekommt das freie Zimmer 1. In dem Moment kommt ein Bus mit hundert weiteren Gästen. Der Hotelier greift wieder zur Sprechanlage und sagt an, dass alle Gäste um 100 Zimmer aufrücken sollen, d.h.*
>
> $$1 \to 101, 2 \to 102, 3 \to 103, \ldots$$
>
> *Die nun freien Zimmer 1-100 werden unter den 100 neuen Gästen aufgeteilt. Auch bei der Ankunft eines Busses mit unendlich vielen Passagieren, durchnummeriert durch* $1, 2, 3, 4, \ldots$ *hat der Hotelier die richtige Idee (**Quiz:** Welche?) und kann die Neuankömmlinge aufteilen. Aber was würde wohl passieren, wenn in dem Bus soviele Passagiere sitzen, wie es rationale oder reelle Zahlen gibt? Wäre der Hotelier nach wie vor in der Lage, die Passagiere als Gäste in sein Hotel aufzunehmen? Dies wollen wir nun klären.*

Um die Anzahl der Elemente zweier endlicher Mengen A und B zu vergleichen, können wir einfach die jeweiligen Elemente zählen und die Ergebnisse vergleichen.



Sind die Mengen nicht endlich, so schlägt diese Methode fehl. Allerdings kann man auch anders vorgehen: Wir bilden einfach Paare von Elementen aus A und B. Jedem Element von A ordnen wir genau ein Element von B zu und umgekehrt. Wenn bei dieser



Eine Bijektion zwischen A und B

Paarbildung alle Elemente von A und B berücksichtigt werden, sind die Mengen gleich groß.

In diesem Fall haben wir durch die Paarbildung die Elemente von A bijektiv auf die Elemente von B abgebildet. Genau dies benutzen wir nun für die folgende Definition.

Definition 7.1. (i) Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, falls es eine bijektive Abbildung (Bijektion) von A auf B gibt.
(ii) Eine Menge A heißt **abzählbar**, falls sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist.
(iii) Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar ist, heißt **überabzählbar**.

Abzählbare Mengen sind also (im Sinne gleicher Mächtigkeit) genauso groß wie die Menge der natürlichen Zahlen, während überabzählbare Mengen größer sind. Eine Menge A ist genau dann abzählbar, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, die jeder natürlichen Zahl genau ein Element aus A zuordnet (und umgekehrt). Man kann A dann also schreiben als

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$

wobei $a_1 = f(1), a_2 = f(2)$, usw. Man kann A also im wahrsten Sinne des Wortes „abzählen“.

Betrachten wir einige Beispiele für abzählbare Mengen:

- die geraden Zahlen $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
- die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

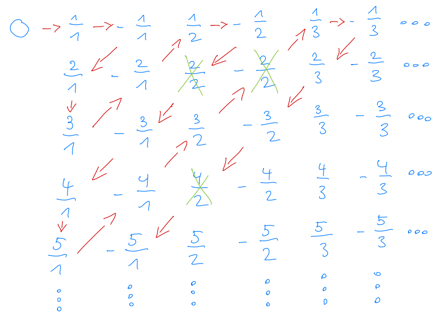
Quiz: Geben Sie eine explizite Bijektion von $\mathbb{N}$ auf die jeweilige Menge an.

BEACHTE. Die beiden obigen Beispiele zeigen, dass eine unendliche Menge gleichmächtig zu einer echten Teilmenge seiner selbst sein kann. Für endliche Mengen ist dies nicht möglich!

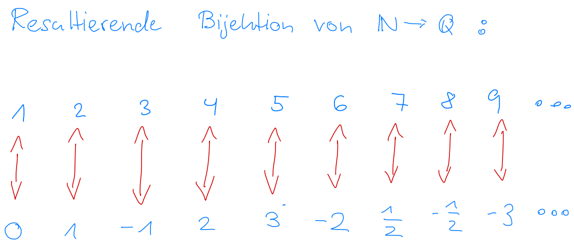
Schon etwas überraschender ist vielleicht der folgende Satz.

Satz 7.2. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Wir müssen die rationalen Zahlen auf eine systematische Weise abzählen und schreiben dafür alle Zahlen nach folgendem Schema in eine „unendliche“ Tabelle: In die erste Zeile kommt die 0 und dann alle Brücher mit Zähler 1, wobei wir die Brüche mit abwechselnden Vorzeichen und steigendem Zähler notieren. In die zweite Zeile kommen analog alle Brüche mit Zähler 2 usw. Nun durchlaufen wir diese Tabelle diagonal, wie in der Zeichnung angegeben, und überspringen dabei alle Brüche, die nicht in gekürzter Form vorliegen. Da auf diese Weise jede rationale Zahl genau einmal durchlaufen wird,



erhalten wir tatsächlich die gesuchte Abzählung von $\mathbb{Q}$, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$.



Die rationalen Zahlen sind also im Sinne der Mächtigkeit genauso groß wie die natürlichen Zahlen. Man nennt die im Beweis verwendete Methode **Cantors 1. Diagonalverfahren**.

Der vorherige Satz könnte zu der Vermutung führen, dass es für unendliche Mengen gar keine Abstufungen gibt und jede solche Menge abzählbar ist. Dass dies nicht so ist, wurde ebenfalls zuerst von Cantor bewiesen, der zeigte, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar sind.

Satz 7.3. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Die reellen Zahlen sind also im Sinne der Mächtigkeit echt größer als die rationalen und die natürlichen Zahlen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass das Intervall $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ nicht abzählbar ist. Dies beweisen wir mit einem Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, das Intervall sei abzählbar. Dann können wir die Elemente des Intervalls auflisten, d.h.

$$(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

und jede reelle Zahl im Intervall $(0,1)$ muss mit genau einer der Zahlen x_n übereinstimmen. Wir werden im Folgenden eine Zahl $x \in (0,1)$ konstruieren, für die das nicht zutrifft. Dieser Widerspruch zeigt dann, dass unsere anfängliche Annahme falsch war und das Intervall $(0,1)$ tatsächlich nicht abzählbar ist.

Dazu bemerken wir zunächst, dass für jede der Zahlen x_n eine eindeutige Dezimalbruchdarstellung existiert (jedenfalls dann, wenn wir stets die Darstellung wählen, die keine 9er Periode enthält, d.h. zum Beispiel $1,000\ldots$ statt $0,999\ldots$ usw.)

$$\begin{array}{ccl}
x_1 & = & 0, z_{1,1}\, z_{1,2}\, z_{1,3} \ \cdots \\
x_2 & = & 0, z_{2,1}\, z_{2,2}\, z_{2,3} \ \cdots \\
x_3 & = & 0, z_{3,1}\, z_{3,2}\, z_{3,3} \ \cdots \\
\vdots & & \vdots \\
x_n & = & 0, z_{n,1}\, z_{n,2}\, z_{n,3} \ \cdots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Nun sei

$$d_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_{n,n} = 2 \\ 2, & \text{falls } z_{n,n} \neq 2 \end{cases}$$

und

$$x = 0, d_1\, d_2\, d_3\ \ldots$$

Dann ist x eine Zahl in eindeutiger Dezimaldarstellung (die Ziffer 9 taucht niemals auf), $x \in (0,1)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x \neq x_n$, denn die n-te Nachkommastelle von x und x_n sind verschieden.

Die Beweismethode im vorherigen Beweis ist als **Cantors 2. Diagonalverfahren** in die Mathematikgeschichte eingegangen.

> *Der Hotelier im Hotel Hilbert hat also auch im Falle eines ankommenden Busses mit rational-vielen Passagieren keine Probleme, alle unterzubringen. Erst bei Ankunft von reell-vielen Personen muss er sein Hotel für voll erklären.*

—Ende Vorlesung 28—