Skript zur

Maß- und Integrationstheorie

Marcel Hansmann

Stand vom 9. Februar 2024

Dies ist ein Skript zur gleichnamigen Vorlesung, die ich an der TU Chemnitz in den Wintersemestern 2023/24 und 2021/22 gehalten habe. Der Inhalt orientiert sich zum Teil an den Manuskripten von Prof. Peter Stollmann und Prof. Thomas Kalmes zur gleichen Veranstaltung aus vorhergehenden Semestern. Der Text ist nur oberflächlich Korrektur gelesen und nur zum internen Gebrauch gedacht. Für Kommentare und Korrekturen bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1

2. Sigma-Algebren 6

3. Messbare Abbildungen 14

4. Maße 22

5. Integrale nicht-negativer Funktionen 33

6. Integrierbare Funktionen 48

7. Eindeutigkeit von Maßen 61

8. Produkträume 67

9. Produktmaße 73

10. Der Transformationssatz 89

11. Räume integrierbarer Funktionen 99

12. Maße mit Dichten 111

13. Konstruktion und Regularität von Maßen 116

Literaturverzeichnis 132

1. Einleitung

Stichpunkte. Schwächen des Riemann-Integrals, Grundidee des Lebesgue-Integrals, Maßproblem, Banach-Tarski-Paradoxon

Das Ziel dieser Vorlesung ist die Vermittlung von fundamentalen Begriffen und Resultaten der Maß- und Integrationstheorie. Beginnen wir mit zwei Beispielen, die andeuten, warum ein über das Riemann-Integral hinausgehender Integralbegriff überhaupt erforderlich ist.

(i) **Vertauschung von Grenzwerten:** Sind die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und konvergiert diese Folge *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, so ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Aber: auf die sehr starke Forderung der gleichmäßigen Konvergenz kann hier in der Regel nicht verzichtet werden. Zum Beispiel existieren Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (siehe das nachfolgende Beispiel 1.1), so dass

a) für alle $x \in [0,1]$ der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert,

b) für alle $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le 1 \quad \text{und damit auch} \quad 0 \le f(x) \le 1,$$

c) aber die Grenzfunktion f ist nicht Riemann-integrierbar.

Aus $f_n \le f_{n+1}$ und $0 \le f_n \le 1$ folgt aber, dass auch die Integralfolge $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ monoton wächst und beschränkt ist, d.h. der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ existiert.

Frage: Sollte es nicht möglich sein, den Integralbegriff so zu erweitern, dass auch in diesem Fall f integrierbar ist und

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \quad ?$$

Beispiel 1.1. Sei $\mathbb{Q} \cap [0,1] =: \{q_1, q_2, \ldots\}$ und $f_n = \mathbb{1}_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$ die charakteristische Funktion von $\{q_1, \ldots, q_n\}$, d.h.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \ldots, q_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}. \end{cases}$$

Jedes f_n ist eine Treppenfunktion (also Riemann-integrierbar), die $\mathrm{f_n}$'s sind monoton wachsend und konvergieren punktweise gegen die nicht-Riemann integrierbare Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

(ii) **Wahrscheinlichkeiten**: Die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig gewählte reelle Zahl $x \in [0,1]$ gilt, dass $x^2 > 1/4$ ist, ist $1/2$. Denn diese Eigenschaft wird von den Zahlen im Intervall $(1/2, 1]$ erfüllt und dieses Intervall hat die Länge $1/2$. Dies können wir auch als Integral ausdrücken:

$$1/2 = \int_{1/2}^{1} 1\, dx =: \int_{(1/2,1]} 1\, dx.$$

Was ist aber etwa die Wahrscheinlichkeit, dass für ein zufällig gewähltes $x \in [0,1]$ in der Ternärdarstellung $x = 0, a_1 a_2, \ldots$ mit $a_i \in \{0,1,2\}$ keines der a_i gleich 1 ist? Hier müssten wir die „Länge“ der sogenannten Cantor-Menge[1]

$$\mathcal{C} := \{x \in [0,1] : \text{ in der Tertiärdarstellung von } x \text{ taucht keine } 1 \text{ auf}\}$$

bestimmen, also so etwas wie $\int_{\mathcal{C}} 1\, dx$.

Frage: Kann man diesem Integral einen Sinn geben?

Wie wir sehen werden, lassen sich die obigen Fragen mit Hilfe des von Henri Lebesgue zu Beginn des 20. Jahrhunderts eingeführten, heute nach ihm benannten, Lebesgue-Integrals (positiv) beantworten. Mehr noch, die von Lebesgue begründete Maß- und Integrationstheorie ist heutzutage von fundamentaler Bedeutung in weiten Teilen der Mathematik und ihren Anwendungen, so etwa

(i) in der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Theorie der stochastischen Prozesse,

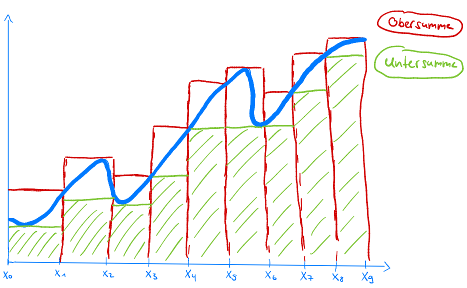
(ii) bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen und

(iii) in der theoretischen Physik (z.B. bei der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik).

Sie werden mit den Themen aus dieser Vorlesung also auch weiter intensiven Kontakt haben.

Lebesgues Grundgedanke

Das Riemann-Integral einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wird gebildet, indem man f durch Treppenfunktionen approximiert, die man durch Zerlegung von $[a,b]$ in immer kleinere Teilintervalle erhält.



Erinnerung. Ist das Infimum aller Obersummen (über alle Zerlegungen des Intervalls) gleich dem Supremum aller Untersummen, so heißt der gemeinsame Wert das Riemann-Integral von f und f heißt Riemann-integrierbar.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &:= \inf_{\mathcal{Z}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x) \right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x) \right) \cdot (x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

Das Problem hierbei ist, dass sehr stark „oszillierende“ Funktionen, wie etwa die Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$, auf diese Weise nicht integriert werden können. In der Tat gilt für die Dirichlet-Funktion, dass jede Obersumme den Wert 1 hat und jede Untersumme den Wert 0 (warum?).

Lebesgues Grundidee war nun, beim Approximationsprozess im Integral nicht den Definitionsbereich von f zu zerlegen, sondern den Wertebereich. Nehmen wir an $f : [a,b] \to [c,d]$ und $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ ist eine Unterteilung von $[c,d]$. Setzen wir

$$E_k := \{x \in [a,b] : y_k \le f(x) < y_{k+1}\}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

[1] Nach Georg Cantor.

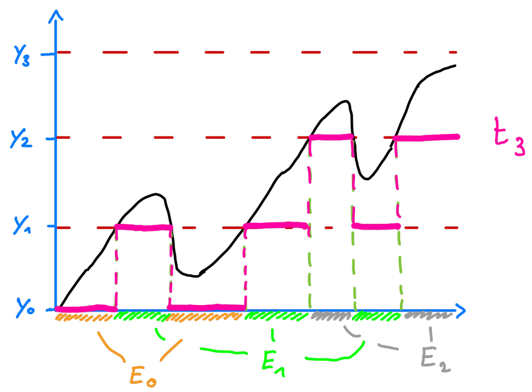
so ist die Funktion

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mathbb{1}_{E_k}(x)$$

eine Approximation von f (von unten), deren Lebesgue-Integral als

$$\int t_n \, d\lambda := \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot m(E_k)$$

definiert ist. Hierbei ist $m(E_k)$ das Maß (die Länge) der Menge E_k.



Die Idee des Lebesgue Integrals

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} = 0 \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus\mathbb{Q}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$$

ergibt sich als Wert des Lebesgue-Integrals

$$\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]} \, d\lambda = 0 \cdot m([a,b] \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot m(\mathbb{Q} \cap [a,b])$$

Welche Werte sollten wir dem Maß der hier auftretenden Mengen wohl zuordnen?

Wie wir im Beispiel sehen, müssen die $\mathrm{E_k}$'s nun keine Intervalle mehr sein. Es ist also gar nicht so offensichtlich, was das Maß dieser Mengen eigentlich sein soll.

Das Maßproblem

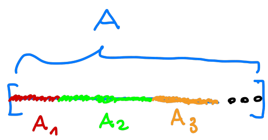
Stellen wir uns also die Aufgabe einen sinnvollen Maßbegriff auf $\mathbb{R}$ einzuführen. Wir suchen also eine Funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$, die unsere intuitive Idee einer Länge verallgemeinert. Hierbei ist $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ und $[0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$.[2] Folgende Eigenschaften sollte m mindestens besitzen:

(i) (**Normiertheit**) Das Maß eines Intervalls entspricht seiner Länge:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad m((a,b]]) = b - a.$$

(ii) (**σ-Additivität**) Setzt sich eine Menge aus abzählbar vielen disjunkten Mengen zusammen, so ist das Gesamtmaß gleich der Summe der Einzelmaße.

[2]Wir werden später genauer klären, wie wir mit '∞' rechnen wollen. Für den Moment ignorieren wir dies ein wenig.

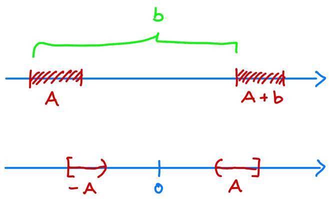


Genauer: Die Mengenfolge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bilde eine **Partition** der Menge A, d.h. die A_j sind paarweise disjunkt (also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$) und $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j = A$. Dann gilt

$$m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

Beachte: Wählt man alle bis auf endlich viele Mengen gleich $\emptyset$, so sehen wir, dass aus der σ-Additivität und der Nulltreue auch die endliche Additivität folgt.

(iii) (**Bewegungs-Invarianz**) Spiegelungen und Verschiebungen ändern das Maß nicht:



Für $b \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$m(A+b) = m(A) \qquad m(A) = m(-A).$$

Hierbei ist $A + b = \{a + b : a \in A\}$ und $-A = \{-a : a \in A\}$.

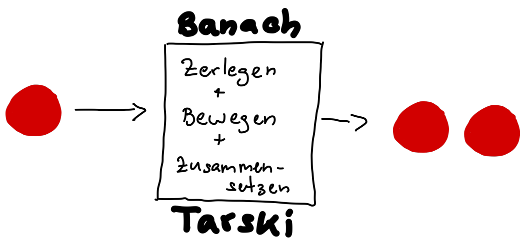
Die Konstruktion einer Funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii) nennt man auch das **Maßproblem** auf $\mathbb{R}$. Leider ist dieses Problem unlösbar!

Satz 1.2. Es existiert keine Funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii).

Wir beweisen diesen Satz unter Verwendung eines höchst merkwürdigen Resultats der Mengenlehre von Banach und Tarski. Dazu nennen wir $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine **Bewegung**, falls $\beta(x) = Qx + b$ für eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$, ein $b \in \mathbb{R}^d$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Satz (Banach-Tarski Paradoxon). Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ Mengen mit nicht-leerem Inneren. Dann existiert eine abzählbare Menge I, eine Partition $(A_i)_{i\in I}$ von A und Bewegungen $\beta_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so dass $(\beta_i(A_i))_{i\in I}$ eine Partition von B ist. Im Falle $d \geq 3$ kann I sogar endlich gewählt werden.

Das Banach-Tarski Paradoxon besagt zum Beispiel im Falle $d = 3$, dass wir die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ in endlich viele Teilmengen zerlegen können und diese, nach einer Rotation und Verschiebung, so neu zusammensetzen können, dass zwei Kopien der Einheitskugel herauskommen.



Verrückt, oder? Tatsächlich sind die Mengen, die bei der Partitionierung auftauchen, höchst unanschaulich. Ihre Konstruktion ist alles andere als explizit und basiert auf dem sogenannten **Auswahlaxiom** der Mengenlehre.

Beweis (von Satz 1.2). Sei $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ eine Funktion mit den obigen drei Eigenschaften. Wenden wir das Banach-Tarski Paradoxon mit $A = (0, 1]$ und $B = (0, 2]$ an, so existiert eine Partion $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $(0, 1]$ und Bewegungen $\beta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, so dass $(\beta_i(A_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Partition von $(0, 2]$ ist. Man beachte hierbei, dass eine Bewegung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form $x \mapsto \pm x + b$ ist. Mit der Normiertheit, σ-Additivität und Bewegungsinvarianz von m folgt:

$$2 = m([(0, 2]) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\beta_i(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m((0, 1]) = 1,$$

d.h. wir erhalten einen Widerspruch. Eine solche Funktion m kann also nicht existieren. $\square$

Konsequenz der Unlösbarkeit des Maßproblems

Unser Ausweg aus der Unlösbarkeit des Maßproblems ist, dass wir nicht mehr versuchen, allen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Maß zuzuordnen, sondern nur noch einer genügend großen Klasse, den sogenannten Lebesgue-messbaren Mengen. Dies führt uns automatisch zu sogenannten **σ-Algebren**, die wir uns im nächsten Abschnitt in einem abstrakten Rahmen ansehen werden.

Die Tatsache, dass wir nicht allen Mengen ein (Lebesgue-)Maß zuordnen können, wird auch zur Folge haben, dass nicht alle Funktionen (Lebesgue-)integrierbar sein werden. Denn in unserer intuitiven Beschreibung des Lebesgue-Integrals von oben haben wir schon gesehen, dass für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ zumindest die Mengen

$$E_k := f^{-1}([y_k, y_{k+1})) := \{x \in [a, b] : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\},$$

also die Urbilder von Intervallen, messbar sein müssen, denn ihr Maß taucht in der Definition des Integrals auf. Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir später **messbare Funktionen**. Auch diese schauen wir uns in Abschnitt 3 zunächst in einem abstrakten Rahmen an, bevor wir ab Abschnitt 4 mit der eigentlichen Maß- und Integrationstheorie beginnen.

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Bemerkung zum Maßproblem in höheren Dimensionen). Das Banach-Tarski Paradoxon zeigt, dass das Maßproblem auch in höheren Dimensionen unlösbar ist, d.h. auch für $d \geq 2$ existiert keine σ-additive und bewegungsinvariante Funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, die Quadern

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d], \quad a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$$

ihr elementargeometrisches Volumen zuordnet (d.h. $m((a, b]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d)$). Im Falle $d \geq 3$ ist das Maßproblem selbst dann unlösbar, wenn wir die Forderung der σ-Additivität fallenlassen und nur noch die endliche Additivität des Maßes fordern würden.

2. Sigma-Algebren

Stichpunkte. Mengensysteme, Sigma-Algebren, messbare Mengen und Räume, Spur-Sigma-Algebra, Schnitt von Sigma-Algebren, erzeugte Sigma-Algebra, Erzeuger, Prinzip der guten Mengen, Borel-Sigma-Algebra, Borel-Mengen, Erzeuger der Borel-Sigma-Algebra auf $\mathbb{R}$

Im Folgenden sei X eine beliebige Menge. Ihre Potenzmenge notieren wir als

$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}.$$

Jede Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nennen wir ein **Mengensystem** auf (oder in) X. Dies ist also eine Menge, deren Elemente selbst Teilmengen von X sind.

Beispiel 2.1. (i) Ein Mengensystem auf $X = \{1,2,3\}$ ist z.B. $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{1\},\emptyset\}$.

(ii) Ordnen wir $\mathcal{P}(X)$ mittels der Mengeninklusion $\subseteq$ partiell, so sind $\emptyset$ und $\mathcal{P}(X)$ das kleinste bzw. größte Mengensystem auf X.

Welche Eigenschaften sollte man sinnvollerweise von einem Mengensystem $\mathcal{A}$ auf X fordern, deren Mengen wir später ein Maß zuordnen wollen? Sicher doch die folgenden: Wenn $A, B \in \mathcal{A}$, so sollte auch gelten

$$A \cup B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

Mit der Vereinigung und dem Schnitt zweier Mengen ist dann natürlich auch die Vereinigung und der Schnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$. Dies genügt uns aber nicht, denn es stellt sich heraus, dass die Theorie erst dann wirklich gut funktioniert, wenn man auch abzählbare Vereinigungen und Schnitte mit einbezieht (das macht auch anschaulich Sinn, z.B. kann ein Kreis durch abzählbar viele Rechtecke approximiert und sein Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte der Rechtecke berechnet werden).

Definition 2.2. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt eine **σ-Algebra** auf (oder über) X, falls gilt:

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A}$[a] $\quad \Rightarrow \quad \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

In diesem Fall heißt das Paar $(X, \mathcal{A})$ **Messraum** oder **messbarer Raum** und die Elemente $A \in \mathcal{A}$ heißen **($\mathcal{A}$-) messbare Mengen**.

[a] Eine Folge in einer Menge M ist eine solche, deren Glieder alle Element von M sind. Hier muss also gelten $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man nennt die Eigenschaften (ii) und (iii) **Stabilität** oder **Abgeschlossenheit** von $\mathcal{A}$ bezüglich der Komplementbildung bzw. bezüglich abzählbarer Vereinigungen.

Beispiel 2.3. Auf $X = \{1,2,3\}$ ist $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{1\},\emptyset\}$ keine σ-Algebra (warum?), aber z.B. $\mathcal{A}' = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{3\},\emptyset\}$.

Tatsächlich folgen aus den drei definierenden Eigenschaften einer σ-Algebra schon alle der oben erwähnten erwünschten Eigenschaften für ein System messbarer Mengen.

Proposition 2.4. Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Dann gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

(iii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, so gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Beweis. (i) Wegen der ersten Eigenschaft einer σ-Algebra gilt $X \in A$, also wegen der zweiten auch $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Wählt man $A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset, n \geq 3$, so folgt

$$A \cup B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A},$$

wegen der dritten Eigenschaft einer σ-Algebra. Daraus folgt dann mit den de-Morganschen Regeln aufgrund der schon bewiesenen Resultate und der zweiten Eigenschaft einer σ-Algebra auch $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ und damit $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

(iii) $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c)^c \in \mathcal{A}$. □

Bemerkung 2.5. Aus der vorherigen Proposition folgt auch sofort, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter beliebigen endlichen Vereinigungen ist, d.h. mit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt auch $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. Ferner ist $\mathcal{A}$ auch abgeschlossen unter beliebigen abzählbar unendlichen Vereinigungen (oder Schnitten). Um dies zu sehen, sei I eine abzählbar unendliche Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie in $\mathcal{A}$. Dann existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to I$, d.h. für jedes $i \in I$ existiert genau ein $j \in \mathbb{N}$ mit $A_i = A_{f(j)} \in \mathcal{A}$. Es folgt

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{f(j)} \in \mathcal{A}.$$

Beispiel 2.6. (i) Die kleinste σ-Algebra auf X ist $\{\emptyset, X\}$, die größte $\mathcal{P}(X)$ (jeweils bezüglich $\subseteq$).

(ii) Für $A \subseteq X$ ist $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ eine σ-Algebra auf X (nämlich die kleinste, die A enthält). Oben hatten wir schon das Beispiel $X = \{1,2,3\}$ und $A = \{1,2\}$, d.h. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{3\}\}$.

(iii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $Y \subseteq X$, so ist

$$\mathcal{A}|_Y := \{Y \cap A : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Y, genannt die **Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ auf Y** oder die **Einschränkung von $\mathcal{A}$ auf Y**. Ist $Y \in \mathcal{A}$ selbst messbar, so gilt

$$\mathcal{A}|_Y = \{B : B \in \mathcal{A} \text{ und } B \subseteq Y\}.$$

Beispielsweise ist die Einschränkung der σ-Algebra $\mathcal{A}$ aus Teil (ii) auf die Menge $\{2,3\}$ gerade Übung

$$\mathcal{A}|_{\{2,3\}} = \{\emptyset, \{2,3\}, \{2\}, \{3\}\} = \mathcal{P}(\{2,3\}).$$

(iv) Keine σ-Algebren auf $\mathbb{R}$ sind z.B.

$$\{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ offen }\} \quad \text{oder} \quad \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ Interval }\}. \text{ Warum?}$$

Dass es sich bei den Intervallen nicht um eine σ-Algebra handelt ist insofern problematisch, da wir es uns ja als Ziel gesetzt haben, auf $\mathbb{R}$ ein Maß zu konstruieren, das Intervallen ihre Länge zuordnet. Wir müssen also zunächst noch eine σ-Algebra konstruieren, die alle Intervalle enthält (natürlich wäre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine solche σ-Algebra, aber wegen Satz 1.2 existiert auf dieser kein passendes Maß). Hierbei wird uns helfen, dass der Schnitt von σ-Algebren wieder eine σ-Algebra ist.

Satz 2.7. Es sei X eine Menge und $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge von σ-Algebren auf X. Dann ist

$$\bigcap \mathcal{M} := \{A \subseteq X : A \in \mathcal{A} \text{ für alle } \mathcal{A} \in \mathcal{M}\}$$

eine σ-Algebra auf X. Ist insbesondere $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf X, so ist auch

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \bigcap \{\mathcal{A}_i : i \in I\}$$

eine σ-Algebra auf X.

Beispiel 2.8. Nehmen wir $X = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{M} := \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ mit

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_2 := \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 3\}\},$$

so ergibt sich $\bigcap \mathcal{M} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X\}$.

Beweis (von Satz 2.7). Wir prüfen die drei Axiome:

(i) Für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ gilt $X \in \mathcal{A}$, d.h. $X \in \bigcap \mathcal{M}$.

(ii) Sei $A \in \bigcap \mathcal{M}$. Dann ist $A \in \mathcal{A}$ für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, also auch $A^c \in \mathcal{A}$ für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$. Dies zeigt $A^c \in \bigcap \mathcal{M}$.

(iii) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcap \mathcal{M}$, so ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Folge in $\mathcal{A}$ für jedes $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$. Aber damit ist auch $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, d.h. $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{M}$.

□

Damit sind wir nun auch in der Lage, zu jedem Mengensystem eine das System umfassende σ-Algebra zu bilden.

Korollar 2.9. Es sei $\mathcal{E}$ ein Mengensystem auf der Menge X.

(a) Das Mengensystem

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

ist die kleinste σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält, die sogenannte **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra**. Hierbei bedeutet „kleinste“, dass die folgende Implikation gilt:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}.$$

(b) Es gilt

$$(i)\quad \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}), \qquad (ii)\quad \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}), \qquad (iii)\quad \sigma(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E}).$$

Beweis. Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X ist, die $\mathcal{E}$ enthält, ist die Menge

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

nicht-leer, d.h. nach Satz 2.7 ist $\sigma(\mathcal{E}) = \cap\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X. Offensichtlich gilt auch $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Ist schließlich $\mathcal{A}$ irgendeine σ-Algebra auf X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, so gilt $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, d.h. $\sigma(\mathcal{E}) = \cap\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$. Die drei verbliebenen Eigenschaften folgen dann sofort. □

Bemerkung 2.10. (i) Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, so heißt $\mathcal{E}$ ein **Erzeuger** von $\mathcal{A}$. Diese sind, mit Ausnahme des Falles $X = \emptyset$, $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ nicht eindeutig. Zum Beispiel gilt für $A \subseteq X$, dass

$$\sigma(\{A\}) = \sigma(\{A^c\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}\,.$$

(ii) Man wendet das vorherige Resultat oft in der folgenden Form an: Wir möchten zeigen, dass das Mengensystem $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra enthält, dass also $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt. Dies folgt, wenn wir zeigen

1. $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra, und
2. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.

Wie sich eine erzeugte σ-Algebra in Bezug auf die Spur-Bildung verhält (vergleiche Beispiel 2.6 (iii)), zeigt das nächste Resultat.

Satz 2.11. Es sei $\mathcal{E}$ ein Mengensystem auf X und $Y \subseteq X$. Ferner sei

$$\mathcal{E}|_Y := \{Y \cap E : E \in \mathcal{E}\}$$

die Einschränkung von $\mathcal{E}$ auf Y. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{E})|_Y = \sigma(\mathcal{E}|_Y).$$

Man beachte, dass es sich hierbei um σ-Algebren auf Y handelt.

Beispiel 2.12. Sei $X = \{1,2,3\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,2\}\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}\}$. Nun sei $Y = \{2,3\}$. Dann ist

$$\mathcal{E}|_Y = \{\{2\}\}$$

und

$$\sigma(\mathcal{E}|_Y) = \{\emptyset, Y, \{2\}, \{3\}\} = \sigma(\mathcal{E})|_Y.$$

Beweis (von Satz 2.11). 1. Nach Definition gilt

$$\mathcal{E}|_Y = \{Y \cap E : E \in \mathcal{E}\} \subseteq \{Y \cap E : E \in \sigma(\mathcal{E})\} = \sigma(\mathcal{E})|_Y.$$

Da $\sigma(\mathcal{E})|_Y$ eine σ-Algebra ist, folgt $\sigma(\mathcal{E}|_Y) \subseteq \sigma(\mathcal{E})|_Y$ nach Bemerkung 2.10 (ii).

2. Für die umgekehrte Inklusion $\sigma(\mathcal{E})|_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E}|_Y)$ ist nach Definition der linken Seite zu zeigen,

dass für alle $B \in \sigma(\mathcal{E})$ gilt, dass
$$Y \cap B \in \sigma(\mathcal{E}|_Y).$$
Setzen wir daher
$$\mathcal{G} := \{B \subseteq X : Y \cap B \in \sigma(\mathcal{E}|_Y)\},$$
so ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$ zu zeigen.

3. Zunächst gilt für $B \in \mathcal{E}$, dass $Y \cap B \in \mathcal{E}|_Y \subseteq \sigma(\mathcal{E}|_Y)$. Dies zeigt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$. Wir zeigen nun noch, dass $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist. Mit Bemerkung 2.10 (ii) folgt dann, dass $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$. Wir prüfen die drei Eigenschaften einer σ-Algebra:

(i) Da $Y \cap X = Y \in \sigma(\mathcal{E}|_Y)$, folgt $X \in \mathcal{G}$.

(ii) Sei $B \in \mathcal{G}$. Dann gilt $Y \cap B \in \sigma(\mathcal{E}|_Y)$, also auch
$$Y \setminus (Y \cap B) = Y \setminus B = Y \cap (X \setminus B) \in \sigma(\mathcal{E}|_Y).$$
Dies zeigt $X \setminus B \in \mathcal{G}$.

(iii) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{G}$, so ist $(Y \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\sigma(\mathcal{E}|_Y)$, also auch
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y \cap B_n) = Y \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) \in \sigma(\mathcal{E}|_Y),$$
was $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}$ zeigt. □

Bemerkung 2.13. In Teil 2 des obigen Beweises haben wir das sogenannte **Prinzip der guten Mengen** verwendet. Um zu zeigen, dass die Elemente eines Mengensystems $\mathcal{M}$ eine gewünschte Eigenschaft besitzen, fasst man zunächst alle Mengen, die die Eigenschaft besitzen, zu einem neuen Mengensystem $\mathcal{G}$ zusammen (den guten Mengen) und zeigt dann, dass $\mathcal{G}$ eine gewisse 'Struktur' hat (hier, dass es sich um eine σ-Algebra handelt). Unter Verwendung dieser Struktur zeigt man dann, dass $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$.

Auf metrischen Räumen interessiert vor allem die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra.

Erinnerung. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt $U \subseteq X$ **offen**, falls
$$\forall x \in U \quad \exists r > 0 : \quad B(x, r) \subseteq U,$$
d.h. jeder Punkt von U ist in einer offenen Kugel $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ enthalten, die ganz in U liegt. Ferner heißt U **abgeschlossen**, falls $U^c = X \setminus U$ offen ist. Schließlich heißt U **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von U eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h. gilt $U \subseteq \cup_{i\in I} O_i$ für eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen, so existieren endlich viele Indices $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $U \subseteq \cup_{j=1}^n O_{i_j}$. Jede kompakte Menge in einem metrischen Raum ist abgeschlossen. Weiterhin ist jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wieder kompakt.

Definition 2.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt die von den offenen Mengen in X erzeugte σ-Algebra die **Borel-σ-Algebra** auf X.[a]. Sie wird mit $\mathcal{B}(X, d)$ (oder kurz $\mathcal{B}(X)$) bezeichnet und ihre Elemente heißen **Borel-Mengen** oder **Borel-messbare-Mengen** von X. Für den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik verwenden wir auch die Bezeichnung $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

[a]Benannt nach Émile Borel

Beispiel 2.15. (i) Alle abgeschlossenen Teilmengen A von X sind Borel-Mengen, denn $A = (A^c)^c$

und A^c ist offen, sofern A abgeschlossen ist. Damit sind alle einpunktigen Mengen $\{x\}, x \in X$, und somit auch alle abzählbaren Teilmengen von X Borel-Mengen. Da kompakte Mengen abgeschlossen sind, sind auch alle kompakten Mengen Borel-Mengen.

(ii) Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ sind darüber hinaus z.B. alle Intervalle Borel-messbar. Dies folgt für offene und abgeschlossene Intervalle unmittelbar und für halboffene, wie z.B. $(a, b], a < b$, durch einfache Argumente. Zum Beispiel

$$(a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a, b + 1/n).$$

(iii) Sind alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borel-Mengen? Die Antwort ist **Nein**, wie wir etwas später zeigen werden.

Proposition 2.16. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die Mengensysteme[a]

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X : U \text{ offen }\}, \mathcal{F} := \{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen }\} \text{ und } \mathcal{C} := \{K \subseteq X : K \text{ kompakt }\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{B}(X, d) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}).$$

Ist (X, d) σ-kompakt, d.h. $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ für eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von X, so gilt darüber hinaus auch

$$\mathcal{B}(X, d) = \sigma(\mathcal{C}).$$

[a] Im Französischen: ouvert = offen, fermée = abgeschlossen, compact = kompakt. Dies sollte die Terminologie erklären.

Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^d$ mit der euklidischen Metrik σ-kompakt (warum?).

Beweis. Da $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, genau dann, wenn A^c offen ist, gilt

$$\mathcal{F} = \{U^c : U \in \mathcal{O}\} \subseteq \sigma(\mathcal{O}),$$

d.h. auch $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{O})$. Analog sieht man $\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, d.h. $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{O}) =: \mathcal{B}(X, d)$. Ferner ist jede kompakte Menge in (X, d) abgeschlossen, d.h. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ und damit $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Ist schließlich (X, d) σ-kompakt (mit den K_n wie oben) und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist

$$A = \cup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n).$$

Die Mengen $A \cap K_n$ sind abgeschlossene Teilmengen der kompakten Mengen K_n, also selbst kompakt. Also ist $A \in \sigma(\mathcal{C})$ und damit $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ und $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$, was noch zu zeigen war. □

Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge des metrischen Raumes (X, d), so ist Y mit der Metrik $d|_{Y \times Y}$ selbst ein metrischer Raum. Die offenen Mengen in $(Y, d|_{Y \times Y})$ sind gerade von der Form $Y \cap O$ mit O offen in (X, d). Als Korollar von Satz 2.11 halten wir folgendes Resultat über die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(Y, d|_{Y \times Y})$ fest.

Korollar 2.17. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X, d)|_Y = \mathcal{B}(Y, d|_{Y \times Y}).$$

In Kurzschreibweise: $\mathcal{B}(X)|_Y = \mathcal{B}(Y)$.

Beweis. Ist $\mathcal{O}$ das Mengensystem der offenen Mengen in (X,d), so gilt nach Satz 2.11.

$$\mathcal{B}(X,d)|_Y = \sigma(\mathcal{O})|_Y = \sigma(\mathcal{O}|_Y) = \mathcal{B}(Y, d|_{Y\times Y}).$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass auf $\mathbb{R}$ die Borel-σ-Algebra tatsächlich schon von allen Intervallen erzeugt wird, d.h. sie ist die kleinste σ-Algebra, die alle Intervalle enthält. Damit haben wir einen ersten Schritt auf unserem Weg zum Lebesgue-Maß getan. Da es nicht schwieriger ist, betrachten wir im Folgenden gleich den $\mathbb{R}^d$. Dazu definieren wir für $a = (a_1,\dots,a_d), b = (b_1,\dots,b_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$a \le b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, 1 \le i \le d: \; a_i \le b_i$$

und analog $a < b$. Weiterhin definieren wir für $a \le b$ die **Quader**

$$[a,b] := [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_d,b_d] = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a \le x \le b\right\}$$

und analog $(a,b), (a,b]$ und $[a,b)$. Schließlich setzen wir noch

$$(-\infty, b) := (-\infty, b_1) \times \ldots \times (-\infty, b_d)$$

und analog $(-\infty,b], (a,\infty)$ und $[a,\infty]$.

Proposition 2.18. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ wird auch von den folgenden Mengensystemen erzeugt:

(i) $\left\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$.

(ii) $\left\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$.

(iii) $\left\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$.

(iv) $\left\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}^d, a \le b\right\}$.

(v) $\left\{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}^d\right\}$.

(vi) $\left\{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}^d\right\}$.

(vii) $\left\{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}^d\right\}$.

(viii) $\left\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}^d\right\}$.

Beweis. Wir zeigen nur, dass $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1)$ mit $\mathcal{E}_1 := \left\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$. Der Rest folgt dann leicht mit den Argumenten aus Beispiel 2.15 (ii). Übung

Da (a,b) offen in $\mathbb{R}^d$ ist, gilt offensichtlich $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{B}_d$, also auch $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{B}_d$. Wir zeigen nun noch, dass jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ Element von $\sigma(\mathcal{E}_1)$ ist. D.h. $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{O}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, was den Beweis komplettiert.

Sei also $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $x = (x_1,\dots,x_d) \in U$. Dann existiert eine offene Kugel um x, die ganz in U enthalten ist. Insbesondere kann $\varepsilon > 0$ so klein gewählt werden, dass

$$B(x, \sqrt{d}\cdot\varepsilon) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\|_2 := \left(\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} < \sqrt{d}\cdot\varepsilon \right\} \subseteq U.$$

Nun benutze die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ um zu eben diesen x und ε rationale $r_i, q_i \in \mathbb{Q}$ zu finden, mit

$$r_i \in (x_i - \varepsilon, x_i) \quad \text{und} \quad q_i \in (x_i, x_i+\varepsilon), \quad , i = 1,\dots,d.$$

Für $r_i < y_i < q_i$ gilt dann also insbesondere auch $x_i - \varepsilon < y_i < x_i + \varepsilon$. Wir setzen

$$r = (r_1,\dots,r_d), \quad q = (q_1,\dots,q_d)$$

und beachten, dass $x \in (r,q)$. Ferner folgt für $y \in (r,q)$ aus dem Gesagten, dass

$$\|x-y\|_2^2 = \sum_{n=1}^{d} |x_i - y_i|^2 < \varepsilon^2 \cdot d, \quad \text{d.h.} \quad y \in B(x, \sqrt{d} \cdot \varepsilon).$$

Insgesamt folgt also $x \in (r,q) \subseteq B(x, \sqrt{d} \cdot \varepsilon) \subseteq U$. Für ein beliebig gewähltes $x \in U$ haben wir also einen Quader (r,q) gefunden, mit $r, q \in \mathbb{Q}^d$, der x enthält und ganz in U liegt. Mit anderen Worten: definieren wir das Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{(r,q) \subseteq \mathbb{R}^d \ : \ r, q \in \mathbb{Q}^d, (r,q) \subseteq U\},$$

so gilt

$$U \subseteq \left(\bigcup_{(r,q) \in \mathcal{M}} (r,q) \right) \subseteq U, \quad \text{d.h.} \quad U = \bigcup_{(r,q) \in \mathcal{M}} (r,q).$$

Da jedes der Intervalle (r,q) Element von $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{M}$ abzählbar ist, folgt $U \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. Damit liegen alle offenen Mengen in der von $\mathcal{E}_1$ erzeugten σ-Algebra und damit auch $\mathcal{B}_d \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$. $\square$

3. Messbare Abbildungen

Stichpunkte. messbare Abbildung, Messbarkeit von Kompositionen, Charakterisierung von Messbarkeit über Erzeuger, Borel-messbar, erweiterte Borel-Sigma-Algebra und ihre Erzeuger, Messbarkeit erweiterter reellwertiger Funktionen, Erhalt von Messbarkeit unter algebraischen Operationen und Grenzwertprozessen.

Wir haben schon in der Einleitung kurz besprochen, dass die Grundidee des Lebesgue-Integrals darin besteht, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch geeignete Treppenfunktionen zu approximieren, die man durch eine immer feinere Zerlegung des Wertebereichs von f gewinnt (im Unterschied zum Riemann-Integral, wo der Definitionsbereich zerlegt wird). Wir haben auch gesehen, dass dieser Prozess nur dann funktionieren kann, wenn die Urbilder

$$f^{-1}(I) := \{x \in [a,b] : f(x) \in I\}$$

von Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ stets messbar sind. Diese Ausgangsidee führt uns zum abstrakten Begriff einer messbaren Funktion bzw. Abbildung.

Definition 3.1. Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt ($\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$)-**messbar** (oder kurz **messbar**), falls Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind, d.h.

$$\forall B \in \mathcal{B}: \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Man schreibt in diesem Fall auch „$f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ ist messbar“.

Bemerkung 3.2. (i) Für $f : X \to Y$ ist die mengenwertige **Urbildabbildung** durch

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

definiert. Die Urbildabbildung ist **operationstreu**, d.h. sie vertauscht mit Schnitten, Vereinigungen und Komplementen. Übung

(ii) Man beachte die Analogie zur Stetigkeit: Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zwischen metrischen Räumen ist stetig, falls die Urbilder *offener* Mengen wieder offen sind, d.h.

$$\forall B \subseteq Y \text{ offen}: \quad f^{-1}(B) \subseteq X \text{ ist offen}.$$

Beispiel 3.3. (i) Ist $y_0 \in Y$, so ist die **konstante Funktion**

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}), \quad x \mapsto f(x) := y_0$$

messbar, denn für $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} X, & y_0 \in B \\ \emptyset, & y_0 \notin B \end{cases}$$

und $X, \emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Für $A \subseteq X$ ist die **charakteristische Funktion**

$$\mathbb{1}_A : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1), \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$, denn für $B \in \mathcal{B}_1$ gilt

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} X, & \{0,1\} \subseteq B, \\ A, & 1 \in B, 0 \notin B, \\ A^c, & 0 \in B, 1 \notin B, \\ \emptyset, & \{0,1\} \subseteq B^c. \end{cases}$$

(iii) Sei $Y \subseteq X$ und $j : Y \to X, x \mapsto x$ die **Inklusionsabbildung**. Dann ist $j : (Y, \mathcal{A}|_Y) \to (X, \mathcal{A})$ messbar, denn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$j^{-1}(A) = Y \cap A \in \mathcal{A}|_Y.$$

(iv) Mit Hilfe von Beispiel (iii) lässt sich auch die Messbarkeit von **Funktionen** untersuchen, **die in Teilmengen abbilden**. Sei dazu wieder $Y \subseteq X$. Dann ist $f : (Z, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{A}|_Y)$ genau dann messbar, wenn

$$j \circ f : (Z, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{A})$$

messbar ist. Dies folgt aus der Gleichung

$$(j \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(j^{-1}(A)) = f^{-1}(Y \cap A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

(v) Statten wir Y aus mit der σ-Algebra $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, Y\}$, so ist jede Abbildung

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}_0)$$

messbar. Statten wir andererseits X aus mit der σ-Algebra $\mathcal{A}_0 = \mathcal{P}(X)$, so ist jede Abbildung

$$g : (X, \mathcal{A}_0) \to (Y, \mathcal{B})$$

messbar.

Die folgenden Eigenschaften sind (fast) offensichtlich. Die erste liefert die Möglichkeit, aus bekannten messbaren Funktionen neue zu konstruieren und die zweite erleichtert das Nachprüfen der Messbarkeit enorm.

Proposition 3.4. Die folgenden Aussagen gelten:

(i) Sind $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ und $g : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ messbar, so auch deren Komposition $g \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$.

(ii) Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$, so gilt

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}) \text{ ist messbar} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Es genügt also für die Messbarkeit zu überprüfen, dass die Urbilder messbarer Mengen *eines Erzeugers* wieder messbar sind.

Beweis. (i) Für $C \in \mathcal{C}$ ist $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, also $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$.

(ii) Die Richtung $\Rightarrow$ ist klar. Für die Rückrichtung benutzen wir wieder das Prinzip der guten Mengen, vergleiche Bemerkung 2.13: Man rechnet leicht nach, dass durch

$$\mathcal{F}(f) := \left\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$

eine σ-Algebra auf Y definiert wird. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}(f)$, d.h. auch $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}(f)$, was die Messbarkeit von f bedeutet. □ Übung

Im Falle, dass der Bildraum ein metrischer Raum ist, wollen wir diesen in Zukunft immer mit der Borel-σ-Algebra ausstatten. Dies gilt insbesondere auch für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (die wir unausgesprochen stets mit der Abstandsmetrik versehen).

Definition 3.5. Es sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum.

(i) Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, so nennen wir $f : X \to Y$ **$\mathcal{A}$-messbar**, falls

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}(Y, d_Y))$$

messbar ist.

(ii) Ist auch (X, d_X) ein metrischer Raum, so nennen wir $f : X \to Y$ **Borel-messbar**, falls

$$f : (X, \mathcal{B}(X, d_X)) \to (Y, \mathcal{B}(Y, d_Y))$$

messbar ist.

Mit dieser Terminologie sind etwa stetige und monotone Funktionen stets Borel-messbar.

Korollar 3.6. (i) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f Borel-messbar.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist g Borel-messbar.

Beweis. (i) Da f stetig ist, ist $f^{-1}(O)$ offen in X, also auch eine Borel-Menge, für jede offene Teilmenge $O \subseteq Y$. Da die Borel-σ-Algebra in Y von den offenen Mengen in Y erzeugt wird, folgt die Aussage aus Proposition 3.4 (ii).

(ii) Für eine monotone Funktion g ist das Urbild $g^{-1}(I)$ eines offenen Intervalls wieder ein Intervall und damit eine Borel-Menge. Wieder folgt die Messbarkeit aus Proposition 3.4 (ii). □

Da wir später auch Funktionen integrieren wollen, die die Werte $\pm\infty$ annehmen können, müssen wir über das Rechnen in der erweiterten reellen Achse und die erweiterte Borel-σ-Algebra sprechen.

Definition 3.7. (i) $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ heißt die **erweiterte reelle Achse**. Diese wird ausgestattet mit der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$, erweitert um die Relation $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner setzen wir

$$x + \infty := \infty + x := \infty \quad (x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$
$$x - \infty := x + (-\infty) := -\infty + x := -\infty \quad (x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

und (mit $+\infty := \infty$)

$$x \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot x := \begin{cases} \pm\infty, & x \in (0,\infty) \cup \{\infty\} \\ \mp\infty, & x \in (-\infty,0) \cup \{-\infty\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke $\infty + (-\infty)$ und $-\infty + \infty$ bleiben undefiniert.[a]

(ii) Wir definieren $[a,\infty] := [a,\infty) \cup \{\infty\}$ und analog $(a,\infty]$, $[-\infty,b]$ und $[-\infty,b)$.

(iii) Auf $\overline{\mathbb{R}}$ wird die **erweiterte Borel-σ-Algebra** definiert durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma\left(\{[a,\infty] : a \in \mathbb{R}\}\right).$$

Wir betrachten $\overline{\mathbb{R}}$ stets als mit dieser σ-Algebra ausgestatteten messbaren Raum.

[a] Die üblichen Rechenregeln wie Kommutativität, Assoziativität und Distributivität bleiben mit diesen Festsetzungen auch für $\overline{\mathbb{R}}$ gültig, **allerdings nur**, falls alle vorkommenden Größen auch definiert sind (damit $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ gilt, müssen also zum Beispiel $a+b$ und $a\cdot c + b\cdot c$ definiert sein). Vorsicht ist beim Kürzen geboten: aus $a\cdot\infty = b\cdot\infty$ folgt im Allgemeinen nicht, dass $a = b$.

Bemerkung 3.8. (i) Nach Satz 2.11 und Proposition 2.18 gilt

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\{[a,\infty] : a \in \mathbb{R}\}|_{\mathbb{R}}\right) = \sigma\left(\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Dies zeigt, dass unsere Definition der erweiterten Borel-σ-Algebra ganz natürlich ist.

(ii) Auch die Mengensysteme

$$\{(a,\infty] : a \in \mathbb{R}\},\ \{[-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\} \text{ und } \{[-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$$

sind Erzeuger von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

(iii) Es gilt Übung

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \left\{B \cup A : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \subseteq \{\infty,-\infty\}\right\}.$$

(iv) Wir können auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Metrik einführen, indem wir setzen

$$d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x,y \in \overline{\mathbb{R}},$$

wobei $\arctan(\pm\infty) := \pm\pi/2$. Dann gilt $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}},d)$ (ohne Beweis).

In der Folge wollen wir Messbarkeitseigenschaften von Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ diskutieren.

Bemerkung 3.9. Ist $j : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ die Inklusionsabbildung, so gilt nach Beispiel 3.3 (iv) für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, dass

$$f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

genau dann messbar ist, wenn dies für die Funktion

$$j \circ f : (X,\mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

der Fall ist (beachte $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}}$). Betrachten wir insbesondere eine Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, die die Werte $\pm\infty$ gar nicht annimmt (d.h. $g(X) \subseteq \mathbb{R}$), und fassen wir sie mittels der Vorschrift

$$g|^{\mathbb{R}} : X \to \mathbb{R}, \quad g|^{\mathbb{R}} := g$$

als Funktion mit Zielbereich $\mathbb{R}$ auf, so gilt $j \circ g|^{\mathbb{R}} = g$. Dies hat zur Folge, dass alle im Folgenden betrachteten Messbarkeitseigenschaften für Funktionen $(X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ analog für Funktionen $(X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gelten.

Definition 3.10. Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Abbildungen, so setzen wir

$$\begin{aligned} \{f \le a\} &:= f^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in X : f(x) \le a\}, \quad a \in \overline{\mathbb{R}}, \\ \{f \le g\} &:= \{x \in X : f(x) \le g(x)\} \end{aligned}$$

und ensprechend $\{f < a\}, \{f > a\}$ usw.

Proposition 3.11. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-messbar (d.h. f ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar).

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f > a\} \in \mathcal{A}$.

(iii) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \ge a\} \in \mathcal{A}$.

(iv) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \le a\} \in \mathcal{A}$.

(v) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f < a\} \in \mathcal{A}$.

Weiterhin ist in diesem Fall für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ die Menge $\{f = b\} \in \mathcal{A}$.

Beweis. Die Äquivalenz folgt sofort aus Prop. 3.4 (ii), der Def. 3.7 (iii) und Bem. 3.8 (iii). Ferner ist für $b \in \overline{\mathbb{R}}$ die Menge $\{b\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, also $\{f = b\} = f^{-1}(\{b\}) \in \mathcal{A}$, falls f $\mathcal{A}$-messbar ist. □

Die Messbarkeit einer Funktion ist eine sehr **stabile** Eigenschaft. Zum Beispiel bleibt sie unter den gewöhnlichen algebraischen Operationen erhalten.

Proposition 3.12. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien $\mathcal{A}$-messbar. Dann gilt:

(i) $\{f \le g\}, \{f < g\}, \{f = g\}, \{f \ne g\} \in \mathcal{A}$.

(ii) Für $c, d \in \mathbb{R}$ ist $c + d \cdot f$ ebenfalls $\mathcal{A}$-messbar.

(iii) $f \cdot g$ ist $\mathcal{A}$-messbar und $f + g$ ist $\mathcal{A}$-messbar, sofern definiert.[a]

[a] D.h. es kommt zum Beispiel nicht vor, dass $f(x_0) = +\infty$ und $g(x_0) = -\infty$ für ein $x_0 \in X$.

Beweis. (i) Da die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, gilt für $x \in X$, dass

$$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Q} : f(x) < q < g(x).$$

Also können wir schreiben

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\}).$$

Da nach Proposition 3.11 jede der Mengen $\{f < q\}$ und $\{q < g\}$ in $\mathcal{A}$ liegt und $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, folgt auch $\{f < g\} \in \mathcal{A}$. Hieraus folgt auch

$$\{f \geq g\} = \{f < g\}^c \in \mathcal{A}$$

und somit durch Vertauschen von f und g auch $\{f \leq g\} \in \mathcal{A}$. Schließlich gilt

$$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \{f \neq g\} = \{f = g\}^c \in \mathcal{A}.$$

Wir zeigen nun die Messbarkeit der Funktionen in (ii) und (iii) mittels Proposition 3.11. Beachte dazu, dass für $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar

$$\{f = \pm\infty\} \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \{a < f < \infty\} = f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

(ii) Da wir aus Beispiel 3.3 (i) bereits wissen, dass konstante Funktionen messbar sind, genügt es, den Fall $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu betrachten. Hier gilt für $a \in \mathbb{R}$ im Falle $d > 0$

$$\{(c + df) > a\} = \{df > a - c\} = \{f > (a - c)/d\} \in \mathcal{A},$$

und im Falle $d < 0$

$$\{(c + df) > a\} = \{df > a - c\} = \{f < (a - c)/d\} \in \mathcal{A}.$$

Aus Proposition 3.11 folgt also, dass $c + df$ für alle $c, d \in \mathbb{R}, d \neq 0$, ebenfalls $\mathcal{A}$-messbar ist.

(iii) 1. Schritt: Man beachte, dass $f + g$ definiert ist, wenn

$$\{f = \pm\infty\} \cap \{g = \mp\infty\} = \emptyset,$$

d.h. wir betrachten im Folgenden nur diesen Fall. Insbesondere gilt dann nach Proposition 3.11

$$\{f + g = \infty\} = \{f = \infty\} \cup \{g = \infty\} \in \mathcal{A}.$$

Ferner gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\{a < f + g < \infty\} = \{a - g < f < \infty\} = (\{a - g < f\} \setminus \{f = \infty\}) \in \mathcal{A},$$

wobei wir benutzen, dass nach Teil (ii) auch die Funktion $a - g$ messbar ist, d.h. nach Teil (i) gilt $\{a - g < f\} \in \mathcal{A}$. Zusammen folgt für jedes $a \in \mathbb{R}$, dass

$$\{f + g > a\} = \{f + g = \infty\} \cup \{a < f + g < \infty\} \in \mathcal{A},$$

d.h. nach Proposition 3.11 ist $f + g$ $\mathcal{A}$-messbar.

2. Schritt: Für $a \geq 0$ gilt

$$\{f^2 > a\} = \{f > \sqrt{a}\} \cup \{f < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{A}$$

und für $a < 0$ gilt

$$\{f^2 > a\} = X \in \mathcal{A}.$$

Mit Proposition 3.11 folgt, dass f^2 $\mathcal{A}$-messbar ist.

3. Schritt: Es gilt

$$\begin{aligned}\{fg = \infty\} = (&\{f = \infty\} \cap \{g > 0\}) \cup (\{f = -\infty\} \cap \{g < 0\}) \\ &\cup (\{g = \infty\} \cap \{f > 0\}) \cup (\{g = -\infty\} \cap \{f < 0\}) \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Ferner gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\{a < fg < \infty\} = \left\{a < \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right) < \infty\right\} \in \mathcal{A},$$

denn aus Schritt 1 und 2, und aus Teil (ii), folgt, dass die Funktion $\frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ $\mathcal{A}$-messbar ist. Also gilt auch

$$\{fg > a\} = \{fg = \infty\} \cup \{a < fg < \infty\} \in \mathcal{A}$$

und nach Proposition 3.11 ist fg $\mathcal{A}$-messbar. □

Wir wollen nun zeigen, dass die Messbarkeit auch unter „Grenzwertprozessen“ erhalten bleibt.

Erinnerung. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ist definiert:

$$\sup_n a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \inf_n a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Man beachte, dass diese Ausdrücke jeweils auch die Werte $\pm\infty$ annehmen können. Ferner existiert $\lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

und in diesem Fall stimmt der gemeinsame Wert mit dem Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überein.

Proposition 3.13. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Sind die Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}$-messbar, so auch die Funktionen $g_i : X \to \overline{\mathbb{R}}, i = 1, 2, 3, 4$ definiert durch

$$g_1(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad g_3(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$
$$g_2(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad g_4(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

Existiert ferner $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$, so ist auch $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{g_1 \leq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \{g_2 \geq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq a\} \in \mathcal{A}.$$

Also sind g_1 und g_2 nach Proposition 3.11 $\mathcal{A}$-messbar. Allgemeiner folgt genauso, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen $h_k^{(1)} := \sup_{n\geq k} f_n$ und $h_k^{(2)} := \inf_{n\geq k} f_n$ beide $\mathcal{A}$-messbar sind. Also sind auch $g_3 = \inf_{k\in\mathbb{N}} h_k^{(1)}$ und $g_4 = \sup_{k\in\mathbb{N}} h_k^{(2)}$ $\mathcal{A}$-messbar. Falls f existiert, gilt schließlich $f = g_3 = g_4$, d.h. auch f ist $\mathcal{A}$-messbar. □

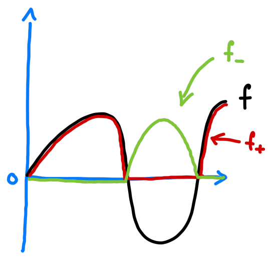
Bemerkung 3.14. Ersetzen wir in der vorherigen Proposition „messbar“ durch „stetig“ oder „Riemann-integrierbar“, so sind die Aussagen im Allgemeinen falsch. Beispielsweise sind punktweise Grenzwerte stetiger (Riemann-integrierbarer) Funktionen nicht automatisch wieder stetig (Riemann-integrierbar).

Wir wollen auch noch ein paar Folgerungen aus Proposition 3.13 besprechen. Dazu benötigen wir zwei Begriffe.

Definition 3.15. Es sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Dann sind der **positive Teil** f_+ und der **negative Teil** f_- von f definiert durch

$$f_+ : X \to [0,\infty], \quad f_+(x) = \max(f(x),0) \quad \text{und} \quad f_- : X \to [0,\infty], \quad f_-(x) = \max(-f(x),0).$$

Man beachte, dass
$$f = f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f_-.$$



Positiv- und Negativteile einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Korollar 3.16. (i) Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, so auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$.

(ii) Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, so auch f_+, f_- und $|f|$.

Beweis. Für Teil (i) wählt man $f_1 = f, f_n = g, n \geq 2$, dann gilt $\max(f,g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\min(f,g) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und diese sind nach Proposition 3.13 $\mathcal{A}$-messbar. Teil (ii) folgt dann direkt aus Teil (i) und Proposition 3.12. $\square$

4. Maße

Stichpunkte. Erweiterte nicht-negative Achse, Maß, Maßraum, sigma-endlich, Dirac-Maß, Zählmaß, Eigenschaften von Maßen (Nulltreue, Isotonie, Sigma-(Sub-)Additivität, Stetigkeit von oben und unten), Bildmaße, Nullmengen, vollständige Maße, Vervollständigung, Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$, nicht-messbare Mengen

Um eine messbare Funktion auf einem Messraum zu integrieren, müssen wir den Messraum zuvor mit einem Maß ausstatten. Darum soll es in diesem Abschnitt gehen. Es ist dazu zweckmäßig, noch einmal auf das Rechnen in der erweiterten nicht-negativen Achse

$$[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

zurückzukommen. Denn dies sind gerade die Werte, die das Maß einer messbaren Menge annehmen kann. Wir fügen unseren Überlegungen aus Definition 3.7, wo über das Rechnen in der erweiterten reellen Achse $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ gesprochen wurde, daher hier noch ein paar Ergänzungen an.

Bemerkung 4.1 (Die erweiterte nicht-negative Achse und Summierbarkeit). Wir erinnern daran, dass

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,\infty]: &\quad x+\infty = \infty + x = \infty \\ \forall x \in (0,\infty]: &\quad x\cdot\infty = \infty\cdot x = \infty \end{aligned}$$

und ferner

$$\infty\cdot 0 = 0\cdot\infty = 0.$$

Darüber hinaus wird die Ordnung von $[0,\infty)$ auf $[0,\infty]$ erweitert, indem wir setzen

$$\forall x \in [0,\infty): \quad x < \infty.$$

Auf diese Weise bleiben die meisten der üblichen Rechenregeln in $[0,\infty]$ erhalten. So sind z.B. die Addition und Multiplikation kommutativ und assoziativ, und es gelten die Distributivitätsgesetze. **Vorsicht** ist geboten, wenn man Terme kürzen möchte, denn aus $x+\infty = y+\infty$ folgt in $[0,\infty]$ nicht, dass $x = y$.

Die Ordnungsrelation $x \le y$ mit $x, y \in [0,\infty]$ bleibt bei Addition beider Seiten mit der gleichen Größe erhalten. Ferner besagt die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass jede Teilmenge von $[0,\infty]$ ein Supremum besitzt. Für beschränkte Teilmengen ist dies eine reelle Zahl und ist $M \subseteq [0,\infty]$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $\sup M = \infty$.

Eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty]$ konvergiert gegen ∞, falls

$$\forall R > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N: \quad s_n \ge R.$$

Insbesondere ist jede Reihe mit Gliedern in $[0,\infty]$ konvergent. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty,$$

falls $x_N = \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$, oder $0 \le x_n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n = \infty$.

Für eine beliebige Familie $(x_i)_{i\in I}$ in $[0,\infty]$ definieren wir schließlich noch

$$\sum_{i\in I} x_i := \sup_{F\subseteq I,\, F \text{ endlich}} \sum_{n\in F} x_n \quad \in [0,\infty].$$

Man mache sich klar, dass für $I = \mathbb{N}$ tatsächlich $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ gilt. Weiterhin können Reihen in $[0,\infty]$ beliebig umsortiert werden, d.h. für jede Bijektion $\varphi : I \to J$ gilt

$$\sum_{j\in J} x_j := \sum_{i\in I} x_{\varphi(i)}.$$

Ferner dürfen Doppelsummen vertauscht werden, d.h. ist $x_{i,j}$ in $[0,\infty]$ für alle $i\in I, j\in J$, so gilt

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j}.$$ Übung

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun endlich definieren, was ein Maß auf einem messbaren Raum eigentlich sein soll.

Definition 4.2. Es sei $(X,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt **Maß auf** $(X,\mathcal{A})$ oder kurz **Maß auf** $\mathcal{A}$, falls

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ (**Nulltreue**),

(ii) für jede disjunkte[a] Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad (\sigma\textbf{-Additivität}).$$

Das Tripel $(X,\mathcal{A},\mu)$ heißt dann **Maßraum**. Ferner nennen wir den Maßraum bzw. das Maß μ

a) **endlich**, falls $\mu(X) < \infty$.

b) σ-**endlich**, falls $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ mit $X_j \in \mathcal{A}$ und $\mu(X_j) < \infty$.

c) ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, oder kurz **W-Maß**, falls $\mu(X) = 1$. Der Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ wird dann ein **Wahrscheinlichkeitsraum** genannt.

[a] d.h. die A_n sind paarweise disjunkt, $A_n \cap A_m = \emptyset$ für alle $n,m\in\mathbb{N}$ mit $n \neq m$.

Bemerkung 4.3. (i) Jedes Maß μ ist auch **additiv**, denn für $A,B\in\mathcal{A}$ mit $A\cap B = \emptyset$ folgt durch Wahl $A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset, n \geq 3$, aus der σ-Additivität

$$\mu(A\cup B) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B),$$

weil $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Die σ-Additivität hat auch zur Folge, dass für jede abzählbar unendliche Menge I und jede **disjunkte** Familie $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{A}$ gilt, dass

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i),$$

denn ist $\varphi : \mathbb{N} \to I$ eine Bijektion, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\varphi(n)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_{\varphi(n)}\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i).$$

(iii) Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ist ein endliches Maß und jedes endliche Maß ein σ-endliches Maß.

(iv) Ist μ endlich, so folgt aus $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$, dass $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

(v) Genauso folgt für ein W-Maß μ, dass $\mu(A) \leq 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

(vi) Für Wahrscheinlichkeitsräume benutzt man oft andere Buchstaben, z.B. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. In diesem Fall interpretiert man $A \in \mathcal{A}$ als ein Ereignis und $\mathbb{P}(A)$ als die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt. Ω selbst heißt das sichere Ereignis, denn nach Definition gilt $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Beispiel: Einen Würfelwurf können wir modelieren durch Wahl von

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{6},$$

wobei $|A|$ die Mächtigkeit von A bezeichnet.

Auf jedem Messraum lassen sich unmittelbar einige Maße definieren (prüfen Sie jeweils nach, dass es sich um Maße handelt!). Übung

Beispiel 4.4. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(i) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], A \mapsto 0$ ist ein Maß (das **Nullmaß**).

(ii) Für $x \in X$ ist das **Dirac-Maß** im Punkt x definiert durch

$$\delta_x : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \begin{cases} 0 & , x \notin A \\ 1 & , x \in A. \end{cases}$$

(iii) Das Maß

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \begin{cases} |A| & , A \text{ endlich} \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **Zählmaß** auf $\mathcal{A}$. Dieses ist endlich, falls X endlich ist und σ-endlich aber nicht endlich, falls X abzählbar unendlich (d.h. abzählbar und nicht endlich) ist.

(iv) Die Summe von zwei Maßen ist ein Maß. Noch allgemeiner: Ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(X, \mathcal{A})$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty)$, so ist auch die folgende Linearkombination dieser Maße wieder ein Maß:

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu_n(A).$$

(v) Ist $Y \subseteq X$ mit $Y \in \mathcal{A}$, so ist nach Beispiel 2.6 (iii) die Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}|_Y$ auf Y gegeben durch $\mathcal{A}|_Y := \{B \in \mathcal{A} : B \subseteq Y\}$. Durch

$$\mu|_Y : \mathcal{A}|_Y \to [0, \infty], \quad \mu|_Y(B) := \mu(B),$$

wird dann ein Maß auf $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ definiert, die **Einschränkung von μ auf Y**.

(vi) Ist X höchstens abzählbar, so ist jedes Maß μ auf $(X, \mathcal{P}(X))$ eindeutig durch die Werte $a_x := \mu(\{x\}), x \in X$, festgelegt, denn es gilt

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} a_x, \quad A \in \mathcal{A},$$

bzw. unter Verwendung der Dirac-Maße δ_x

$$\mu = \sum_{x \in X} a_x \delta_x$$

Umgekehrt wird für eine beliebige Famile $(a_x)_{x \in X}$ durch diese Formel ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ definiert.

Jedes Maß erfüllt automatisch eine Reihe von weiteren Rechenregeln.

Satz 4.5. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A, B, A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. **(Isotonie)**

Gilt $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$, so auch $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$. **($\sigma$-Sub-Additivität)**

(iv) Gilt $A_n \subseteq A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad \textbf{(Stetigkeit von unten)}$$

(v) Gilt $A_n \supseteq A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, und $\mu(A_1) < \infty$, so folgt

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \qquad \textbf{(Stetigkeit von oben)}$$

Beweis. (i) Da wir $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ jeweils als disjunkte Vereinigungen schreiben können, gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Es ist $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Hieraus folgt sowohl die erste Behauptung (da $\mu(B \setminus A) \geq 0$) als auch die zweite, da wir im Falle $\mu(A) < \infty$ einfach $\mu(A)$ auf beiden Seiten abziehen können.

(iii) Setzen wir $B_1 = A_1$ und $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), n \geq 2$, so ist die Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkt und es gilt $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Also folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \overset{(ii)}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n),$$

wobei wir im letzten Schritt $B_n \subseteq A_n$ benutzt haben.

(iv) Wir beachten, dass wegen (ii) gilt: $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1}), n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist als monoton wachsende Folge konvergent in $[0, \infty]$ mit $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$. Also ist eine der zu zeigenden Identitäten bewiesen. Existiert nun ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_N) = \infty$, so gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \infty$ und mit der Isotonie folgt auch

$$\infty \geq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \mu(A_N) = \infty \quad \Rightarrow \quad \infty = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Gilt andererseits $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so definieren wir die disjunkte Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \setminus A_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

und beobachten, dass $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, also

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \overset{(ii)}{=} \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{N\to\infty} (\mu(A_N) - \mu(A_1)) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).\end{aligned}$$

(v) Übung. □ Übung

Maße lassen sich mit Hilfe von messbaren Abbildungen auf andere Messräume übertragen.

Satz 4.6. Sei $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ messbar und μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann wird durch

$$\mu_f : \mathcal{B} \to [0, \infty], \quad \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B))$$

ein Maß auf $(Y, \mathcal{B})$ definiert, genannt das **Bildmaß von μ unter der Abbildung f**.

Beweis. Da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ folgt $\mu_f(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Aus der Operationstreue der Umkehrabbildung folgt ferner, dass für eine disjunkte Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}$ die Folge $(f^{-1}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}$ ist (beweisen Sie das!) und somit

$$\mu_f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f(B_n).$$

□

Beispiel 4.7. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so nennt man eine messbare Abbildung

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$$

eine reelle **Zufallsgröße** oder **-variable**. In diesem Fall ist das Bildmaß $\mathbb{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, genannt die **Verteilung von** X, und $\mathbb{P}_X(B)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsgröße X Werte in der Borelmenge $B \in \mathcal{B}_1$ annimmt.

Bevor wir uns dem Lebesgue-Maß zuwenden, müssen wir im allgemeinen Kontext noch über Mengen vom Maß Null sprechen.

Definition 4.8. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **μ-Nullmenge** (oder einfach **Nullmenge**, falls klar ist, auf welches Maß man sich bezieht).

Bemerkung 4.9. Nullmengen spielen in der Maßtheorie die Rolle von Mengen, die man bei vielen Betrachtungen einfach ignorieren kann. Ändert man etwa den Wert einer Funktion auf einer Nullmenge, so wird sich der Wert des zugehörigen Integrals nicht ändern. Dazu später mehr.

Die Verifikation der folgenden Eigenschaften von Nullmengen ist eine leichte Übung. Übung

Proposition 4.10. (i) Messbare Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.

(ii) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

In Teil (i) darf man auf die Forderung der Messbarkeit der Teilmenge nicht verzichten, denn leider müssen Teilmengen von Nullmengen nicht automatisch messbar sein.

Beispiel 4.11. Es sei $X = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$. Wir betrachten das Dirac-Maß δ_1 auf $(X, \mathcal{A})$. Dann gilt $\delta_1(\{2, 3\}) = 0$, d.h. $\{2, 3\}$ ist eine Nullmenge. Die Teilmenge $\{2\}$ ist nicht messbar.

Definition 4.12. Der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (bzw. das Maß μ) heißt **vollständig**, falls jede Teilmenge einer μ-Nullmenge messbar ist.

Hätten wir im vorherigen Beispiel das Dirac-Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ betrachtet, so wäre es natürlich vollständig (warum?). Tatsächlich lässt sich jedes Maß zu einem vollständigen Maß fortsetzen.

Definition 4.13. Ist μ ein Maß auf dem Messraum $(X, \mathcal{A})$, so nennen wir ein Maß μ' auf $(X, \mathcal{A}')$ eine **Fortsetzung** oder **Erweiterung** von μ, falls

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \quad \text{und} \quad \mu'|_{\mathcal{A}} = \mu.$$

Umgekehrt heißt in diesem Fall μ die **Einschränkung** von μ' auf $\mathcal{A}$.

Satz 4.14. Es sei μ ein Maß auf dem Messraum $(X, \mathcal{A})$. Dann besitzt μ eine eindeutige kleinste vollständige Fortsetzung.

Genauer: Sei $\mathcal{V}_\mu$ die Menge aller Teilmengen von Nullmengen von μ,[a] d.h.

$$\mathcal{V}_\mu := \{N \subseteq X : \exists B \in \mathcal{A} \text{ mit } N \subseteq B \text{ und } \mu(B) = 0\}.$$

Definiere

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{V}_\mu\}$$

und

$$\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty], \quad \overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A).$$

Dann ist $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra, $\overline{\mu}$ ist wohldefiniert und $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum. Ferner ist $\overline{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\overline{\mathcal{A}}$ und jede vollständige Fortsetzung von μ ist eine Fortsetzung von $\overline{\mu}$.

[a] Solche Mengen nennt man auch **vernachlässigbar**.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist optional. Sie finden ihn im Anhang an dieses Kapitel. □

Definition 4.15. Man nennt das Maß $\overline{\mu}$ in Satz 4.14 die **Vervollständigung von** μ und $\overline{\mathcal{A}}$ die **Vervollständigung von** $\mathcal{A}$ **bezüglich** μ.

Nach so viel abstrakter Theorie werfen wir nun endlich einen ersten Blick auf das Lebesgue-Maß.

Satz 4.16. Es existiert genau ein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$\lambda((a,b]) = b - a.$$

Dieses Maß wird das **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}$ genannt.

Wir wollen diesen Satz an dieser Stelle noch nicht beweisen. Dies erfordert eine ganze Menge zusätzlicher Theorie, die wir erst später betrachten wollen.

Bemerkung 4.17. Das Lebesgue-Maß ist nicht vollständig. Die Vervollständigung $\overline{\lambda}$ wird in der Literatur oft auch einfach mit λ bezeichnet. Die zugehörige Vervollständigung $\overline{\mathcal{B}_1}$ der Borel-σ-Algebra wird als σ-Algebra der **Lebesgue-messbaren Teilmengen** von $\mathbb{R}$ bezeichnet. Man beachte, dass die Nomenklatur hier in der Literatur nicht eindeutig ist: Manche Bücher nennen das, was wir Lebesgue-Maß nennen, das „Lebesgue-Borel-Maß“, und die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maßes dann das „Lebesgue-Maß“. Für diese Vorlesung ist diese Unterscheidung nicht wichtig und für uns ist das Lebesgue-Maß immer ein Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_1$.

Wenn wir die Existenz des Lebesgue-Maßes vorläufig akzeptieren, können wir ein paar einfache Rechenregeln ableiten.

Beispiel 4.18.

(i) $\lambda(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Denn benutzen wir die Stetigkeit von oben (Satz 4.5 (v)), so folgt

$$\lambda(\{x\}) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x - 1/n, x]\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda((x - 1/n, x]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(ii) Mit Proposition 4.10 (ii) und Teil (i) folgt, dass jede abzählbare Menge eine λ-Nullmenge ist. Insbesondere gilt $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(iii) Es existieren auch überabzählbare λ-Nullmengen, etwa die Cantor-$1/3$-Menge. Übung

(iv) Aus Teil (i) und Satz 4.5 folgt auch sofort, dass für $a < b$

$$\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = b - a.$$

(v) Aus der Stetigkeit von unten (Satz 4.5 (iv)) folgt, dass

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \lambda((-n,n)) = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty.$$

(vi) Beschränkte Mengen haben endliches Maß: Ist etwa $A \in \mathcal{B}_1$ und $A \subseteq [-R, R]$, so folgt

$$\lambda(A) \leq \lambda([-R,R]) = 2R < \infty.$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist und durch diese Eigenschaft im Wesentlichen schon charakterisiert wird.

Satz 4.19. Das Lebesgue-Maß λ ist das einzige Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

(i) λ ist translationsinvariant, d.h. für alle $A \in \mathcal{B}_1$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda(A+b) = \lambda(A).$$

(ii) $\lambda((0,1]) = 1$.

Hierbei darf man natürlich nicht vergessen zu zeigen, dass die Mengen $A + b := \{a + b : a \in A\}$ ebenfalls Borel-Mengen sind. Sonst wäre $\lambda(A + b)$ ja gar nicht definiert.

Beweis. (a) Nur die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes ist zunächst noch zu zeigen. Dazu beachten wir, dass die Translationsabbildung

$$f_b : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1), \quad x \mapsto x - b$$

stetig und damit messbar ist. Insbesondere ist $f_b^{-1}(A) = A + b \in \mathcal{B}_1$ für alle $A \in \mathcal{B}_1$. Wir betrachten nun das Bildmaß

$$\mathcal{B}_1 \ni A \mapsto \lambda_{f_b}(A) = \lambda(f_b^{-1}(A)) = \lambda(A+b).$$

Für $c < d$ gilt

$$\lambda_{f_b}((c,d]) = \lambda((c+b, d+b]) = (d+b) - (c+b) = d - c,$$

d.h. das Bildmaß ordnet den halboffenen Intervallen ihre Länge zu. Aber laut Satz 4.16 ist das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ das einzige Maß mit dieser Eigenschaft, d.h. es folgt $\lambda = \lambda_{f_b}$, was zu zeigen war.

(b) Nun sei μ ein beliebiges translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ mit $\mu((0,1]) = 1$. Wir zeigen in mehreren Schritten, dass $\mu = \lambda$ gelten muss.

1. Schritt: Für $q \in \mathbb{N}$ gilt $\mu((0, \frac{1}{q}]) = \frac{1}{q}$, denn

$$1 = \mu((0,1]) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{q} \left(\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}\right]\right) = \sum_{k=1}^{q} \mu\left(\left(\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}\right]\right) = q \cdot \mu\left(\left(0, \frac{1}{q}\right]\right),$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Translationsinvarianz von μ benutzt haben.

2. Schritt: Für $p, q \in \mathbb{N}$ gilt $\mu((0, \frac{p}{q}]) = \frac{p}{q}$, denn

$$\mu\left(\left(0, \frac{p}{q}\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{p} \left(\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}\right]\right) = \sum_{k=1}^{p} \mu\left(\left(\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}\right]\right) = \sum_{k=1}^{p} \mu\left(\left(0, \frac{1}{q}\right]\right) = p \cdot \frac{1}{q},$$

wobei wir in der letzten Gleichung Schritt 1 verwendet haben.

3. Schritt: Für $x \in (0, \infty)$ gilt $\mu((0,x]) = x$, denn ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver rationaler Zahlen mit $r_n \searrow x$ für $n \to \infty$, so folgt unter Verwendung der Stetigkeit von oben, dass

$$\mu((0,x]) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, r_n]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu((0, r_n]) = \lim_{n\to\infty} r_n = x,$$

wobei wir in der vorletzten Gleichung den 2. Schritt verwendet haben.

4. Schritt: Nun seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$. Dann folgt aus der Translationsinvarianz von μ und aus dem 3. Schritt, dass

$$\mu((c,d]) = \mu((0,d-c]) = d-c.$$

Wie in Teil (a) zeigt die Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes damit, dass $\mu = \lambda$ gelten muss. $\square$

Ganz analog zum vorherigen Beweis (Teil (a)) funktioniert der Beweis des folgenden Resultats.

Satz 4.20. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}_1$. Dann gilt

$$\lambda(a \cdot A) = |a| \cdot \lambda(A).$$

Insbesondere ist λ spiegelungsinvariant, d.h. $\lambda(-A) = \lambda(A)$.

Beweis. Übung. $\square$ Übung

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir nun noch zeigen, dass nicht alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borel-Mengen sind. Tatsächlich zeigen wir sogar eine wesentlich stärkere Aussage.

Satz 4.21. Sei $A \in \mathcal{B}_1$ mit $\lambda(A) > 0$. Dann besitzt A eine Teilmenge, die nicht Borel-messbar ist.

So enthält also zum Beispiel jedes Intervall $(a,b), a < b$, eine nicht Borel-messbare Teilmenge.

Beweis. 1. Schritt: Wir konstruieren eine sogenannte Vitali-Menge $B \subseteq [0,1]$ (benannt nach Guiseppe Vitali).

Dazu definiere auf $[0,1]$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Wie bei jeder Äquivalenzrelation partitionieren die zugehörigen Äquivalenzklassen von $\sim$ die Grundmenge, d.h. hier das Intervall $[0,1]$. Wir bilden nun eine Menge $B \subseteq [0,1]$, indem wir aus jeder dieser Äquivalenzklassen genau ein Element auswählen und B hinzufügen (hierbei benutzen wir das Auswahlaxiom der Mengenlehre). Für $c, d \in B, c \neq d$, gilt also insbesondere $c - d \notin \mathbb{Q}$.

2. Schritt: Die Familie $(B+q)_{q\in\mathbb{Q}}$ bildet eine Partition von $\mathbb{R}$, d.h.

(i) für $q, r \in \mathbb{Q}, q \neq r$, gilt $(B+q) \cap (B+r) = \emptyset$.

(ii) $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(B+q)$.

Zu (i): Wäre $y \in (B+q) \cap (B+r)$ für verschiedene rationale Zahlen q, r, so wären $y - q$ und $y - r$ verschiedene Elemente von B, deren Differenz eine rationale Zahl ist, im Widerspruch zur Konstruktion von B.

Zu (ii): Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x - k \in [0,1)$. Wählt man nun das eindeutige Element $b \in B$ mit $b \sim (x-k)$, so unterscheiden sich b und $x - k$, und damit auch b und x, nur um eine rationale Zahl. Es gibt also $q \in \mathbb{Q}$ mit $x = b + q$.

3. Schritt: Wir zeigen, dass jede Borel-messbare Teilmenge der Vitali-Menge B eine Nullmenge ist.

Dazu sei $E \subseteq B$ mit $E \in \mathcal{B}_1$. Wir wählen $r_1, r_2, \ldots$ als eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Nach Schritt 2, Beobachtung (i), sind dann die Mengen $E + r_i, i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt (und natürlich auch Borel-messbar). Ferner gilt nach Konstruktion, dass $E + r_i \subseteq [0,2]$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda\left(E + r_i\right) = \lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (E + r_i)\right) \leq \lambda\left([0,2]\right) = 2.$$

Andererseits gilt aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes aber auch

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda\left(E + r_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(E).$$

D.h. es folgt $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(E) \leq 2$, was $\lambda(E) = 0$ zur Folge hat.

4. Schritt: Nun sei $A \in \mathcal{B}_1$ mit $\lambda(A) > 0$. Nach Schritt 2 gilt dann

$$A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(A \cap (B + q)\right)$$

und diese Vereinigung ist disjunkt. Wären alle der Mengen $A \cap (B + q), q \in \mathbb{Q}$, Borel-messbar, würde also folgen

$$\lambda(A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(A \cap (B + q)).$$

Andererseits wären dann auch alle der um q verschobenen Mengen

$$[A \cap (B + q)] - q = (A - q) \cap B \quad , q \in \mathbb{Q},$$

Borel-messbar und diese wären, nach Schritt 3, als Teilmenge der Vitali-Menge B, jeweils eine Nullmenge. Es würde also unter Verwendung der Translationsinvarianz von λ folgen, dass

$$\lambda(A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(A \cap (B + q)) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda((A - q) \cap B) = 0,$$

im Widerspruch zur Annahme $\lambda(A) > 0$. Es muss also unter den Mengen $A \cap (B + q), q \in \mathbb{Q}$, mindestens eine geben, die nicht Borel-messbar ist. □

Bemerkung 4.22. Auch die im Beweis konstruierte Vitali-Menge B selbst ist nicht Borel-messbar. Denn sonst wäre auch $B + q, q \in \mathbb{Q}$, Borel-messbar und damit auch alle der Mengen $A \cap (B + q)$. In der Literatur sind Vitali-Mengen die Standard-Beispiele für nicht Borel-messbare Mengen.

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Beweis von Satz 4.14). Im Beweis benutzen wir, dass die Vereinigung von abzählbar vielen vernachlässigbaren Mengen wieder eine vernachlässigbare Menge ist und dass Teilmengen von vernachlässigbaren Mengen ebenfalls vernachlässigbar sind (Übungsaufgabe).

(i) Da $X \in \mathcal{A}$, gilt $X = X \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Sei nun $B = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{V}_\mu$. Dann existiert $C \in \mathcal{A}$ mit $N \subseteq C$ und $\mu(C) = 0$, und es gilt

$$B^c = A^c \cap N^c = A^c \cap (C^c \cup (C \setminus N)) = (A^c \cap C^c) \cup (A^c \cap (C \setminus N)).$$

Hierbei ist $(A^c \cap C^c) \in \mathcal{A}$ und $A^c \cap (C \setminus N) \subseteq C$. Da $\mu(C) = 0$, folgt $B^c \in \overline{\mathcal{A}}$. Ist schließlich $B_n = A_n \cup N_n, n \in \mathbb{N}$, wobei $A_n \in \mathcal{A}$ und $N_n \in \mathcal{V}_\mu$, so gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \in \overline{\mathcal{A}},$$

denn die erste Vereinigung ist ein Element von $\mathcal{A}$ und die zweite Vereinigung ist eine abzählbare Vereinigung von vernachlässigbaren Mengen, also selbst eine solche. Insgesamt folgt, dass $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist.

(ii) Es gelte $A \cup N = B \cup M$ mit $A, B \in \mathcal{A}$ und $N, M \in \mathcal{V}_\mu$. Ferner gelte $N \subseteq C, M \subseteq D$ für Elemente $C, D \in \mathcal{A}$ mit $\mu(C) = \mu(D) = 0$. Da $A \subseteq (B \cup M) \subseteq (B \cup D)$ folgt

$$\mu(A) \leq \mu(B \cup D) \leq \mu(B) + \mu(D) = \mu(B)$$

und genauso $\mu(B) \leq \mu(A)$, d.h. $\mu(A) = \mu(B)$, was zeigt, dass $\overline{\mu}$ wohldefiniert ist.

(iii) Es sei $B \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $\overline{\mu}(B) = 0$. Ferner sei $E \subseteq B$. Nach Definition existiert dann $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{V}_\mu$ mit $B = A \cup N$ und $\overline{\mu}(B) = \mu(A) = 0$. Dies zeigt $A \in \mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{V}_\mu$ und damit $B = A \cup N \in \mathcal{V}_\mu$. Aber dann ist auch die Teilmenge E von B in $\mathcal{V}_\mu$. Somit zeigt die Darstellung $E = \emptyset \cup E$, dass $E \in \overline{\mathcal{A}}$ messbar ist. Also ist $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ vollständig.

(iv) Dass $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ und dass $\overline{\mu}$ eine Fortsetzung von μ ist, ist klar.

(v) Ist $\nu : (X, \mathcal{B}) \to [0, \infty]$ eine Fortsetzung von $\mu : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ mit $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$, so gilt für $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{V}_\mu$ und $C \in \mathcal{A}$ mit $N \subseteq C$ und $\mu(C) = 0$ auch

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) &= \nu(A) \\
&\leq \nu(A \cup N) \leq \nu(A) + \nu(N) \leq \nu(A) + \nu(C) \\
&= \mu(A) + \mu(C) = \mu(A) = \overline{\mu}(A \cup N),
\end{aligned}$$

also $\nu|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$. Insbesondere ist $\overline{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ auf $\overline{\mathcal{A}}$.

(vi) Ist schließlich $\rho : (X, \mathcal{C}) \to [0, \infty]$ eine vollständige Fortsetzung von $\mu : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$, so gilt nach Definition $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ und $\rho|_{\mathcal{A}} = \mu$. Ferner ist

$$\mathcal{V}_\mu \subseteq \mathcal{V}_\rho = \{C \in \mathcal{C} : \rho(C) = 0\},$$

wobei die letzte Gleichung eine Folge der Vollständigkeit von ρ ist (warum?). Da $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist, folgt damit auch

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{V}_\mu\right\} \subseteq \left\{A \cup N : A \in \mathcal{C}, N \in \mathcal{V}_\rho\right\} \subseteq \mathcal{C}.$$

Aus Teil (vi) folgt dann auch $\rho|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$, d.h. ρ ist eine Fortsetzung von $\overline{\mu}$.

5. Integrale nicht-negativer Funktionen

Stichpunkte. Einfache Funktionen und deren Integral, Integral nicht-negativer Funktionen, Eigenschaften des Integrals (additiv, pos. homogen, monoton), Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi), Lemma von Fatou, Dichte eines Maßes, Transformationsformel für Bildmaß, fast sichere Eigenschaften

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und wollen zunächst erklären, was unter dem Integral

$$\int f \, d\mu$$

für eine $\mathcal{A}$-messbare **nicht-negative** Funktion $f : X \to [0, \infty]$ zu verstehen ist. Das Integral einer Funktion mit beliebigen reellen Werten werden wir erst später betrachten.

Bemerkung 5.1. Wie Sie sehen, erlauben wir hierbei, dass die nicht-negative Funktion f auch den Wert ∞ annimmt. Dies wird die aufzustellende Theorie nicht verkomplizieren. Im Gegenteil, es wird sie sogar einfacher und eleganter machen.

Zunächst müssen wir erklären, was das Integral von sogenannten einfachen Funktionen ist.

Definition 5.2. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum.

(i) Eine $\mathcal{A}$-messbare[a] Funktion $f : X \to [0, \infty)$, die nur endlich viele Werte annimmt, heißt eine **einfache Funktion** auf $(X, \mathcal{A})$. Wir setzen

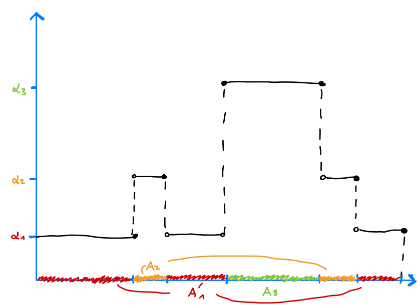
$$\mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}) := \{f : X \to [0, \infty) : f \text{ ist einfache Funktion auf } (X, \mathcal{A})\}.$$

(ii) Sei $f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ und $f(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die Menge ihrer (paarweise verschiedenen) Funktionswerte. Dann heißt die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{\{f = \alpha_k\}}(x), \quad x \in X,$$

eine **Standarddarstellung** von f. Diese ist, bis auf Umordnung der Summanden, eindeutig.

[a] dies bedeutet, f ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}([0, \infty))$-messbar.



Die einfache Funktion $f = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $A_j = \{f = \alpha_j\}$.

Bemerkung 5.3. (i) Ist $(X, \mathcal{A}) = ([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$, so ist jede Treppenfunktion (im Sinne der Analysis-Vorlesungen)

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k)}$$

mit $a = x_0 < \ldots < x_{n-1} = b$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ einfach. Aber nicht jede einfache Funktion ist eine Treppenfunktion, etwa die Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$.

(ii) Ist $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ in Standarddarstellung mit $f(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, so gilt $\{f = \alpha_k\} \in \mathcal{A}$ und die charakteristischen Funktionen $\mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ sind somit $\mathcal{A}$-messbar. Ferner bildet $(\{f = \alpha_k\})_{k=1}^{n}$ eine Partition von X.

(iii) Auch für beliebige $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m \geq 0$ ist $f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ einfach. Im Allgemeinen ist dies aber keine Standarddarstellung. Zum Beispiel ist eine Standarddarstellung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1)} + 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}$$

gegeben durch

$$f = 0 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,0)} + 3 \cdot \mathbb{1}_{[0,1)} + 2 \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}.$$

(iv) Die folgenden Implikationen sind offensichtlich:

$$f, g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}), \quad \alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f + g, f \cdot g, \alpha \cdot f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}).$$

Insbesondere ist für $A \in \mathcal{A}$ mit $f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ auch $f \cdot \mathbb{1}_A \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$.

Dass die einfachen Funktionen eine so wichtige Rolle in der Integrationstheorie spielen, liegt unter anderem an dem folgenden Approximationsresultat.

Proposition 5.4. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{A}$-messbar. Dann existieren $\varphi_n \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}$, so dass

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq f^a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

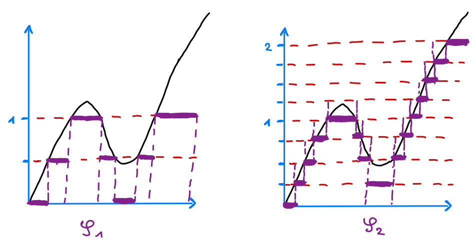
[a] d.h. für alle $x \in X$ gilt $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \ldots \leq f(x)$.

Beweis (Idee). Die Funktionen

$$\varphi_n(x) := \left(\sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right\}}(x) \right) + n \mathbb{1}_{\{n \leq f\}}(x), \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

leisten das Gewünschte.

□



Die einfachen Funktionen aus der vorherigen Proposition.

Um das Integral einer einfachen Funktion zu bestimmen, summieren wir deren Funktionswerte, jeweils gewichtet mit dem Maß der zugehörigen Urbilder.

Definition 5.5. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ mit $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und Standarddarstellung $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$. Dann ist das **Integral von f bezüglich μ** definiert als

$$\int f \, d\mu := \int_X f \, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mu(\{f = \alpha_k\}).$$

Ist ferner $A \in \mathcal{A}$, so setzen wir

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

Man beachte, dass $\int f \, d\mu \in [0, \infty]$ und dass nach Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$.

Beispiel 5.6. (i) Für $c \geq 0$ hat die konstante Funktion $f : X \to [0, \infty), x \mapsto c$ die Standarddarstellung $f = c\mathbb{1}_X$, d.h. es gilt

$$\int f \, d\mu = \int c\mathbb{1}_X \, d\mu = c \cdot \mu(X).$$

Insbesondere gilt für die Nullfunktion $\int 0 \, d\mu = 0$.

(ii) Ist $A \in \mathcal{A}$, so hat die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A : X \to [0, \infty)$ die Standarddarstellung $\mathbb{1}_A = 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c} + 1 \cdot \mathbb{1}_A$, d.h. es gilt

$$\int \mathbb{1}_A \, d\mu = 0 \cdot \mu(A^c) + 1 \cdot \mu(A) = \mu(A).$$

(iii) Als Spezialfall von (ii) erhalten wir für die Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_\mathbb{Q} : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1) \to [0, \infty)$ und das Lebesgue-Maß λ, dass

$$\int \mathbb{1}_\mathbb{Q} \, d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

Die folgende Proposition fasst die wichtigsten Eigenschaften des Integrals einfacher Funktionen zusammen.

Proposition 5.7. Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ und $\alpha \in [0, \infty)$. Dann gilt:

(i) Das Integral ist **positiv homogen** und **additiv**, d.h.

$$\text{(a)} \quad \int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$$

$$\text{(b)} \quad \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

(ii) Das Integral ist **monoton**, d.h.

$$f \leq g^a \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(iii) Die Abbildung $\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A f \, d\mu \in [0, \infty]$ ist ein Maß.

[a] d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. (i.a) Ist $\alpha = 0$, so sind beide Seiten gleich 0. Ist $\alpha > 0$ und $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ eine Standarddarstellung von f, so ist $\sum_{k=1}^n (\alpha \cdot \alpha_k)\mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ eine Standarddarstellung von αf (denn $f(x) = \alpha_k \Leftrightarrow \alpha f(x) = \alpha \cdot \alpha_k$). Es folgt

$$\int \alpha f \, d\mu = \sum_{k=1}^n (\alpha \cdot \alpha_k)\mu(\{\alpha f = \alpha\alpha_k\}) = \alpha \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(\{f = \alpha_k\}) = \alpha \int f \, d\mu.$$

(i.b) Seien

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{und} \quad g = \sum_{l=1}^m \beta_l \mathbb{1}_{B_l}$$

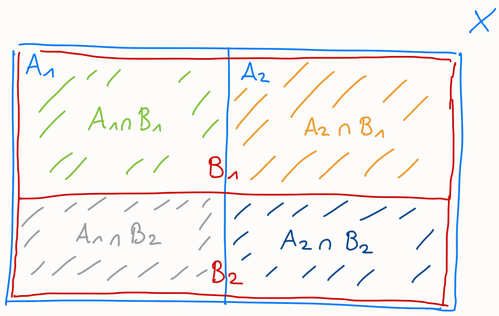
Standarddarstellungen von f und g (der Übersichtlichkeit halber haben wir $A_k := \{f = \alpha_k\}$ und $B_l := \{g = \beta_l\}$ gesetzt). Dann sind $(A_k)_{k=1}^n$ und $(B_l)_{l=1}^m$ Partitionen von X und es gilt somit auch

$$A_k = \bigcup_{l=1}^m (A_k \cap B_l), \quad 1 \le k \le n, \quad \text{und} \quad B_l = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B_l), \quad 1 \le l \le m,$$

wobei diese Vereinigungen beide disjunkt sind. Insbesondere ist auch

$$(A_k \cap B_l)_{(k,l) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}}$$

eine Partition von X.

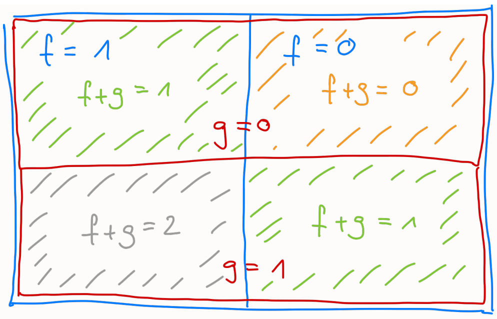


Beispiel einer Partition von X mittels der A_k, B_l.

Nun rechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}\int f \, d\mu + \int g \, d\mu &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) + \sum_{l=1}^m \beta_l \mu(B_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_k \mu(A_k \cap B_l) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \beta_l \mu(A_k \cap B_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (\alpha_k + \beta_l)\mu(A_k \cap B_l).\end{aligned}$$

Jetzt beachten wir, dass entweder $A_k \cap B_l = \emptyset$ oder $f + g = \alpha_k + \beta_l$ auf $A_k \cap B_l$.



Beispiel für mögliche Werte von $f + g$ bei obiger Partition.

Da die Summen $\alpha_k + \beta_l$ für verschiedene Paare (k, l) nicht notwendig verschieden sein müssen, d.h. die Darstellung

$$f + g = \sum_{(k,l)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}} (\alpha_k + \beta_l)\mathbb{1}_{A_k\cap B_l}$$

ist keine Standarddarstellung, müssen wir allerdings noch etwas arbeiten. Dazu sei

$$(f + g)(X) = \{c_1, \dots, c_p\}$$

die Menge der (paarweise verschiedenen) Werte von $f + g$. Ferner sei

$$J_i := \{(k, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} : \alpha_k + \beta_l = c_i\}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Man beachte, dass $(J_i)_{i=1}^p$ dann eine Partition von $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ ist. Setzen wir schließlich für jedes $i = 1, \dots, p$ noch

$$C_i := \{f + g = c_i\} = \bigcup_{(k,l)\in J_i} (A_k \cap B_l),$$

so ist $f + g = \sum_{i=1}^p c_i \mathbb{1}_{C_i}$ eine Standarddarstellung von $f + g$ und somit

$$\begin{aligned}
\int (f + g)\, d\mu &= \sum_{i=1}^p c_i \mu(C_i) = \sum_{i=1}^p c_i \sum_{(k,l)\in J_i} \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{(k,l)\in J_i} (\alpha_k + \beta_l)\mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (\alpha_k + \beta_l)\mu(A_k \cap B_k) = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,
\end{aligned}$$

wobei wir die letzte Gleichung schon oben gezeigt hatten.

(ii) Gilt $f \le g$, so ist $g - f \ge 0$, d.h. $g - f \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$. Damit folgt aus (i) und der Tatsache, dass das Integral einer Funktion aus $\mathcal{E}_+$ nicht-negativ ist, dass

$$\int g\, d\mu = \int (f + (g - f))\, d\mu = \int f\, d\mu + \int (g - f)\, d\mu \ge \int f\, d\mu.$$

(iii) Zunächst gilt $\int_\emptyset f d\mu = \int f\mathbb{1}_\emptyset\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$. Ist ferner $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}$

und $D = \cup_{j\in\mathbb{N}} D_j$, so gilt mit der Standarddarstellung $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$

$$\begin{aligned}\int_D f\,d\mu &= \int f\mathbb{1}_D\,d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}\mathbb{1}_D\right)\,d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k\cap D}\right)\,d\mu \\ &\overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \mathbb{1}_{A_k\cap D}\,d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k\cap D) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_k\cap D_j)) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_k\cap D_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k\cap D_j) = \ldots = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{D_j} f\,d\mu.\end{aligned}$$

□

Die vorherige Proposition hat insbesondere zur Folge, dass wir zur Berechnung des Integrals einer einfachen Funktion $\sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ diese nicht erst in die Standarddarstellung überführen müssen.

Beispiel 5.8. (i) Sind $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0$, so gilt

$$\int \left(\sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}\right)\,d\mu = \sum_{k=1}^n \beta_k \int \mathbb{1}_{B_n}\,d\mu = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_n),$$

selbst dann, wenn die B_k nicht paarweise disjunkt und die β_k nicht paarweise verschieden sind.

(ii) Ist $(X, \mathcal{A}) = ([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$ und $f : [a,b] \to [0,\infty)$ die Treppenfunktion

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k)}$$

mit $a = x_0 < \ldots < x_{n-1} = b$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, so gilt

$$\int f\,d\lambda|_{[a,b]} = \sum_{k=1}^n a_k \lambda((x_{k-1},x_k)) = \sum_{k=1}^n a_k(x_k - x_{k-1}).$$

Dies stimmt mit dem Wert des Riemann-Integrals der Treppenfunktion f überein. Hier ist natürlich $\lambda|_{[a,b]}$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes λ auf die Borel-Menge $[a,b]$.

Wir wollen das Integral nun auf beliebige $\mathcal{A}$-messbare **nicht-negative** Funktionen $f : X \to [0,\infty]$ erweitern. Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir wieder etwas Terminologie ein.

Definition 5.9. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Wir setzen

$$\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}) := \{f : X \to [0,\infty] : f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}.$$

Bemerkung 5.10. Aus unseren Kenntnissen über messbare Funktionen sehen wir unmittelbar:

$$f,g \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}), \quad \alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f+g, f\cdot g, \alpha\cdot f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}).$$

Insbesondere ist für $A \in \mathcal{A}$ mit $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ auch $f \cdot \mathbb{1}_A \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ und darüber hinaus gilt

$$\mathcal{E}_+(X,\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}).$$

Das Integral einer Funktion $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ erhalten wir nun durch Zurückführung auf das Integral einfacher Funktionen.

Definition 5.11. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Das **Lebesgue-Integral von f bezüglich μ** is definiert durch

$$\int f \, d\mu := \int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int g \, d\mu : g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}) \text{ und } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Ist ferner $A \in \mathcal{A}$, so sei

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

Wir verwenden gelegentlich auch die Schreibweisen

$$\int_A f \, d\mu =: \int_A f(x) \, d\mu(x) =: \int_A f(x) \, \mu(dx).$$

Bemerkung 5.12. (i) Man hätte auch auf die Idee kommen können, das Integral $\int f \, d\mu$ wie folgt zu definieren:

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d\mu,$$

wobei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen ist, die punktweise gegen f konvergiert. Eine solche Folge existiert ja nach Proposition 5.4 und wegen der Monotonie des Integrals einfacher Funktionen existiert der Grenzwert der Integrale auf der rechten Seite. Auch der in der Einleitung skizzierten Idee des Lebesgue-Integrals würde dies vielleicht eher entsprechen (man sehe sich dazu die Idee des Beweises von Proposition 5.4 noch einmal an).

Tatsächlich werden wir später zeigen, dass obige Gleichung (unter Verwendung von Definition 5.11) tatsächlich wahr ist. Hätten wir diese jedoch zur Definition des Integrals verwendet, hätte man z.B. zunächst zeigen müssen, dass der Grenzwert rechts unabhängig von der gewählten Folge ist. Auch einige andere Eigenschaften des Integrals, die wir später zeigen werden, folgen leichter aus der von uns gewählten Definition 5.11.

(ii) Für $\varphi \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ haben wir nun zwei Definitionen des Lebesgue-Integrals bzgl. μ, vermöge der Definitionen 5.11 und 5.5. Allerdings stimmen diese überein, denn setzen wir $M_\varphi := \{g \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}) : 0 \leq g \leq \varphi\}$, so gilt

$$\int_{\text{Alt}} \varphi \, d\mu \overset{\varphi \in M_\varphi}{\leq} \sup\{\int_{\text{Alt}} g \, d\mu : g \in M_\varphi\} \overset{g \leq \varphi}{\leq} \int_{\text{Alt}} \varphi \, d\mu,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Monotonie von $\int_{\text{Alt}}$ folgt. Es gilt also

$$\int_{\text{Alt}} \varphi \, d\mu = \sup\{\int_{\text{Alt}} g \, d\mu : g \in M_\varphi\} =: \int_{\text{Neu}} \varphi \, d\mu.$$

Die Aussagen der folgenden Beispiele werden Sie in einer Übung beweisen. Übung

Beispiel 5.13. (i) Für $a \in X$ betrachten wir das **Dirac-Maß** δ_a auf $(X, \mathcal{P}(X))$. Dann ist jede Funktion $f : X \to [0, \infty]$ messbar und es gilt

$$\int_X f \, d\delta_a = f(a).$$

(ii) Auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ betrachten wir das **Zählmaß** ν. Dann ist jede Funktion (d.h. Folge) $f : \mathbb{N} \to$

$[0, \infty]$ messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

(iii) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to [0, \infty]$ eine Zufallsvariable (vergleiche Beispiel 4.7), so heißt das Integral

$$\mathbb{E}(X) := \int X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) := \int X \, d\mathbb{P}$$

der **Erwartungswert** von X. Für den Würfelwurf mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty], \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{6}$$

ergibt sich etwa für $X(\omega) = \omega$, dass

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 21/6 = 3.5$$

Die Monotonie des Integrals einfacher Funktionen überträgt sich sofort auf das Integral nicht-negativer Funktionen.

Proposition 5.14. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt:

(i) Ist $f \leq g$, so auch $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(ii) Sind $A, B \in \mathcal{A}$ und gilt $A \subseteq B$, so auch $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.

Beweis. (i) Ist $h \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ und $0 \leq h \leq f$, so folgt auch $0 \leq h \leq g$, d.h.

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \sup\{\int h \, d\mu : h \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}), 0 \leq h \leq f\} \\ &\leq \sup\{\int h \, d\mu : h \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A}), 0 \leq h \leq g\} = \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

(ii) Folgt aus (i) wegen $f\mathbb{1}_A \leq f\mathbb{1}_B$.

□

Das nächste Resultat ist einer der **zentralen Sätze** der Lebesgueschen Integrationstheorie.

Satz 5.15 (Satz von der monotonen Konvergenz (auch Satz von Beppo Levi genannt)). Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$, d.h. punktweise gilt

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann existiert die punktweise Grenzfunktion $f := \lim_{n \to \infty} f_n$, es gilt $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu,$$

d.h. Integral und Grenzwert dürfen vertauscht werden.

Wir schreiben die Voraussetzung im Folgenden oft auch kurz als $f_n \nearrow f$.

Beweis. Aus der Monotonie von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt sofort die Existenz von $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ und aus Proposition 3.13 folgt $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Ferner folgt aus der Voraussetzung, dass $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$, d.h. aus der Monotonie des Lebesgue-Integrals folgt

$$0 \leq \int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \leq \int f \, d\mu \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist auch die Folge $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty]$ monoton wachsend, d.h.

$$L := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \in [0,\infty]$$

existiert und es gilt $L \leq \int f \, d\mu$.

Die umgekehrte Ungleichung $\int f \, d\mu \leq L$ ist offensichtlich erfüllt, wenn $L = \infty$, d.h. wir können $L < \infty$ annehmen. Weiterhin genügt es zu zeigen, dass für alle $g \in \mathcal{E}_+(X,\mathcal{A})$ mit $g \leq f$ und alle $c \in (0,1)$ gilt, dass

$$c \cdot \int g \, d\mu \leq L,$$

denn durch Supremumsbildung folgt hieraus, dass

$$c \cdot \int f \, d\mu = c \sup\{\int g \, d\mu : g \in \mathcal{E}_+(X,\mathcal{A}), 0 \leq g \leq f\} \leq L$$

und für $c \nearrow 1$ dann auch $\int f \, d\mu \leq L$. Seien also g und c so gewählt und setze

$$B_n := \{cg \leq f_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $f_n \leq f_{n+1}$ gilt dann $B_n \subseteq B_{n+1}$, und wegen $g \leq f$ und $f_n \nearrow f$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$. In der Tat: Ist $x \in X$ so ist entweder $g(x) = 0$ (d.h. $x \in B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) oder $g(x) > 0$. Im letzen Fall ist dann wegen $0 < c < 1$ auch $0 < cg(x) \leq cf(x) < f(x)$, d.h. wegen $f_n \nearrow f$ können wir $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $f_n(x) > cg(x)$ (also ist $x \in B_n$ für dieses n).

Nach Definition von B_n folgt nun für alle $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung der positiven Homogenität des Integrals einfacher Funktionen, dass

$$c \int_{B_n} g \, d\mu = c \int g \mathbb{1}_{B_n} d\mu = \int cg \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \leq \int f_n \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu.$$

Da $\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A g \, d\mu$ nach Proposition 5.7 (iii) ein Maß ist, folgt aus dessen Stetigkeit von unten (vergleiche Satz 4.5 (iv)) dann aus dieser Ungleichung, dass

$$c \int g \, d\mu = c \int_X g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} c \int_{B_n} g \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = L.$$

□

Bemerkung 5.16. (i) Wir wir in der Einleitung im ersten Kapitel gesehen haben, ist eine analoge Aussage zum Satz über monotone Konvergenz für das Riemann-Integral falsch.

(ii) Auch für nicht-monotone punktweise konvergente Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ dürfen Grenzwert und Integral in der Regel nicht vertauscht werden. Für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$ und $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ gilt zum Beispiel $f_n \to 0$ punktweise, aber

$$\int f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} \int \mathbb{1}_{[0,n]} \, d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für nicht-monotone Folgen gilt immerhin noch das folgende Resultat.

Lemma 5.17 (Lemma von Fatou). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Für das Beispiel vor dem Lemma gilt tatsächlich $0 = \int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = 1$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n := \inf_{k\geq n} f_k \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}) \quad \text{und} \quad h_n := \inf_{k\geq n} \int f_k\, d\mu \in [0, \infty].$$

Nach Definition des Limes-Inferior müssen wir zeigen, dass

$$\int (\lim_{n\to\infty} g_n)\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} h_n.$$

Da $g_n \leq f_k$ für alle $k \geq n$, gilt zunächst

$$\int g_n\, d\mu \leq \int f_k\, d\mu \quad (k \geq n)$$

also auch

$$\int g_n\, d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int f_k\, d\mu \ = h_n.$$

Da $g_n \leq g_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int (\lim_{n\to\infty} g_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} h_n.$$

□

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz können wir nun auch die noch fehlenden Eigenschaften des Lebesgue-Integrals beweisen.

Satz 5.18. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(i) Das Lebesgue-Integral ist pos. homogen und additiv, d.h. für $f, g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und $\alpha \geq 0$ gilt

$$\text{(a)} \quad \int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

$$\text{(b)} \quad \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

(ii) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und

$$\int \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu.$$

Beweis. (i) Da $f, g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$, können wir mit Proposition 5.4 Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ wählen, so dass $\varphi_n \nearrow f$ und $\psi_n \nearrow g$ für $n \to \infty$. Dann gilt $\alpha\varphi_n \nearrow \alpha f$ und $\varphi_n + \psi_n \nearrow f + g$. Aus dem Satz über monotone Konvergenz und der positiven Homogenität und Additivität des Integrals für einfache Funktionen folgt

$$\int \alpha f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \alpha \varphi_n \, d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$$

und

$$\begin{aligned}\int (f+g) \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int \varphi_n \, d\mu + \int \psi_n \, d\mu \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.\end{aligned}$$

(ii) Setze $g_N := \sum_{n=1}^N f_n \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt $g_N \nearrow f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ punktweise, d.h. $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ nach Proposition 3.13. Aus Teil (i) (und der sich daraus ableitenden endlichen Additivität des Lebesgue-Integrals) und monotoner Konvergenz folgt

$$\int f \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int g_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^N f_n \right) \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \int f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

□

Beispiel 5.19. Wählt man in Teil (ii) des vorherigen Satzes als Maß das Zählmaß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, so erhält man unter Beachtung von Beispiel 5.13 (ii) das schon bekannte Resultat, dass Doppelsummen nicht-negativer Zahlen vertauscht werden können. Mit

$$f_n : \mathbb{N} \to [0, \infty], \quad f_n(m) := a_{nm}$$

und

$$f : \mathbb{N} \to [0, \infty], \quad f(m) := \sum_{n=1}^\infty f_n(m) = \sum_{n=1}^\infty a_{nm}$$

gilt nämlich

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty a_{nm} = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\nu = \int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) \, d\nu = \int f \, d\nu = \sum_{m=1}^\infty f(m) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{nm}.$$

Als Korollar von Satz 5.18 erhalten wir folgende Verallgemeinerung von Proposition 5.7 (iii).

Korollar 5.20. Für $\psi \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ ist die Abbildung

$$\rho : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A \psi \, d\mu$$

ein Maß und für $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ gilt

$$\int f \, d\rho = \int f\psi \, d\mu.$$

Man nennt ψ eine **Dichte von** ρ **bezüglich** μ und schreibt $\rho = \psi \cdot \rho$ oder $d\rho = \psi \, d\mu$.

Beweis. (a) Es gilt $\rho(\emptyset) = \int_\emptyset \psi \, d\mu = \int \psi \mathbb{1}_\emptyset \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$. Ist ferner $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte

Folge in $\mathcal{A}$ und $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A.$$

Aus Satz 5.18 (ii) folgt also

$$\rho(A) = \int_A \psi \, d\mu = \int \psi \mathbb{1}_A \, d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} \psi \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \mathbb{1}_{A_n} \psi \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \psi \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n).$$

(b) Ist $f = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{A}$, so gilt

$$\int f \, d\rho = \int \mathbb{1}_A \, d\rho = \rho(A) = \int_A \psi \, d\mu = \int \mathbb{1}_A \psi \, d\mu = \int f\psi \, d\mu.$$

Damit folgt aus der positiven Homogenität und Additivität des Integrals auch für eine einfache Funktion $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$, dass

$$\int f \, d\rho = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \mathbb{1}_{A_k} \, d\rho = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int \mathbb{1}_{A_k} \psi \, d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \right) \psi \, d\mu = \int f\psi \, d\mu.$$

Ist schließlich $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ beliebig, so wähle mit Proposition 5.4 eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ mit $f_n \nearrow f$. Dann folgt aus dem schon Bewiesenen und dem Satz über monotone Konvergenz, dass

$$\int f \, d\rho = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\rho = \lim_{n\to\infty} \int f_n \psi \, d\mu = \int f\psi \, d\mu.$$

□

Bemerkung 5.21. Unser Vorgehen im Beweis von Teil (b), d.h. erst charakteristische, dann einfache und dann messbare Funktionen zu betrachten, findet man in der Integrationstheorie immer wieder an. Wir nennen es das **Standardbeweisprinzip der Integrationstheorie**.[a]

[a] Wann das Standardbeweisprinzip beim Beweis einer Gleichung der Form $\int f \, d\mu = I(f), f \in \mathcal{M}_+$, funktioniert, lässt sich abstrakt beschreiben: die Gleichung muss für charakteristische Funktionen erfüllt sein, das Funktional $I : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ muss $\mathbb{R}$-linear sein und für jede monoton wachsende Folge (φ_n) aus $\mathcal{E}_+$ muss $\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = I(\lim_{n\to\infty} \varphi_n)$ gelten.

Mit dem Standardbeweisprinzip lassen sich etwa folgende Sachverhalte leicht beweisen.

Proposition 5.22. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$.

(i) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A f \, d\mu = \int f|_A \, d\mu|_A.$$

Hierbei sind $f|_A$ und $\mu|_A$ die jeweiligen Einschränkungen auf A, siehe Beispiel 4.4 (v).

(ii) Sei $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ messbar. Dann gilt

$$\int_Y f \, d\mu_\varphi = \int_X (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

Man nennt dies die **Transformationsformel für das Integral eines Bildmaßes**, vergleiche Satz 4.6.

Beweis. Übung. □ Übung

Beispiel 5.23. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$. Sind $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, und ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = ax + b,$$

so folgt aus den Sätzen 4.19 und 4.20, dass für $B \in \mathcal{B}_1$

$$\lambda_\varphi(B) = \lambda(\varphi^{-1}(B)) = \lambda\left(a^{-1}B - a^{-1}b\right) = \lambda\left(a^{-1}B\right) = |a|^{-1}\lambda(B).$$

Mit der Transformationsformel folgt also für $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x) = |a| \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda_\varphi = |a| \int_{\mathbb{R}} (f \circ \varphi)\, d\lambda = |a| \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\, d\lambda(x).$$

Wir müssen zum Abschluss dieses Abschnitts noch über die Rolle von Nullmengen sprechen.

Proposition 5.24. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, so gilt

$$\int_X f\, d\mu = \int_{X \setminus A} f\, d\mu.$$

Insbesondere gilt $\int_A f\, d\mu = 0$ (selbst dann, wenn $f = \infty$ auf A).

Beweis. Nach Satz 5.18 (iii) gilt

$$\int_X f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_{X \setminus A} f\, d\mu,$$

d.h. es genügt $\int_A f\, d\mu = 0$ zu zeigen. Dies ist offensichtlich im Fall $f = \mathbb{1}_B, B \in \mathcal{A}$, denn

$$0 \leq \int_A \mathbb{1}_B\, d\mu = \int \mathbb{1}_{A \cap B}\, d\mu = \mu(A \cap B) \leq \mu(A) = 0.$$

Der allgemeine Fall folgt dann mit dem Standardbeweisprinzip der Integrationstheorie. □

Für den besseren Umgang mit Nullmengen führen wir nun noch eine Sprechweise ein.

Definition 5.25. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E(x)$ eine Eigenschaft, die $x \in X$ hat oder nicht. Wir sagen, die Eigenschaft E gilt μ-**fast sicher** (μ-f.s.) bzw. für μ-**fast alle** (μ-f.a.) $x \in X$, falls sie außerhalb einer μ-Nullmenge gilt. Also falls $N \in \mathcal{A}$ existiert, so dass

$$\{x \in X : \neg E(x)\} \subseteq N \quad \text{und} \quad \mu(N) = 0.$$

Bemerkung 5.26. (i) Man beachte, dass wir nicht fordern, dass die Menge

$$\{x \in X : \neg E(x)\} \quad \left(\text{bzw. ihr Komplement } \{x \in X : E(x)\}\right)$$

selbst messbar ist. **Ist dies jedoch der Fall**, so gilt die Äquivalenz

$$\mu\left(\{x \in X : \neg E(x)\}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E \text{ gilt für } \mu\text{-fast alle } x \in X.$$

Wie ist die Situation im Falle, dass der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig ist?

(ii) Gelten die Eigenschaften $E_n, n \in \mathbb{N}$, jeweils μ-fast sicher und definieren wir

$$E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N} : E_n(x))$$

so gilt E ebenfalls μ-fast sicher (da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist).

Beispiel 5.27. (i) Sind etwa $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und $f_n \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}), n \in \mathbb{N}$, so bedeutet

$$f_n \to f \ \mu\text{-fast sicher}$$

dasselbe wie

$$f_n(x) \to f(x) \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X.$$

Da $\{f_n \to f\} \in \mathcal{A}$ (Übung) ist beides gleichbedeutend mit Übung

$$\mu\left(\{f_n \nrightarrow f\}\right) = 0.$$

(ii) Betrachten wir die Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$, so gilt

$$\mathbb{1}_\mathbb{Q}(x) = 0 \text{ für } \lambda\text{-fast alle } x \in X$$

bzw. $\mathbb{1}_\mathbb{Q} = 0$ λ-fast sicher, denn $\lambda\left(\{\mathbb{1}_\mathbb{Q} \neq 0\}\right) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Proposition 5.28. Seien $f, g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt:

(i) Ist $f \leq g$ μ-f.s., so ist $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(ii) Ist $f = g$ μ-f.s., so ist $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

(iii) $\int f \, d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-f.s.

(iv) Gilt $\int f \, d\mu < \infty$, so ist $f < \infty$ μ-f.s.

(v) **Fast sichere Version des Satzes von der monotonen Konvergenz**:

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ mit $f_n \nearrow f$ μ-fast sicher, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Beweis. (i) Es gilt $C := \{f \leq g\} \in \mathcal{A}$ und nach Voraussetzung ist $\mu(X \setminus C) = 0$. Unter Verwendung von Proposition 5.24 und der Monotonie des Integrals folgt also

$$\int_X f \, d\mu = \int_C f \, d\mu \leq \int_C g \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

(ii) Da $f \leq g$ und $g \leq f$ jeweils μ-fast sicher, folgt dies durch zweimalige Anwendung von (i).

(iii) „$\Leftarrow$“: Folgt sofort aus Teil (ii).

„$\Rightarrow$“: Setze $A_n := \{f \geq 1/n\} = \{nf \geq 1\}, n \in \mathbb{N}$. Es folgt $A_n \in \mathcal{A}$ und

$$0 \leq \mu(A_n) = \int \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = \int 1 \cdot \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \leq n \int f \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \leq n \int f \, d\mu = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also $\mu(A_n) = 0, n \in \mathbb{N}$, und damit

$$0 \leq \mu\left(\{f > 0\}\right) = \mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0,$$

d.h. $\mu(\{f > 0\}) = 0$ und $f = 0$ μ-fast sicher.

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit $A = \{f = \infty\} \in \mathcal{A}$

$$n\mu(A) = \int n\mathbb{1}_A \, d\mu \leq \int f\mathbb{1}_A \, d\mu \leq \int f \, d\mu < \infty,$$

was $\mu(A) = 0$ impliziert.

(v) Nach Voraussetzung gilt für die Menge

$$A := \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq f_{n+1}\}\right) \cap \{f_n \to f\} \in \mathcal{A},$$

dass $\mu(X \setminus A) = 0$, d.h. $f = f\mathbb{1}_A$ und $f_n = f_n\mathbb{1}_A$ jeweils μ-fast sicher. Ferner gilt $f_n\mathbb{1}_A \nearrow f\mathbb{1}_A$. Aus Teil (ii) und dem Satz über monotone Konvergenz folgt demnach

$$\int f \, d\mu = \int f\mathbb{1}_A \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\mathbb{1}_A \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

Bemerkung 5.29. Sei $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}), g : X \to [0, \infty]$ und es gelte $f = g$ μ-fast sicher.

(i) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig, so ist auch g messbar, d.h. $g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ (Beweis: Übung). Übung

(ii) Im Allgemeinen muss g **nicht** messbar sein. In Teil (ii) der vorherigen Proposition muss die Messbarkeit von g also gefordert werden.

Beweisidee: Man kann zeigen, dass die Borel-Mengen $\mathcal{B}_1$ und $\mathbb{R}$ dieselbe Mächtigkeit besitzen, $|\mathcal{B}_1| = |\mathbb{R}|$. Für die überabzählbare Cantormenge $C \subseteq [0, 1]$ (siehe Übungen) gilt ebenso $|C| = |\mathbb{R}|$ und damit

$$|\mathcal{P}(C)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}| = |\mathcal{B}_1|.$$

Es existiert also eine Teilmenge $A \subseteq C$, die nicht Borel-messbar ist. Da $\lambda(C) = 0$, stimmt die Borel-messbare Funktion $\mathbb{1}_{[0,1]}$ also λ-fast sicher mit der nicht Borel-messbaren Funktion $\mathbb{1}_{[0,1]\setminus A}$ überein.

6. Integrierbare Funktionen

> **Stichpunkte.** Integrierbare Funktionen und ihr Integral, Dreiecksungleichung, Majorantenkriterium, Satz von der dominierten Konvergenz, Ausschöpfungssatz, Riemann- vs. Lebesgue-Integral, Parameterintegrale

Bis hierhin haben wir nur positive Funktionen integriert. Dies wollen wir nun auf beliebige messbare Funktionen ausdehnen.

Definition 6.1. Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, so sei

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{A}) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}.$$

Diese Schreibweise passt natürlich zur schon vorher benutzten Schreibweise $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ für die nicht-negativen $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen.

Beachten wir nun, dass wir eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ in ihre Positiv- und Negativteile $f_\pm : X \to [0, \infty]$ aufspalten können (vergleiche Definition 3.15), d.h. es gilt

$$f = f_+ - f_- \quad \text{mit} \quad f_+ := \max(f, 0) \quad \text{und} \quad f_- := \max(-f, 0),$$

und dass nach Proposition 3.12 und Korollar 3.16 (ii)

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad f_+ \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}) \text{ und } f_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}),$$

so ergibt die folgende Definition einen Sinn.

Definition 6.2. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ heißt **μ-integrierbar** (oder kurz: integrierbar), falls

$$\int f_+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f_- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall ist das **Lebesgue-Integral von f bzgl. μ** definiert als

$$\int f \, d\mu := \int_X f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu.^a$$

Ist ferner $A \in \mathcal{A}$ und $f\mathbb{1}_A$ μ-integrierbar, so nennen wir f **auf A integrierbar** und setzen

$$\int_A f \, d\mu := \int f\mathbb{1}_A \, d\mu.$$

[a] Es ist also $\int f \, d\mu \in (-\infty, \infty)$.

Bemerkung 6.3. (i) Wie zuvor benutzen wir auch die Schreibweisen

$$\int_A f \, d\mu =: \int_A f(x) \, d\mu(x) =: \int_A f(x) \, \mu(dx).$$

(ii) Ist $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, so ist f integrierbar, falls $\int f\, d\mu < \infty$.

(iii) In manchen Anwendungen ist es zweckmäßig, eine messbare Funktion $f : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ als μ-**quasi-integrierbar** zu bezeichnen, falls

$$\int f_+\, d\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int f_-\, d\mu < \infty$$

und auch in diesem Fall $\int f\, d\mu := \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu \in [-\infty, \infty]$ zu setzen. Allerdings müssen hier die Rechenregeln, die wir im Folgenden besprechen, nicht unbedingt immer gelten.

Wir sammeln zunächst die grundlegenden Eigenschaften des Integrals.

Satz 6.4. Es sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum.

(i) Sei $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$.

a) Es gilt

$$f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad |f| \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}$$

und in diesem Fall gilt die **Dreiecksungleichung** $\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

b) Ist $g \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ μ-integrierbar und gilt $|f| \leq g$ μ-fast sicher, so ist f ebenfalls μ-integrierbar. (**Majorantenkriterium**[a])

c) Ist $A \in \mathcal{A}$, so gilt

$$f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar auf } A \text{ und auf } A^c$$

und in diesem Fall gilt $\int_X f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_{A^c} f\, d\mu$.

(ii) Sind $f, g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ μ-integrierbar, so gilt:

a) Ist $f+g$ definiert, so ist $f+g$ μ-integrierbar und $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

b) Die Funktion αf ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ μ-integrierbar und $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$.

c) Gilt $f \leq g$ μ-fast sicher, so auch $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

d) Ist $h \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ und gilt $f = h$ μ-fast sicher, so ist auch h μ-integrierbar und es gilt $\int f\, d\mu = \int h\, d\mu$.

(iii) Ist $\varphi : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ messbar und $f \in \mathcal{M}(Y,\mathcal{B})$, so gilt

$$f \text{ ist } \mu_\varphi\text{-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \varphi \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}$$

und in diesem Fall gilt die **Transformationsformel für das Bildmaß**

$$\int_Y f\, d\mu_\varphi = \int_X (f \circ \varphi)\, d\mu.$$

(iv) Ist $\psi \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ und ρ ein Maß mit Dichte ψ bzgl. μ, d.h. $\rho = \psi \cdot \mu$[b], so gilt für $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$:

$$f \text{ ist } \rho\text{-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \cdot \psi \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}$$

und in diesem Fall ist

$$\int f\, d\rho = \int f\psi\, d\mu.$$

[a] Man nennt g in diesem Fall auch eine integrierbare **Majorante** von f.

[b] siehe Korollar 5.20.

Beweis. (i.a) Es gilt $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Ferner ist $|f| = f_+ + f_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Aus der Additivität des Integrals nicht-negativer Funktionen folgt damit

$$\int f_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

Insbesondere ist $\int |f| \, d\mu < \infty$ genau dann, wenn $\int f_\pm \, d\mu < \infty$. Ferner folgt in diesem Fall aus der Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}$, dass

$$\left|\int f \, d\mu\right| = \left|\int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu\right| \le \left|\int f_+ \, d\mu\right| + \left|\int f_- \, d\mu\right| = \int f_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

(i.b) Aus $|f| \le g$ μ-fast sicher folgt mit Proposition 5.28 (i), dass

$$\int |f| \, d\mu \le \int g \, d\mu < \infty.$$

Wegen (i.a) ist f also μ-integrierbar.

(i.c) Da $|f| = |f| \mathbb{1}_A + |f| \mathbb{1}_{A^c}$ folgt wieder aus der Additivität des Integrals nicht-negativer Funktionen, dass

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_{A^c} |f| \, d\mu.$$

Insbesondere ist $\int_X |f| \, d\mu < \infty$ genau dann, wenn beide Integrale auf der rechten Seite endlich sind. Nach (i.a) zeigt dies wiederum, dass f μ-integrierbar ist genau dann, wenn f auf A und auf A^c μ-integrierbar ist. Der Rest der Aussage folgt dann mit der Additivität des Integrals, die wir im nächsten Punkt beweisen.

(ii.a) Da $|f + g| \le |f| + |g|$ folgt die μ-Integrierbarkeit von $h := f + g$ aus dem Majorantenkriterium und (i.a). Nun teile f und g in ihre Positiv- und Negativteile auf, d.h. $f = f_+ - f_-$ und $g = g_+ - g_-$ mit $f_\pm, g_\pm \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ jeweils μ-integrierbar. Dann ist $h = h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$, d.h. $h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$. Mit der Additivität des Integrals nicht-negativer Funktionen folgt

$$\int h_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu + \int g_- \, d\mu = \int h_- \, d\mu + \int f_+ \, d\mu + \int g_+ \, d\mu.$$

Da alle hier beteiligten Integrale endlich sind, können wir umordnen und erhalten

$$\begin{aligned}\int (f+g) \, d\mu &= \int h \, d\mu = \int h_+ \, d\mu - \int h_- \, d\mu \\ &= \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu + \int g_+ \, d\mu - \int g_- \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.\end{aligned}$$

(ii.b) Da $|\alpha f| = |\alpha||f| \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$, folgt die μ-Integrierbarkeit von αf aus Teil (i) und der positiven Homogenität des Integrals für nicht-negative Funktionen. Da

$$(\alpha f)_+ = \begin{cases} \alpha f_+, & \alpha \ge 0 \\ -\alpha f_-, & \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad (\alpha f)_- = \begin{cases} \alpha f_-, & \alpha \ge 0 \\ -\alpha f_+, & \alpha < 0 \end{cases}$$

folgt aus der positiven Homogenität ebenso, dass im Falle $\alpha \ge 0$

$$\int (\alpha f) \, d\mu = \int \alpha f_+ \, d\mu - \int \alpha f_- \, d\mu = \alpha \int f_+ \, d\mu - \alpha \int f_- \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$$

und analog im Falle $\alpha < 0$.

(ii.c) Aus $f \leq g$ μ-fast sicher folgt $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$ jeweils μ-fast sicher. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 5.28 (i).

(ii.d) Nach Voraussetzung gilt insbesondere auch $|h| = |f|$ μ-fast sicher. Da $|f|$ nach (i.a) μ-integrierbar ist, folgt die μ-Integrierbarkeit von h aus dem Majorantenkriterium. Die Gleichheit der Integrale von f und h folgt dann durch zweimalige Anwendung von (ii.c)

(iii) Wegen $(f \circ \varphi)_\pm = f_\pm \circ \varphi$ folgt dies unmittelbar aus Proposition 5.22.

(iv) Da $\psi \geq 0$ folgt $(f \cdot \psi)_\pm = f_\pm \cdot \psi$ und die Aussage folgt sofort aus Korollar 5.20. □

Neben dem Satz über die monotone Konvergenz ist der nachfolgende Satz das **zweite Hauptresultat der Lebesgueschen Integrationstheorie.**

Satz 6.5 (Satz über die dominierte Konvergenz (bzw. Satz von Lebesgue)). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, so dass

(i) $f_n \to f$ μ-fast sicher,

(ii) es existiert eine μ-integrierbare Funktion $g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |f_n| \leq g \quad \mu\text{-fast sicher.}$$

Dann sind die Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$, und f ebenfalls μ-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Man nennt die Funktion g eine **integrierbare Majorante** der Folge (f_n).

Beweis. Aus (i) und (ii) folgt

$$|f_n| \leq g \quad \text{und} \quad |f| \leq g$$

jeweils μ-fast sicher, d.h. aus dem Majorantenkriterium (Satz 6.4 (i.b)) folgt, dass auch f und die f_n jeweils μ-integrierbar sind. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: Wir nehmen an, dass die Aussagen in (i) und (ii) sogar auf ganz X gelten (und nicht nur μ-fast überall) und dass $g(x) < \infty, x \in X$.

Dann nehmen auch die Funktionen f_n und f die Werte $\pm\infty$ nicht an, d.h. die nicht-negative Funktion $|f_n - f|$ ist auf ganz X definiert und $\mathcal{A}$-messbar. Wegen

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

und dem Majorantenkriterium ist die Funktion $|f_n - f|$ dann auch μ-integrierbar. Unser Ziel ist nun, zu zeigen, dass

$$\limsup_{n \to \infty} \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0.$$

Dies würde $\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ implizieren und damit auch die behauptete Konvergenz, denn wegen der Dreiecksungleichung gilt dann

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Um obige Abschätzung zu zeigen sei $h_n := 2g - |f_n - f|$. Dann gilt $0 \leq h_n \leq 2g$ und $h_n \to 2g$.

Insbesondere ist h_n ebenfalls μ-integrierbar und mit dem Lemma von Fatou (Lemma 5.17) folgt

$$\int 2g\, d\mu = \int (\liminf_{n\to\infty} h_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int 2g\, d\mu - \int |f_n - f|\, d\mu \right)$$
$$= \int 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu,$$

was

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

impliziert und damit den Beweis im 1. Fall vervollständigt.

2. Fall: Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Die Mengen

$$A := \{f_n \to f\}, \quad A_n := \{|f_n| \leq g\} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad B := \{g < \infty\}$$

sind Elemente von $\mathcal{A}$ und nach Voraussetzung gilt $\mu(X \setminus A) = \mu(X \setminus A_n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 5.28 (iii) gilt ferner $\mu(X \setminus B) = 0$. Nun sei

$$C := A \cap B \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Dann ist $\mu(X \setminus C) = 0$. Setzen wir

$$F_n := f_n \mathbb{1}_C, \quad F := f \mathbb{1}_C \quad \text{und} \quad G := g \mathbb{1}_C,$$

so sind dies jeweils $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, es gilt $F_n = f_n, F = f$ und $G = g$ jeweils μ-fast sicher, und

$$(I) \quad |F_n(x)| \leq G(x) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad (II) \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad (x \in X).$$

Ferner ist G auch μ-integrierbar und $G(x) < \infty, x \in X$. Also sind alle Voraussetzungen von Schritt 1 erfüllt und zusammen mit Satz 6.4 (ii.d) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int F_n\, d\mu = \int F\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

□

Bemerkung 6.6. Auf die Existenz einer integrierbaren Majorante g kann im vorherigen Satz nicht verzichtet werden. Selbst im Falle

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n|\, d\mu < \infty$$

ist die Vertauschung (oder sogar die Existenz) der Grenzwerte im Allgemeinen nicht gerechtfertigt (bzw. gegeben). Dies sieht man etwa wieder am Beispiel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$ und $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$, vergleiche Bemerkung 5.16 (ii).

Beispiel 6.7. Ist μ ein endliches Maß auf $(X, \mathcal{A})$ (z.B. ein Wahrscheinlichkeitsmaß) und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte punktweise konvergente Folge in $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, d.h. es existiert $c \geq 0$ und $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit

$$f_n \to f \quad \text{und} \quad |f_n| \leq c \quad (n \in \mathbb{N}),$$

so gilt
$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$
Denn in diesem Fall ist $c \cdot \mathbb{1}_X$ eine integrierbare Majorante.

Der Satz über die dominierte Konvergenz erlaubt es zum Beispiel, ein Integral über X durch Ausschöpfen von X zu berechnen.

Korollar 6.8. (Ausschöpfungssatz) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, so dass $X_n \subseteq X_{n+1}$ und $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. [a] Dann sind für $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ äquivalent:

(i) f ist μ-integrierbar.

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_n} |f|\,d\mu < \infty$.

In diesem Fall gilt
$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f\,d\mu.$$

[a] Man nennt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall eine **Ausschöpfung** von X.

Für $f : X \to \mathbb{R}$ ist beispielsweise $X_n := \{|f| \leq n\}$ eine mögliche Wahl für das vorherige Korollar. Dies zeigt etwa, dass man in vielen Beweisen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass eine integrierbare Funktion beschränkt ist.

Beweis. Setze $f_n := f\mathbb{1}_{X_n}, n \in \mathbb{N}$. Dann impliziert die Ausschöpfungseigenschaft der X_n, dass
$$\mathbb{1}_{X_n} \nearrow \mathbb{1}_X \text{ und damit } f_n \to f \text{ und } |f_n| \nearrow |f|\,.$$
$(i) \Rightarrow (ii)$: Wegen $|f_n| \leq |f|$ ist f in diesem Fall eine μ-integrierbare Majorante, d.h. aus dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt
$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f\,d\mu.$$
Ferner gilt offensichtlich
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X_n} |f|\,d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n|\,dx \leq \int_X |f|\,d\mu < \infty.$$
$(ii) \Rightarrow (i)$: Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt
$$\int_X |f|\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int |f_n|\,d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X_n} |f|\,d\mu < \infty.$$
Also ist $|f|$ und damit auch f selbst μ-integrierbar. □

Wir wenden uns noch ein paar Anwendungen der dominierten Konvergenz zu.

1. Anwendung: Vergleich Riemann- und Lebesgue-Integral

Vereinbarung: Es ist sinnvoll, im Folgenden die Einschränkung $\lambda|_I$ des Lebesgue-Maßes auf ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ einfach wieder mit λ zu bezeichnen.

Satz 6.9. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar **und** Borel-messbar. Dann ist f auch λ-integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda,$$

d.h. das Riemann-Integral von f (auf der linken Seite) stimmt mit dem Lebesgue-Integral von f (auf der rechten Seite) überein.

Beispiel 6.10. (i) Aus den Analysis-Grundvorlesungen wissen Sie, dass jede **Regelfunktion** f Riemann-integrierbar ist. Als gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen ist f dann auch Borel-messbar. Die Klasse der Regelfunktionen umfasst insbesondere alle **stetigen Funktionen** und alle **monotonen Funktionen**.

(ii) Wir kennen mit der Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ bereits eine λ-integrierbare Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist. Es gilt also die Inklusionskette

$$\{\text{Regelfkt.}\} \subsetneq \{\text{messbar und Riemann-integr.}\} \subsetneq \{\text{Lebesgue-integr.}\}$$

Wir werden nach dem Beweis des Satzes noch einmal auf die Frage der Borel-Messbarkeit von Riemann-integrierbaren Funktionen zu sprechen kommen.

Beweis (von Satz 6.9). Da Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind, können wir (unter Verwendung von Beispiel 5.23 (i)) durch Übergang zur Funktion

$$[0,1] \ni x \mapsto f((b-a)x+a) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \in [0,\infty)$$

ohne Einschränkung annehmen, dass $f : [0,1] \to [0,\infty)$ abbildet.

Wir betrachten eine Folge $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$ gegeben durch

$$\mathcal{Z}_n = \{x_j : j = 0,\dots,2^n\}, \quad \text{wobei } x_j = \frac{j}{2^n}.$$

Man beachte, dass $\mathcal{Z}_n \subseteq \mathcal{Z}_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Für fixiertes n und $1 \le j \le 2^n$ setzen wir

$$M_j := \sup_{x\in(x_{j-1},x_j]} f(x) \quad \text{und} \quad m_j := \inf_{x\in(x_{j-1},x_j]} f(x)$$

und betrachten die Treppenfunktionen

$$G_n := \sum_{j=1}^{2^n} M_j \mathbb{1}_{(x_{j-1},x_j]} \quad \text{und} \quad g_n := \sum_{j=1}^{2^n} m_j \mathbb{1}_{(x_{j-1},x_j]}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$g_n(x) \le f(x) \le G_n(x), \quad x \in (0,1].$$

Betrachten wir nun zunächst die G_N: diese sind Borel-messbar und wegen $\mathcal{Z}_n \subseteq \mathcal{Z}_{n+1}$ gilt $G_{n+1} \le G_n$, d.h. $G := \lim_{n\to\infty} G_n$ existiert und ist ebenfalls Borel-messbar. Ferner gilt

$$|G_n(x)| \le \|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad x \in [0,1].$$

Da $\lambda|_{[0,1]}$ endlich ist, ist die konstante Funktion $\|f\|_\infty \mathbb{1}_{[0,1]}$ also eine integrierbare Majorante der Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt somit, dass auch G

integrabel ist und es gilt
$$\int_{[0,1]} G\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} G_n\,d\lambda.$$
Aber nach Beispiel 5.8 (ii) gilt
$$\int_{[0,1]} G_n\,d\lambda = \sum_{j=1}^{2^n} M_j(x_j - x_{j-1}) =: O_n f.$$
Dies ist gerade die Riemannsche-Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}_n$. Da f Riemann-integrierbar ist und die Feinheit der Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ für $n\to\infty$ gegen 0 geht, folgt insbesondere
$$\int_{[0,1]} G\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} G_n\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} O_n f = \int_0^1 f(x)\,dx.$$
Betrachten wir nun auf analoge Weise die Funktionen g_n, deren Integral gerade die Riemannsche-Untersumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ liefert. Wie zuvor existiert $g := \lim_{n\to\infty} g_n$, diese Funktion ist integrierbar und es gilt
$$\int_{[0,1]} g\,d\lambda = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \text{also auch} \quad \int_{[0,1]} g\,d\lambda = \int_{[0,1]} G\,d\lambda \quad \text{und} \quad \int_{[0,1]} (G-g)\,d\lambda = 0.$$
Da $G - g \geq 0$ folgt also aus Proposition 5.28 (iii), dass $G = g$ λ-fast-sicher, d.h. $\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ λ-fast sicher. Wegen $g_n \leq f \leq G_n$ zeigt dies, dass auch $f = G = g$ λ-fast sicher. Da f nach Voraussetzung Borel-messbar ist, folgt also aus Satz 6.4 (ii.d), dass f ebenfalls λ-integrierbar ist und dass
$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \int_{[0,1]} G\,d\lambda = \int_0^1 f(x)\,dx.$$
□

Bemerkung 6.11. (i) Eine genauere Inspektion des Beweises würde zeigen, dass für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt, dass
$$f \text{ Riemann-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist } \lambda\text{-fast sicher stetig},$$
d.h. die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine λ-Nullmenge.

(ii) Auf die vorausgesetzte Borel-Messbarkeit von f kann nicht verzichtet werden. Ist etwa $C \subseteq [0,1]$ die Cantor-Menge und $A \subseteq C$ eine nicht Borel-messbare Teilmenge (vergleiche Bemerkung 5.29), so ist die Funktion $\mathbb{1}_{[0,1]\setminus A}$ auf der offenen Menge $(0,1)\setminus C$ stetig (denn sie ist dort konstant 1). Wegen $\lambda(C) = 0$ ist die Funktion also auf $[0,1]$ fast sicher stetig, d.h. nach Bemerkung (i) auch Riemann-integrierbar. Die Funktion ist aber nicht Borel-messbar, d.h. erst recht nicht λ-integrierbar.

(iii) Verzichtet man auf die Borel-Messbarkeit von f, so gilt zumindest noch: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so existiert eine λ-integrierbare Funktion $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $f = \tilde{f}$ λ-fast sicher und
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} \tilde{f}\,d\lambda.$$
In der Tat, die Funktion $\tilde{f} := G$ aus dem Beweis tut es.

(iv) Hätten wir statt des Lebesgue-Maßes λ dessen Vervollständigung $\overline{\lambda}$ betrachtet (vergleiche Satz 4.14), so gilt: Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist $\overline{\lambda}$-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\overline{\lambda},$$

vergleiche Bemerkung 5.29 (i).

Werfen wir auch noch einen Blick auf uneigentliche Riemann-Integrale.

Definition 6.12. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Dann heißt $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ **lokal Riemann-integrierbar**, falls f auf jedem kompakten Teilintervall von (a,b) Riemann-integrierbar ist. Ist f lokal Riemann-integrierbar und existiert für jede Ausschöpfung[a] $I_n := [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, von (a,b) der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$$

und ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung, so heißt f **uneigentlich Riemann-integrierbar** auf (a,b) und obiger Grenzwert wird mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet und **uneigentliches Riemann-Integral** von f genannt.

[a]Es gilt also $I_n \subseteq I_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = (a,b)$.

Man würde vermuten, dass eine zu Satz 6.9 analoge Aussage auch für uneigentlich Riemann integrierbare Funktionen gilt, d.h. ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich R.-integrierbar und Borel-messbar, so ist f auch λ-integrierbar und die Integrale stimmen überein. **Leider ist dies i.A. falsch**.

Beispiel 6.13. In der Analysis-Grundvorlesung wurde gezeigt, dass die stetige Funktion

$$f : (0,\infty) \ni x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Wir behaupten, dass diese Funktion **nicht** λ-integrierbar ist. Um dies zu sehen, betrachten wir die Ausschöpfung

$$(0,(n+1)\pi], \quad n \in \mathbb{N}$$

von $(0,\infty)$ und zeigen, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{(0,(n+1)\pi]} |f|\,d\lambda = \infty. \quad (\star)$$

Eine Anwendung von Korollar 6.8 liefert dann das Gewünschte.

Um $(\star)$ zu zeigen, berechnen wir zunächst.

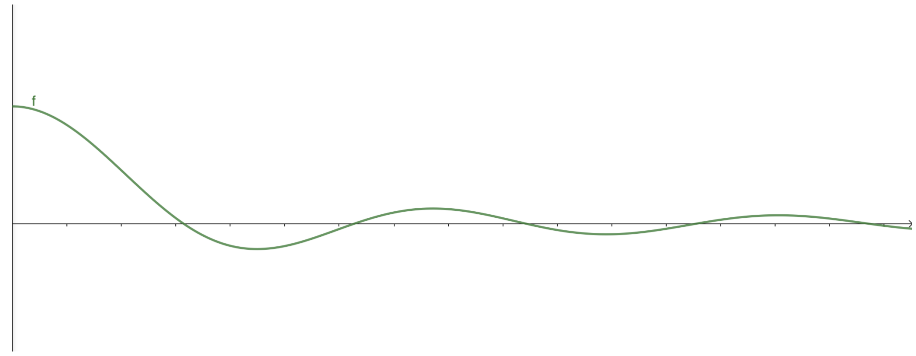
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\,dx = \int_0^\pi \sin(x)\,dx = 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Satz 6.9, dass

$$\begin{aligned}\int_{(0,(n+1)\pi]} |f|\,d\lambda &\geq \sum_{k=1}^n \int_{[k\pi,(k+1)\pi]} |f|\,d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,dx \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\,dx = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)\pi}.\end{aligned}$$

Nun folgt $(\star)$ aus der Divergenz der harmonischen Reihe.

Verkürzt gesagt liegt der Grund für die fehlende λ-Integrierbarkeit von $\sin(x)/x$ in der Tatsache begründet, dass man Positiv- und Negativ-Teil der Funktion getrennt betrachten muss, während beim Riemann-Integral gewisse Auslöschungseffekte zwischen Positiv- und Negativteil genutzt werden können.



Tatsächlich lässt sich zeigen, dass nicht-negative uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen auch λ-integrierbar sind, genauso wie solche, die auch **absolut uneigentlich Riemann-integrierbar** sind.

Satz 6.14. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei lokal Riemann-integrierbar. Dann sind äquivalent:

(i) f ist λ-integrierbar.

(ii) $|f|$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

In diesem Fall ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{(a,b)} f\,d\lambda.$$

Beweis. Sie finden den Beweis im Anhang an dieses Kapitel. □

Beispiel 6.15. Die Funktionen $(0,1) \ni x \mapsto x^a \in (0,\infty)$ ist genau dann λ-integrierbar, wenn $a > -1$ und in diesem Fall gilt

$$\int_{(0,1)} f\,d\lambda = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}.$$

2. Anwendung: Parameterintegrale

Wir betrachten wieder einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und wollen Funktionen der Gestalt

$$F(t) := \int_X f(x,t)\,d\mu(x), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersuchen. Hierbei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : X \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $t \in I$ die Funktion

$$X \ni x \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

μ-integrierbar ist (damit die Definition von F Sinn macht).

Beispiel 6.16. Wir betrachten die **Gamma-Funktion**

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} x^{t-1}e^{-x}\, d\lambda(x),$$

müssen also zeigen, dass die Funktion $(0,\infty) \ni x \mapsto x^{t-1}e^{-x} \in (0,\infty)$ tatsächlich für jedes $t > 0$ integrierbar ist. Unter Verwendung von Satz 6.4 (i.c) genügt es hierzu, separat die Integrierbarkeit auf $(0,1)$ und auf $[1,\infty)$ zu zeigen. Wir machen dies exemplarisch für den zweiten Fall: Für $x \geq 1$ gilt

$$0 < x^{t-1}e^{-x} = \left(x^{t-1}e^{-x/2}\right) e^{-x/2} \leq M_t e^{-x/2},$$

wobei $M_t := \sup_{x\geq 1}(x^{t-1}e^{-x/2}) < \infty$. Da

$$\int_{[1,\infty)} e^{-x/2}\, d\lambda(x) = \int_1^\infty e^{-x/2}\, dx < \infty,$$

zeigt das Majorantenkriterium, dass $[1,\infty) \ni x \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ integrabel ist. So sehen wir also, dass die Gamma-Funktion wohldefiniert ist und mit Satz 6.14 folgt auch sofort, dass wir Γ auch als uneigentliches Riemann-Integral auffassen können:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\, dx, \quad t > 0.^a$$

[a] Ferner zeigt dies für $t > 0$:

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}\, dx = -x^t e^{-x}|_{x=0}^\infty + t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx = t\Gamma(t), \quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Insbesondere ist also $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Gamma-Funktion verallgemeinert also die Fakultätsfunktion.

Kommen wir nun wieder zum abstrakten Fall zurück.

Satz 6.17. Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ sei wie zu Beginn des Abschnitts definiert.

(i) Es sei $t_0 \in I$ und

- es existiere eine μ-integrierbare Funktion φ, so dass

$$\forall t \in I, x \in X : \quad |f(x,t)| \leq \varphi(x),$$

- für alle $x \in X$ sei die Abbildung $t \mapsto f(x,t)$ stetig in t_0.

Dann ist auch F stetig in t_0.

(ii) Es sei

- die Abbildung $t \mapsto f(x,t)$ für alle $x \in X$ differenzierbar mit Ableitung $\partial_t f(x,t)$, und
- es existiere eine μ-integrierbare Funktion ψ, sodass

$$\forall t \in I, x \in X : \quad |\partial_t f(x,t)| \leq \psi(x).$$

Dann ist F auf I differenzierbar, die Abbildung $x \mapsto \partial_t f(x,t)$ ist μ-integrierbar für alle $t \in I$ und es gilt

$$F'(t) = \int \partial_t f(x,t)\, d\mu.$$

Beweis. (i) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $t_n \to t_0$. Ferner sei $f_n(x) := f(x,t_n), x \in X$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$, es gilt $f_n(x) \to f(x,t_0)$ und $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ für alle $x \in X$. Aus dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu = \int f(x,t_0)\, d\mu = F(t_0),$$

also ist F folgenstetig in t_0 und damit auch stetig.

(ii) Es sei $t_0 \in I$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{t_0\}$ mit $t_n \to t_0$. Die Funktionen

$$h_n : X \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sind $\mathcal{A}$-messbar und es gilt

$$\partial_t f(x,t_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x), \quad x \in X,$$

d.h. auch $\partial_t f(.,t_0)$ ist $\mathcal{A}$-messbar. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung impliziert ferner, dass

$$|h_n(x)| \le \sup_{t\in I} |\partial_t f(x,t)| \le \psi(x), \quad x \in X.$$

Also sind die Voraussetzungen des Satzes über die dominierte Konvergenz für die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt. Insbesondere sind die Funktionen h_n und $\partial_t f(.,t_0)$ beide μ-integrierbar und unter Verwendung der Linearität des Integrals (für die erste Gleichung) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu = \int \partial_t f(x,t_0)\, d\mu(x).$$

Da die Folge $t_n \to t_0$ beliebig war, existiert $F'(t_0)$ und stimmt mit dem letzten Integral überein. □

Beispiel 6.18. 1) Wir betrachten nochmal die **Gamma-Funktion**

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(t) = \int_{(0,\infty)} x^{t-1}e^{-x}\, d\lambda(x) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\, dx$$

und wollen zeigen, dass Γ (beliebig oft) differenzierbar ist. Hierzu genügt es wieder, separat die Funktionen $F_1, F_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F_1(t) := \int_{(0,1)} x^{t-1}e^{-x}\, d\lambda(x), \quad F_2(t) = \int_{[1,\infty)} x^{t-1}e^{-x}\, d\lambda(x),$$

zu betrachten. Wir machen dies wieder exemplarisch für die Funktion F_2. Hier genügt es zu zeigen, dass $F_2|_{(a,b)}$ für alle $0 < a < b$ differenzierbar ist. Um dies zu sehen, verwenden wir für $x \ge 1$ die Abschätzung

$$\left|\partial_t(x^{t-1}e^{-x})\right| = \left|\ln(x)x^{t-1}e^{-x}\right| = \left(|\ln(x)|\, x^{t-1}e^{-x/2}\right) e^{-x/2} \le \left(|\ln(x)|\, x^{b-1}e^{-x/2}\right) e^{-x/2}.$$

Hier haben wir genutzt, dass für $x \ge 1$ die Funktion $(a,b) \ni t \mapsto x^{t-1}$ monoton wachsend ist. Setzen wir nun

$$N_b := \sup_{x\ge 1} \left(|\ln(x)|\, x^{b-1}e^{-x/2}\right) < \infty,$$

so folgt
$$\left|\partial_t(x^{t-1}e^{-x})\right| \leq N_b e^{-x/2} =: \psi(x), \quad (t \in (a,b), x \geq 1).$$
Da ψ auf $[1,\infty)$ integrierbar ist, folgt aus Satz 6.17, dass F_2 auf (a,b) differenzierbar ist und
$$F_2'(t) = \int_{[1,\infty)} \partial_t(x^{t-1}e^{-x})\, d\lambda(x) = \int_1^\infty \ln(x)x^{t-1}e^{-x}\, dx.$$
Das gleiche Argument (und Induktion) zeigt sogar, dass F_2 beliebig oft differenzierbar ist.

2) Als Anwendung des Gezeigten erwähnen wir noch, dass
$$\Gamma''(t) = \int_{(0,\infty)} \underbrace{(\ln(x))^2 x^{t-1}e^{-x}}_{>0}\, d\lambda(x) > 0,$$
d.h. Γ ist konvex.

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Beweis von Satz 6.14). Sei $I_n := [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, eine beliebige Ausschöpfung von (a,b). Dann ist f nach Voraussetzung auf allen I_n Riemann-integrierbar, d.h. mit Satz 6.9 auch λ-integrierbar, und es gilt
$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \int_{I_n} f\, d\lambda, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\star)$$

1. Fall: Es gilt $f(a,b) \subseteq [0,\infty)$, d.h. $|f| = f$.

Ist f λ-integrierbar, so gilt mit Korollar 6.8, dass
$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} f\, d\lambda = \int_{(a,b)} f\, d\lambda.$$
Also ist f uneigentlich Riemann-integrierbar und $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{(a,b)} f\, d\lambda$. Ist umgekehrt f uneigentlich Riemann-integrierbar, so folgt wieder mit $(\star)$, dass
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} f\, d\lambda.$$
Also ist die nicht-negative Folge $(\int_{I_n} f\, d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und beschränkt, d.h. aus Korollar 6.8 folgt, dass f λ-integrierbar ist.

2. Fall: Für allgemeine f schreiben wir $f = f_+ - f_-$. Dann sind auch $f_\pm = \max(\pm f, 0)$ lokal Riemann-integrierbar. Ferner gilt wegen Schritt 1:
$$\begin{aligned} f \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar} &\Leftrightarrow f_\pm \text{ sind } \lambda\text{-integrierbar} \\ &\Leftrightarrow f_\pm \text{ sind uneigentlich Riemann-integrierbar} \\ &\Leftrightarrow |f| \text{ ist uneigentlich Riemann-integrierbar} \end{aligned}$$
Hierbei folgt die letzte Äquivalenz in der Richtung $\Rightarrow$ aus der Identität $|f| = f_+ + f_-$. Und in der Richtung $\Leftarrow$ aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen und der Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral. Schließlich ist mit $f_\pm$ dann auch f uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_+(x)\, dx - \int_a^b f_-(x)\, dx = \int_{(a,b)} f_+\, d\lambda - \int_{(a,b)} f_-\, d\lambda = \int_{(a,b)} f\, d\lambda.$$

7. Eindeutigkeit von Maßen

Stichpunkte. Dynkin-System, Schnitt-Stabilität, Schnitt und Erzeuger von Dynkin-Systemen, Satz von Dynkin, Maßeindeutigkeitssatz, Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes

Wir lassen die Integrale nun wieder für einen Moment beiseite und beschäftigen uns in diesem Abschnitt noch einmal mit allgemeinen Maßen. Genauer wollen wir die Frage beantworten, ob zwei Maße $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, die auf einem Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ übereinstimmen, schon identisch sein müssen. Als Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir einen neuen Begriff.

Definition 7.1. Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ auf X heißt **Dynkin-System**[a], falls Folgendes gilt:

(i) $X \in \mathcal{D}$.

(ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$.

(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunkte* Folge in $\mathcal{D}$ $\quad\Rightarrow\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

[a] Benannt nach Eugene Dynkin.

Bemerkung 7.2. (i) Eine σ-Algebra unterscheidet sich also von einem Dynkin-System nur in Eigenschaft (iii). Bei einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ muss bekanntlich die Vereinigung einer **beliebigen** Folge aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$ liegen. Insbesondere ist also jede σ-Algebra auch ein Dynkin-System.

(ii) Auf $X = \{1,2,3,4\}$ sei $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,3\}, X\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra.

(iii) Mit dem üblichen Trick (setze $A_n = \emptyset$ für $n \geq 3$) sehen wir, dass auch die Vereinigung von zwei disjunkten Mengen aus $\mathcal{D}$ wieder in $\mathcal{D}$ liegt.

Beispiel 7.3. Es seien μ, ν **endliche** Maße auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu(X) = \nu(X)$. Dann ist

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\},$$

das System der Mengen, auf denen μ und ν übereinstimmen, ein Dynkin-System auf X, denn:

(i) Nach Voraussetzung gilt $\mu(X) = \nu(X)$, d.h. $X \in \mathcal{G}$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{G}$. Dann ist auch $A^c \in \mathcal{G}$, denn da es sich um endliche Maße handelt, gilt

$$\mu(A^c) = \mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \ldots = \nu(A^c).$$

(iii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte[a] Folge in $\mathcal{G}$, so ist auch $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$, denn aus der σ-Additivität der Maße folgt

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \ldots = \nu(A).$$

[a] Hätten wir beliebige Folgen zulassen müssen (weil wir prüfen wollen, ob $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist), hätten wir die σ-Additivität der Maße nicht benutzen können.

Viele Eigenschaften von σ-Algebren lassen sich auf Dynkin-Systeme übertragen.

Proposition 7.4. (i) Es sei $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge von Dynkin-Systemen auf X. Dann ist $\cap\mathcal{M}$, der Schnitt aller Dynkin-Systeme aus $\mathcal{M}$, wieder ein Dynkin-System auf X.

(ii) Es sei $\mathcal{E}$ ein Mengensystem auf X. Dann ist

$$\delta(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System auf } X \text{ und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}\}$$

das kleinste Dynkin-System auf X, das $\mathcal{E}$ enthält. Man nennt $\delta(\mathcal{E})$ das **von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System** auf X. Ist ferner $\mathcal{F}$ ein Mengensystem auf X mit $\delta(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$, so heißt $\mathcal{F}$ ein **Erzeuger** von $\mathcal{D}$.

Beweis. Völlig analog zu den Beweisen von Satz 2.7 und Korollar 2.9. □

Bemerkung 7.5. Für jedes Mengensystem $\mathcal{E}$ gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, denn $\sigma(\mathcal{E})$ ist auch ein Dynkin-System, dass $\mathcal{E}$ enthält. Die umgekehrte Inklusion $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E})$, und damit die Gleichheit beider Mengensysteme, gilt, falls $\delta(\mathcal{E})$ auch eine σ-Algebra ist (die dann ebenfalls $\mathcal{E}$ und damit $\sigma(\mathcal{E})$ enthält).

Lemma 7.6. Es sei $\mathcal{D}$ ein Mengensystem auf X. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System und $\mathcal{D}$ ist **$\bigcap$-stabil**, d.h.

$$\forall A, B \in D : \quad A \cap B \in \mathcal{D}.$$

(ii) $\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra.

Beweis. Dass eine σ-Algebra ein $\cap$-stabiles Dynkin-System ist, ist klar. Sei umgekehrt $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}$. Es ist zu zeigen, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. Dazu setzen wir $B_1 := A_1$ und

$$B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \cap_{k=1}^{n-1}(A_n \cap A_k^c), \quad n \geq 2.$$

Aufgrund der vorausgesetzten $\bigcap$-Stabilität und der Komplement-Stabilität eines Dynkin-Systems ist dann $B_n \in \mathcal{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkt mit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Aufgrund der dritten Eigenschaft eines Dynkin-Systems ist diese Vereinigung wieder ein Element von $\mathcal{D}$.

□

Mit diesem Lemma können wir nun ein einfaches Kriterium angeben, wann $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$ gilt.

Satz 7.7 (Satz von Dynkin). Sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem auf X. Dann ist auch $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil. Insbesondere gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$.

Beweis. Es ist nur die $\cap$-Stabilität von $\delta(\mathcal{E})$ zu zeigen, denn dann ist $\delta(\mathcal{E})$ mit dem vorherigen Lemma eine σ-Algebra, d.h. wie in Bemerkung 7.5 beschrieben folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$.

Dazu sei
$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X \mid \forall B \in \delta(\mathcal{E}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}.$$
Dann ist die $\bigcap$-Stabilität von $\delta(\mathcal{E})$ äquivalent zu
$$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}.$$
Dies zeigen wir nun in vier Schritten:

1. Schritt: Wir schreiben $\mathcal{G}$ als
$$\mathcal{G} = \bigcap_{B \in \delta(\mathcal{E})} \mathcal{G}_B \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_B := \{A \subseteq X \mid A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

2. Schritt: Für $B \in \delta(\mathcal{E})$ sind die $\mathcal{G}_B$, und damit auch deren Schnitt G, Dynkin-Systeme.

Beweis:

(i) $X \cap B = B \in \delta(\mathcal{E})$, d.h. $X \in \mathcal{G}_B$.

(ii) Ist $A \in \mathcal{G}_B$, d.h. $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$, so gilt
$$A^c \cap B = (A \cup B^c)^c = ((A \cap B) \cup B^c)^c \in \delta(\mathcal{E}).$$
Hier nutzen wir, dass die auftretende Vereinigung disjunkt ist und das Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ stabil unter disjunkten Vereinigungen und Komplementen ist. Also ist $A^c \in \mathcal{G}_B$.

(iii) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{G}_B$, d.h. $A_n \cap B \in \delta(\mathcal{E})$, so gilt
$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B) \in \delta(\mathcal{E}),$$
denn $(A_n \cap B)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine disjunkte Folge in $\delta(E)$. Also ist $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}_B$.

3. Schritt: Für $B \in \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}_B$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$.

4. Schritt: Es gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$ und damit wegen Schritt 2 auch $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$.

Beweis: Aus dem 2. und 3. Schritt folgt, dass $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}_B$ für alle $B \in \mathcal{E}$. Aber dies ist äquivalent zu:
$$\begin{aligned}
& \forall B \in \mathcal{E}\ \forall A \in \delta(\mathcal{E}) : \quad A \cap B \in \delta(\mathcal{E}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall A \in \delta(\mathcal{E})\ \forall B \in \mathcal{E} : \quad B \cap A \in \delta(\mathcal{E}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall A \in \delta(\mathcal{E}) : \quad \mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}_A \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{E} \subseteq \left(\bigcap_{A \in \delta(\mathcal{E})} \mathcal{G}_A \right) = \mathcal{G}.
\end{aligned}$$
□

Bemerkung 7.8. Bevor wir unten zu einer konkreten Anwendung der entwickelten Theorie der Dynkin-Systeme kommen, wollen wir noch einmal einen abstrakten Blick darauf werfen, wie

Dynkin-Systeme in der Maßtheorie überhaupt ins Spiel kommen:

Oft hat man das Ziel zu zeigen, dass alle Elemente einer σ-Algebra $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ eine gewisse Eigenschaft E besitzen (z.B. dass $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$). Ohne Weiteres kann man aber zunächst nur zeigen, dass alle Elemente des Erzeugers $\mathcal{E}$ diese Eigenschaft besitzen. Um den Sprung von $\mathcal{E}$ zu $\sigma(\mathcal{E})$ zu leisten, betrachte man dann zunächst die (gute) Menge

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X : A \text{ hat Eigenschaft } E\},$$

d.h. die Menge aller Teilmengen von X mit der Eigenschaft E. Nach Voraussetzung ist dann

1. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$.

Nun zeige man noch

2. $\mathcal{G}$ ist ein Dynkin-System,[a] und
3. $\mathcal{E}$ ist $\bigcap$-stabil.

Dann folgt aus 1. und 2., dass $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$ und damit aus dem Satz von Dynkin, dass

$$\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G},$$

d.h. alle Elemente von $\sigma(\mathcal{E})$ haben die gewünschte Eigenschaft.

[a] In vielen Fällen ist $\mathcal{G}$ keine σ-Algebra oder es ist zumindest leichter, $\mathcal{G}$ als Dynkin-System zu identifizieren, vergleiche Beispiel 7.3.

Kommen wir nun zur Beantwortung der Frage, ob Maße, die auf einem Erzeuger übereinstimmen, schon identisch sein müssen. In dieser Allgemeinheit ist die Antwort leider nein.

Beispiel 7.9. Es sei $X = \{1, 2, 3\}$. Auf $(X, \mathcal{P}(X))$ definiere Maße μ, ν durch

$$\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = \frac{1}{3}$$

und

$$\nu(\{1\}) = \nu(\{3\}) = \frac{1}{6}, \quad \nu(\{2\}) = \frac{1}{2}.$$

Dann stimmen μ, ν auf $\mathcal{E} := \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ überein, aber nicht auf $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(X)$.

Wie nach unseren Vorarbeiten zu erwarten war, ist in diesem Beispiel die fehlende $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$ das Problem.

Satz 7.10 (Maßeindeutigkeitssatz für endliche Maße)**.** Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für ein $\cap$-stabiles Mengensystem $\mathcal{E}$. Sind μ und ν zwei endliche Maße auf $\mathcal{A}$, so dass

$$\mu|_{\mathcal{E}} = \nu|_{\mathcal{E}}{}^{a} \quad \text{und} \quad \mu(X) = \nu(X),$$

so gilt $\mu = \nu$.

[a] d.h. $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$.

Die Bedingung $\mu(X) = \nu(X)$ ist insbesondere für Wahrscheinlichkeitsmaße erfüllt.

Beweis. Wir haben in Beispiel 7.3 bereits gezeigt, dass

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System ist. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$, d.h. auch $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$. Aber nach Voraussetzung ist $\mathcal{E}$ auch $\cap$-stabil, d.h. Satz 7.7, zeigt, dass $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}$, d.h. $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. □

Auch für σ-endliche Maße gilt ein Eindeutigkeitssatz.

Satz 7.11 (Allgemeiner Maßeindeutigkeitssatz). Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für ein $\cap$-stabiles Mengensystem $\mathcal{E}$ und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Weiterhin existiere eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **in** $\mathcal{E}$, so dass

$$(\star) \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X \quad \text{und} \quad \mu(E_n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ist dann ν ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$, so dass $\mu|_{\mathcal{E}} = \nu|_{\mathcal{E}}$, so ist $\nu = \mu$.

Auf die Bedingung $(\star)$ kann nicht verzichtet werden, wie wir in einer Übungsaufgabe sehen werden. Übung

Beweis. Wir nutzen den Eindeutigkeitssatz für endliche Maße.

Schritt 1: Es seien

$$\mu_n := \mu|_{E_n} \quad \text{und} \quad \nu_n := \nu|_{E_n}$$

die Einschränkungen der Maße auf die Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}_n := \mathcal{A}|_{E_n} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq E_n\}$ auf E_n (vergleiche Beispiel 2.6 (iii)). Nach Voraussetzung sind diese Maße endlich und $\nu_n(E_n) = \mu_n(E_n)$. Aufgrund der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$ gilt ferner

$$\mathcal{E}_n := \mathcal{E}|_{E_n} = \{E_n \cap E : E \in \mathcal{E}\} = \{F \in \mathcal{E} : F \subseteq E_n\}$$

und auch $\mathcal{E}_n$ ist $\cap$-stabil. Nach Voraussetzung gilt weiterhin $\mu_n|_{\mathcal{E}_n} = \nu_n|_{\mathcal{E}_n}$ und Satz 2.11 zeigt, dass $\mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{E}_n)$. Die Maße μ_n, ν_n erfüllen also die Voraussetzungen von Satz 7.10 und es folgt $\mu_n = \nu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schritt 2: Nun setzen wir $F_1 := E_1$ und $F_n := E_n \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}), n \geq 2$, und erhalten eine disjunkte Folge aus $\mathcal{A}$ mit $F_n \subseteq E_n$ und

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Aus der σ-Additivität von μ, ν folgt also mit Schritt 1 für alle $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap F_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A \cap F_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(A \cap F_n) = \ldots = \nu(A).$$

□

Wir wenden den Eindeutigkeitssatz sogleich auf das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ an.

Satz 7.12. Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, so dass

$$\mu((a, b]) = b - a$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt $\mu = \lambda$.

Damit haben wir die Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.16 nun also gezeigt.

Beweis. Es gilt $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Hier lassen wir auch den Fall $a = b$

zu, damit $\emptyset \in \mathcal{E}$. Dann ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Ferner gilt

$$\mu((-n,n]) = 2n < \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

und $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n]$. Das Maß μ erfüllt also die Voraussetzungen von Satz 7.11. Wegen $\mu|_{\mathcal{E}} = \lambda|_{\mathcal{E}}$, folgt also $\mu = \lambda$. $\square$

Weitere Anwendungen des Eindeutigkeitssatzes werden uns in den nächsten Abschnitten begegnen.

8. Produkträume

> **Stichpunkte.** Produkt-Sigma-Algebren (und deren Erzeuger), Produkt-Borel-Sigma-Algebra, Messbarkeit in Produkträumen

Unser nächstes großes Ziel ist die Definition des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes auf

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}.$$

Da es sich hierbei um ein kartesisches Produkt handelt, müssen wir uns in diesem Abschnitt zunächst noch mit allgemeinen Produkt-σ-Algebren und den zugehörigen messbaren Funktionen beschäftigen. Die Idee hierbei ist einfach: wir möchten auf dem Produkt

$$X_1 \times \ldots \times X_n =: \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

der Messräume $(X_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{A}_n)$ eine σ-Algebra $\mathcal{B}$ so einführen, dass eine Abbildung

$$f : (X, \mathcal{A}) \to (X_1 \times \ldots \times X_n, \mathcal{B}), \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

genau dann messbar ist, wenn die n-Komponentenfunktionen

$$f_i : (X, \mathcal{A}) \to (X_i, \mathcal{A}_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

messbar sind. Hierzu erinnern wir zunächst an einen Begriff (vergleiche Übungsaufgaben).

> **Erinnerung.** Ist $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $g : X \to Y$ eine Abbildung, so heißt
>
> $$\mathcal{I}(g) := \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$
>
> die **initiale σ-Algebra** zu g. Dies ist die kleinste σ-Algebra auf X, so dass $g : X \to (Y, \mathcal{B})$ messbar ist.

Definition 8.1. Gegeben seien

- eine Indexmenge I,
- eine Familie von Messräumen $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$, und
- eine Menge X und eine Familie von Abbildungen $(\varphi_i)_{i \in I}$ mit $\varphi_i : X \to X_i, i \in I$.

Dann heißt

$$\mathcal{I}((\varphi_i)_{i \in I}) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{I}(\varphi_i)\right) = \sigma\left(\{\varphi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_i, i \in I\}\right)$$

die **initiale σ-Algebra** zu der Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$. Diese ist die kleinste σ-Algebra auf X, so dass alle Abbildungen $\varphi_i : X \to (X_i, \mathcal{A}_i)$ messbar sind.

Zur Definition der Produkt-σ-Algebra verwenden wir nun die **Projektionsabbildungen**

$$\pi_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Definition 8.2. Seien $(X_i, \mathcal{A}_i), i = 1, \ldots, n$, Messräume. Die **Produkt-σ-Algebra** auf $X_1 \times \ldots \times X_n$ ist definiert als

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k := \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n := \mathcal{I}((\pi_i)_{i=1}^n).$$

Bemerkung 8.3. Es gilt also

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = \sigma\left(\{\pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n\}\right)$$

und dieses ist die kleinste σ-Algebra auf $X_1 \times \ldots \times X_n$, für die alle Projektionsabbildungen $\pi_i, i = 1, \ldots, n$ messbar sind.

Dass diese Definition genau das erfüllt, was wir wollten, sehen wir jetzt.

Satz 8.4. Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X_i, \mathcal{A}_i), i = 1, \ldots, n$, Messräume. Dann ist

$$f : (X, \mathcal{A}) \to \left(\prod_{k=1}^{n} X_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k\right)$$

genau dann messbar, wenn alle Komponentenfunktionen

$$f_i := \pi_i \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (X_i, \mathcal{A}_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

messbar sind.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da die Projektionen $\pi_i : (\prod_{k=1}^n X_k, \otimes_{k=1}^n \mathcal{A}_k) \to (X_i, \mathcal{A}_i)$ messbar sind, folgt die Messbarkeit von $\pi_i \circ f$ aus der Messbarkeit von f und Proposition 3.4 (i).

„$\Leftarrow$“: Umgekehrt seien die Abbildungen $\pi_i \circ f, i = 1, \ldots, n$ messbar. Dann gilt für alle $A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n$:

$$f^{-1}(\pi_i^{-1}(A_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}.$$

Da das Mengensystem $\{\pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n\}$ ein Erzeuger von $\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ ist, folgt die Messbarkeit von f aus Proposition 3.4 (ii). $\square$

Die folgende Darstellung der Produkt-σ-Algebra ist etwas anschaulicher und wird insbesondere wichtig werden, wenn wir Produkt-Maße betrachten (andererseits verschleiert diese Darstellung etwas den Zusammenhang zur Messbarkeit).

Definition 8.5. Es sei

$$\mathcal{A}_1 \star \ldots \star \mathcal{A}_n := \{A_1 \times \ldots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j, 1 \leq j \leq n\}$$

das Mengensystem der **messbaren Quader** in $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Proposition 8.6. Mit der Notation von Definition 8.2 gilt

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = \sigma\left(\mathcal{A}_1 \star \ldots \star \mathcal{A}_n\right).$$

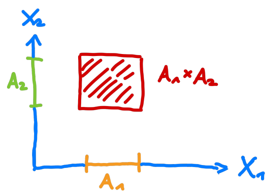
Beweis. Folgt aus

$$\pi_j^{-1}(A_j) = \prod_{k=1}^{j-1} X_k \times A_j \times \prod_{k=j+1}^{n} X_k,$$

bzw.

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j).$$

Wie genau? □



Ein messbarer Quader aus $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$.

Bemerkung 8.7. Für die spätere Definition des Produktmaßes halten wir noch fest, dass der Erzeuger $\mathcal{A}_1 \star \ldots \star \mathcal{A}_n$ von $\otimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$ auch $\cap$-stabil ist, denn die $\mathcal{A}_i$ sind $\cap$-stabil und

$$(A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \ldots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n).$$

Als Folgerung der zweiten Darstellung erhalten wir auch sofort ein Resultat über Einschränkungen von Produkt-σ-Algebren.

Korollar 8.8. Es seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ Messräume und $C \subseteq X$ und $D \subseteq Y$. Dann gilt

$$(\mathcal{A} \otimes B)|_{C \times D} = (\mathcal{A}|_C) \otimes (\mathcal{B}|_D).$$

Beweis. Nach Proposition 8.6 und Satz 2.11 gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} \otimes B)|_{C\times D} &= \sigma\left(\mathcal{A} \star \mathcal{B}\right)|_{C\times D} = \sigma\left(\left(\mathcal{A} \star \mathcal{B}\right)|_{C\times D}\right) \\
&= \sigma\left(\{(A \times B) \cap (C \times D) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right) \\
&= \sigma\left(\{(A \cap C) \times (B \cap D) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right) \\
&= \sigma\left(\mathcal{A}|_C \star \mathcal{B}|_D\right) = (\mathcal{A}|_C) \otimes (\mathcal{B}|_D).
\end{aligned}$$

□

Wir können die Produkt-σ-Algebra auch über Erzeugendensysteme der Ausgangs-σ-Algebren beschreiben.

Proposition 8.9. Für $1 \leq j \leq n$ gelte $\mathcal{A}_j = \sigma(\mathcal{E}_j)$.

(i) Es gilt

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = \sigma\left(\left\{\pi_j^{-1}(E_j) : E_j \in \mathcal{E}_j, 1 \leq j \leq n\right\}\right).$$

(ii) Gilt ferner $X_j \in \mathcal{E}_j$ für alle $1 \leq j \leq n$, so gilt auch

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = \sigma\left(\{E_1 \times \ldots \times E_n : E_j \in \mathcal{E}_j, 1 \leq j \leq n\}\right).$$

Beweis. (i) Sei $\mathcal{M} := \left\{\pi_j^{-1}(E_j) : E_j \in \mathcal{E}_j, 1 \leq j \leq n\right\}$. Mit Bemerkung 8.3 ist dann $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$ offensichtlich. Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir (siehe Übungsaufgaben) für jedes $1 \leq j \leq n$ die finale σ-Algebra zu $\pi_j : (\prod_{k=1}^{n} X_k, \sigma(\mathcal{M})) \to X_j$, d.h.

$$\mathcal{F}(\pi_j) := \left\{E \subseteq X_j : \pi_j^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{M})\right\}.$$

Da $\mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{F}(\pi_j), 1 \leq j \leq n$, folgt damit auch $\mathcal{A}_j = \sigma(\mathcal{E}_j) \subseteq \mathcal{F}(\pi_j), 1 \leq j \leq n$. Es gilt also

$$\left\{\pi_j^{-1}(A_j) : A_j \in \mathcal{A}_j, 1 \leq j \leq n\right\} \subseteq \sigma(\mathcal{M}),$$

was $\otimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ zur Folge hat.

(ii) Dies folgt aus (i) analog wie im Beweis von Proposition 8.6. Man beachte, dass $X_j \in \mathcal{E}_j$ hier wirklich benötigt wird. □

Bemerkung 8.10. Proposition 8.9 zeigt, dass die **Produktbildung assoziativ** ist, wenn wir wie üblich $(X_1 \times X_2) \times X_3$, $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ und $X_1 \times X_2 \times X_3$ identifizieren:

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3,$$

denn alle σ-Algebren werden von $\{A_1 \times A_2 \times A_3 : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, 3\}$ erzeugt.

Wir wollen uns nun um Produkte metrischer Räume kümmern.

Erinnerung. Sind $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, so wird durch

$$d_\infty : \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \to [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto \max_{1 \leq j \leq n} d_j(x_j, y_j)$$

eine Metrik auf $X := \prod_{j=1}^{n} X_j$ definiert, die sogenannte **Produktmetrik**. Man beachte, dass eine Folge $((x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))_{k \in \mathbb{N}}$ genau dann in (X, d_∞) konvergiert, wenn für jedes $1 \leq j \leq n$ die Komponentenfolgen $(x_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in (X_j, d_j) konvergieren.

Auf den metrischen Räumen $(X_j, d_j), 1 \leq j \leq n$, und deren Produkt

$$X := X_1 \times \ldots \times X_n \quad \text{mit der Produktmetrik } d_\infty,$$

können wir jeweils die von den offenen Mengen erzeugte Borel-σ-Algebra betrachten: Gilt dann $\mathcal{B}(X, d_\infty) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}(X_j, d_j)$? In dieser Allgemeinheit nicht, aber immer dann, wenn die Ausgangsräume separabel sind.

Definition 8.11. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d.h.

$$\exists A \subseteq X \text{ abzählbar}: \quad \overline{A} = X.$$

Hierbei ist $\overline{A}$ der **Abschluss** von A, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält (alternativ: $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn eine Folge (x_n) aus A existiert, mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$).

Beispiel 8.12. Der $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, ausgestattet mit der euklidischen Metrik, ist separabel. Eine abzählbare dichte Teilmenge ist etwa durch $\mathbb{Q}^n$ gegeben.

Das folgende Lemma wird im Beweis des nachfolgenden Satzes benötigt.

Lemma 8.13. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ abzählbar und dicht. Dann ist jede offene Menge aus X eine abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln $B(a_k, q_k), k \in \mathbb{N}$, wobei $a_k \in A$ und $q_k \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □ Übung

Satz 8.14. Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ separable metrische Räume und $X := X_1 \times \ldots \times X_n$. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X, d_\infty) = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}(X_j, d_j).$$

Beweis. Da die Projektionen $\pi_k : X \to X_k$ stetige Abbildungen sind, und die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen wieder offen sind, gilt

$$\left\{\pi_k^{-1}(U_k) : U_k \text{ ist offen in } X_k, 1 \leq k \leq n\right\} \subseteq \mathcal{B}(X, d_\infty).$$

Da die Borel-σ-Algebra von den offenen Mengen eines metrisches Raumes erzeugt wird, folgt also mit Proposition 8.9, dass

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}(X_j, d_j) = \sigma\left(\left\{\pi_k^{-1}(U_k) : U_k \text{ ist offen in } X_k, 1 \leq k \leq n\right\}\right) \subseteq \mathcal{B}(X, d_\infty).$$

Für die umgekehrte Inklusion seien $A_j \subseteq X_j$ abzählbare dichte Teilmengen von $(X_j, d_j), 1 \leq j \leq n$. Wir unterteilen den weiteren Beweis in einige Schritte:

1. Schritt: Die abzählbare Menge $A := A_1 \times \ldots \times A_n$ ist dicht in X.

In der Tat: Dass A abzählbar ist, ist klar. Ist ferner $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, so ist jedes x_j Grenzwert einer Folge $(a_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus A_j und damit x selbst Grenzwert der Folge $((a_{1,k}, \ldots, a_{n,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ aus A.

2. Schritt: Wir setzen für $x_j \in X_j$ und $r > 0$

$$B_j(x_j, r) := \{y_j \in X_j : d_j(x_j, y_j) < r\}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

und entsprechend für $x \in X$

$$B_\infty(x, r) := \{y \in X : d_\infty(x, y) < r\}.$$

Dann gilt

$$B_\infty(x, r) = B_1(x_1, r) \times \ldots \times B_n(x_n, r).$$

In der Tat: Für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ gilt

$$d_\infty(x, y) < r \quad \Leftrightarrow \quad \max_{1\leq j\leq n} d_j(x_j, y_j) < r \quad \Leftrightarrow \quad \forall 1 \leq j \leq n : \ d_j(x_j, y_j) < r.$$

3. Schritt: Sei $U \subseteq X$ offen. Nach Schritt 1 und Lemma 8.13 existieren offene Kugeln $B_\infty(a_k, q_k), k \in$

$\mathbb{N}$, so dass

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_\infty(a_k, q_k)$$

und $a_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $a_k = (a_{1,k}, \ldots, a_{n,k})$, so gilt also nach Schritt 2, dass

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_1(a_{1,k}, q_k) \times \ldots \times B_n(a_{n,k}, q_k)) \in \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}(X_j, d_j).$$

Da $U \subseteq X$ eine beliebige offene Menge war, folgt also auch $\mathcal{B}(X, d_\infty) \subseteq \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}(X_j, d_j)$. □

Für das folgende Korollar sei daran erinnert, dass die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ (wie üblich versehen mit der euklidischen Metrik) $\mathcal{B}_n$ genannt wurde.

Korollar 8.15. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{B}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_1$. Ferner ist $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_{n-k}$ für alle $1 \leq k \leq n-1$.

Hier identifizieren wir erneut $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Beweis. Wie in Beispiel 8.12 bemerkt wurde, ist $(\mathbb{R}, d_{|.|})$ separabel. Mit

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2}$$

und

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \quad d_\infty(x, y) = \max_{1\leq j\leq n} |x_j - y_j|$$

gilt ferner

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x, y).$$

Dies zeigt, dass die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ und $(\mathbb{R}^n, d_2)$ die selben offenen Mengen, und damit die selben Borel-σ-Algebren besitzen. Also folgt die erste Behauptung aus Satz 8.14 mit $(X_1, d_1) = \ldots = (X_n, d_n) = (\mathbb{R}, d_{|.|})$. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten und der Assoziativität der Produktbildung (vergleiche Bemerkung 8.10). □

Wir betrachten noch ein Korollar des letzten Resultats. Für das erste beachten wir, dass wir den metrischen Raum $(\mathbb{C}, d_{|.|})$ mit dem metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_2)$ identifizieren können (via $x + iy \leftrightarrow (x, y)$). Entsprechend gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) := \mathcal{B}(\mathbb{C}, d_{|.|}) = \mathcal{B}_2.$$

Korollar 8.16. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann gilt:

(i) $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $f_i : X \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ $\mathcal{A}$-messbar ist.

(ii) $g : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $\mathrm{Re}(g) : X \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(g) : X \to \mathbb{R}$ beide $\mathcal{A}$-messbar sind.

Beweis. Beides folgt unmittelbar aus Satz 8.4, wobei wir für (i) beachten, dass nach Korollar 8.15 gilt, dass $\mathcal{B}_n = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_1$ und für Teil (ii), dass nach der Vorbemerkung $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1)$. □

9. Produktmaße

Stichpunkte. Produktmaß, Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, Prinzip von Cavalieri, Doppelintegrale, Satz von Tonelli, fast sicher definierte Funktionen, Satz von Fubini

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, auf der Produkt-σ-Algebra

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \star \mathcal{B}) = \sigma\left(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right)$$

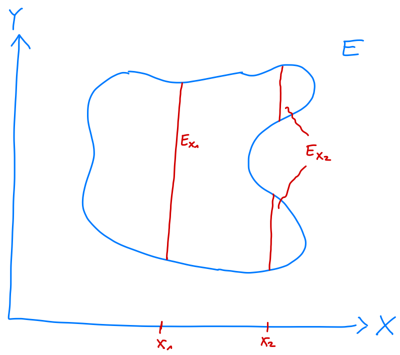
ein **Produkt-Maß** $\mu \otimes \nu$ einzuführen, das messbaren Quadern das Produkt der Einzelmaße zuordnet, d.h.

$$(\star) \qquad (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}.$$

Das Maß von $A \times B$ ist also das Produkt aus „Länge“ $\mu(A)$ und „Breite“ $\nu(B)$.

Wie würde man dann wohl $(\mu \otimes \nu)(E)$ für ein allgemeines $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ berechnen? Dazu betrachten wir für ein festes $x \in X$ einmal den sogenannten x-**Schnitt** von E:

$$E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$



Speziell für $E = A \times B$ gilt dann

$$(A \times B)|_x = \begin{cases} B & , x \in A, \\ \emptyset & , x \notin A. \end{cases}$$

Damit können wir $(\star)$ als Integral über die x-Schnitte von $A \times B$ auffassen:

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) = \int_A \nu(B) \, d\mu(x) = \int_X \nu((A \times B)|_x) \, d\mu(x).$$

Können wir also für allgemeines $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ einfach

$$(\star\star) \qquad (\mu \otimes \nu)(E) := \int_X \nu(E_x) \, d\mu(x)$$

definieren? Die Antwort ist ja, allerdings müssen wir vorher noch klären, dass dies alles auch wirklich Sinn macht, d.h. dass die Schnitte E_x und die Abbildung $(X, \mathcal{A}) \ni x \mapsto \nu(E_x) \in [0, \infty]$ wirklich messbar sind und dass durch die rechte Seite von $(\star\star)$ tatsächlich ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiert wird.

Bemerkung 9.1. (i) Wegen $\mathbb{1}_{E_x}(y) = \mathbb{1}_E(x,y)$ gilt

$$\nu(E_x) = \int_Y \mathbb{1}_{E_x}(y)\, d\nu(y) = \int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\, d\nu(y).$$

D.h. man kann $(\star\star)$ also (zunächst nur formal[a]) auch schreiben als

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

(ii) Genauso hätte man auch y-Schnitte $E^y := \{x \in X : (x,y) \in E\}$ betrachten können und dann

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y) = \int_Y \left(\int_X \mathbb{1}_E(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

erhalten. Wir werden sehen, dass dies wirklich zum gleichen Ergebnis führt (man vergleiche hierzu später auch den Satz von Tonelli).

[a] D.h. ohne streng darauf zu achten, dass alle Ausdrücke auch definiert sind.

Zunächst zeigen wir nun, dass die Schnittbildung die Messbarkeit erhält.

Proposition 9.2. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume und $x \in X, y \in Y$. Dann gilt:

(i) Ist $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so folgt

$$E_x := \{y \in Y : (x,y) \in E\} \in \mathcal{B} \quad \text{und} \quad E^y := \{x \in X : (x,y) \in E\} \in \mathcal{A}.$$

(ii) Sei $(Z, \mathcal{C})$ ein Messraum und $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ messbar. Dann sind auch

$$f_x : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C}), \quad y \mapsto f(x,y)$$

und

$$f^y : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C}), \quad x \mapsto f(x,y)$$

messbar.

Beweis. Übung. $\square$ Übung

Im Kontext unserer Einleitung sind damit insbesondere auch $\nu(E_x)$ und $\mu(E^y)$ für $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $x \in X$ und $y \in Y$ definiert. Damit wir diese Größen wie angedacht integrieren können, müssen wir nun zeigen, dass sie messbar von x bzw. y abhängen. Dies ist nur der Fall, wenn die beteiligten Maße σ-endlich sind.

Lemma 9.3. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann sind die Abbildungen

$$(X, \mathcal{A}) \ni x \mapsto \nu(E_x) \in [0, \infty] \quad \text{und} \quad (Y, \mathcal{B}) \ni y \mapsto \mu(E^y) \in [0, \infty]$$

messbar.

Beweis. Wir zeigen nur, dass $F_E(.) := \nu(E_{(.)}) \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ für alle $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Die zweite Aussage folgt analog.

1. Fall: ν ist endlich, d.h. $\nu(Y) < \infty$.

Es sei

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes B : F_E \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})\}.$$

Dann ist zu zeigen, dass $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Schritt 1.1: Es gilt $\mathcal{A} \star \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$.

Beweis: Für $A \times B \in \mathcal{A} \star \mathcal{B}$ gilt, wie wir in der Einleitung gesehen haben, dass

$$F_{A \times B}(x) = \nu((A \times B)_x) = \nu(B) \mathbb{1}_A(x),$$

d.h. $F_{A \times B} \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und damit $A \times B \in \mathcal{D}$.

Schritt 1.2: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.

Beweis: (i) Zunächst gilt nach Schritt 1.1, dass $X \times Y \in \mathcal{D}$.

(ii) Nun sei $E \in \mathcal{D}$. Da

$$\mathbb{1}_{E^c}(x, y) = 1 - \mathbb{1}_E(x, y)$$

folgt mit Bemerkung 9.1 (i):

$$F_{E^c}(x) = \nu((E^c)_x) = \int_Y \mathbb{1}_{E^c}(x, y)\, d\nu(y) = \int_Y (1 - \mathbb{1}_E(x, y))\, d\nu(y) = \nu(Y) - F_E(x),$$

d.h. $F_{E^c} \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und somit $E^c \in \mathcal{D}$. Hier haben wir die Endlichkeit von ν genutzt und die Tatsache, dass $F_E \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$.

(iii) Sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{D}$ und $E := \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Dann ist für $x \in X$ auch die Folge $((E_n)_x)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunkt in $\mathcal{B}$ und $E_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x$. Ferner gilt

$$F_E(x) = \nu\left(E_x\right) = \nu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu((E_n)_x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_{E_n}(x) \in \mathcal{M}_+(x, \mathcal{A}),$$

denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $F_{E_n} \in \mathcal{M}_+(x, \mathcal{A})$ (vergleiche Satz 5.18 (ii)). Also folgt $E \in \mathcal{D}$.

Schritt 1.3: $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Es ist nur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ zu zeigen. Da $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$ $\cap$-stabil ist (siehe Bemerkung 8.7), folgt aus Satz 7.7 und den vorherigen Schritten, dass

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \overset{\text{Def.}}{=} \sigma(\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \overset{\text{S. 7.7}}{=} \delta(\mathcal{A} \star \mathcal{B}) \overset{\text{Schritt 1.1}}{\subseteq} \delta(\mathcal{D}) \overset{\text{Schritt 1.2}}{=} \mathcal{D}.$$

Dies beschließt den Beweis im Falle eines endlichen Maßes ν.

2. Fall: ν sei σ-endlich, d.h. es existiert eine Folge $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\nu(B_j) < \infty \quad \text{und} \quad Y = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j.$$

Sei

$$Y_n := \cup_{j=1}^n B_j.$$

Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in $\mathcal{B}$ mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = Y$ und $\nu(Y_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun sei $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ beliebig und $E_n := E \cap (X \times Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. insbesondere

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E \quad \text{und} \quad E_n \subseteq E_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen Korollar 8.8 gilt dann

$$E_n \in (\mathcal{A} \otimes B)|_{X\times Y_n} = (\mathcal{A}|_X) \otimes (\mathcal{B}|_{Y_n}) = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B}|_{Y_n}).$$

Wenden wir also den ersten Fall an auf die Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y_n, \mathcal{B}|_{Y_n}, \nu|_{Y_n})$ mit dem endlichen Maß $\nu|_{Y_n}$, so folgt, dass die Abbildungen

$$F_n : (X, \mathcal{A}) \ni x \mapsto \nu((E_n)_x) \in [0, \infty]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar sind. Aber da das Maß ν von unten stetig ist, folgt dann

$$F_E(x) = \nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((E_n)_x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x),$$

d.h. auch F_E ist als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen wieder messbar. □

Damit haben wir die Grundlagen für das Produktmaß gelegt.

Satz 9.4. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume.

(i) Die Abbildung

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty], \quad E \mapsto \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x)$$

ist ein σ-endliches Maß und es gilt

$$(\star) \qquad (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}).$$

(ii) Das Maß $\mu \otimes \nu$ ist das einzige Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $(\star)$.

(iii) Es gilt

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Definition 9.5. Das Maß $\mu \otimes \nu$ aus dem vorherigen Satz wird das **Produktmaß von μ und ν** genannt.

Beweis. (i) Zunächst ist klar, dass

$$(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = \int_X \nu(\emptyset)\, d\mu(x) = 0.$$

Nun sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Wie schon im Beweis von Lemma 9.3 genutzt, gilt dann

$$\nu(E_x) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((E_n)_x),$$

d.h. mit Satz 5.18 (ii) folgt, dass

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \nu((E_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu\otimes\nu)(E_n).$$

Also ist $(\mu \otimes \nu)$ ein Maß. Weiterhin gilt für $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \int_X \nu((A\times B)_x)\, d\mu(x) = \int_A \nu(B)\, d\mu(x) = \mu(A)\cdot\nu(B),$$

da $(A \times B)_x = B$ für $x \in A$ und $= \emptyset$ für $x \notin A$, d.h. $(\star)$ ist erfüllt.

Da schließlich μ, ν jeweils σ-endlich sind, existieren Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}$, so dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = Y \quad \text{und} \quad \mu(A_n) < \infty,\ \nu(B_k) < \infty \quad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Mit der Folge $E_{(n,k)} := A_n \times B_k, (n,k) \in \mathbb{N}^2$, gilt dann

$$\bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} E_{(n,k)} = X \times Y$$

und

$$(\mu\otimes\nu)(E_{(n,k)}) = (\mu\otimes\nu)(A_n \times B_k) = \mu(A_n)\cdot\nu(B_k) < \infty \quad ((n,k)\in\mathbb{N}^2).$$

Also ist $(\mu \otimes \nu)$ ebenfalls σ-endlich.

(ii) Der Erzeuger $\mathcal{E} = \mathcal{A} \star \mathcal{B}$ von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist $\cap$-stabil. Weiterhin erfüllt $(\mu \otimes \nu)$ mit der im Beweis von Teil (a) verwendeten Folge $(E_{(n,k)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ aus $\mathcal{E}$ die Voraussetzungen des Maßeindeutigkeitssatzes 7.11, d.h. jedes Maß, dass mit $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$ übereinstimmt (d.h. $(\star)$ erfüllt), muss mit $(\mu \otimes \nu)$ identisch sein.

(iii) Mit einer analogen Rechnung wie in Teil (i) (man vergleiche auch Bemerkung 9.1 (ii)) sehen wir, dass auch

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \ni E \mapsto \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

ein Maß ist, das den Elementen $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ das Maß $\mu(A)\cdot\nu(B)$ zuordnet. Nach Teil (ii) stimmt also auch dieses Maß mit $(\mu \otimes \nu)$ überein. □

Bemerkung 9.6. (i) Auch wenn **nur** das Maß ν σ-endlich ist, wird durch

$$E \mapsto \int \nu(E_x)\, d\mu(x)$$

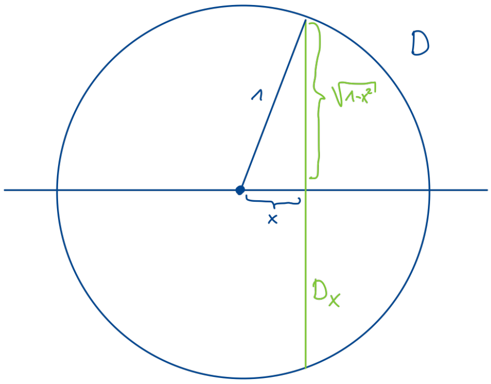
ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiert, das die Eigenschaft $(\star)$ besitzt. Allerdings muss es in diesem Fall nicht das einzige Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit dieser Eigenschaft sein.

(ii) Mit Bemerkung 9.1 (i) gilt auch

$$(\mu\otimes\nu)(E) = \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \mathbb{1}_E(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Wir werden später sehen, dass die hier vorkommende Vertauschbarkeit von Doppelintegralen in einer sehr viel größeren Allgemeinheit gültig ist.

Als erstes Beispiel für ein Produktmaß betrachten wir das 2-dimensionale Lebesgue-Maß.



Ein Schnitt der Einheitskreisscheibe

Beispiel 9.7. Es sei $\lambda^2 := \lambda \otimes \lambda$ das **2-dimensionale Lebesgue-Maß** auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ in $\mathbb{R}^2$. Wir wollen hiermit das Maß (den Flächeninhalt) der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

berechnen. Da für $x \in \mathbb{R}$

$$D_x = \begin{cases} \left\{y \in \mathbb{R} : |y| \leq \sqrt{1-x^2}\right\}, & |x| \leq 1 \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

folgt unter Verwendung der Definition des Produktmaßes und von Satz 6.9, dass

$$\begin{aligned} \lambda^2(D) = (\lambda \otimes \lambda)(D) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(D_x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{[-1,1]} \lambda([-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}])\, d\lambda(x) \\ &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \pi. \end{aligned}$$

Was ändert sich, wenn wir die offene Einheitskreisscheibe betrachten?

Wir kehren zurück zu allgemeinen Produktmaßen und nutzen diese, um zu zeigen, dass das Integral einer Funktion tatsächlich den „Flächeninhalt“ unter dem Graphen der Funktion angibt.

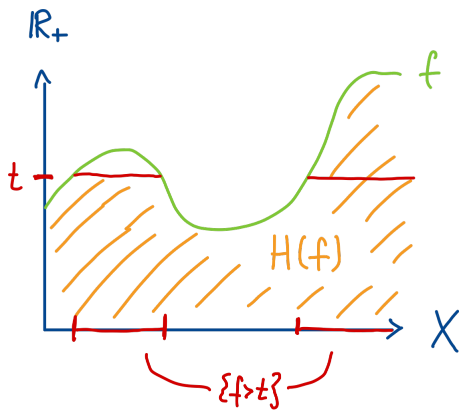
Proposition 9.8. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Ferner sei

$$H(f) := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}.$$

Dann ist $H(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ und es gilt

$$(\mu \otimes \lambda)(H(f)) = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{(0,\infty)} \mu(\{f > t\})\, d\lambda(t).$$

Die zweite Identität wird in der englischsprachigen Literatur oft als **Layer-cake-principle** bezeichnet.



Beweis. Die Projektionen

$$\pi_1 : (X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1) \to (X, \mathcal{A}), \quad \pi_1(x,t) = x$$

und

$$\pi_2 : (X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1), \quad \pi_2(x,t) = t$$

sind nach Definition der Produkt-σ-Algebra messbar. Damit ist die Abbildung

$$\varphi : (X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1), \quad \varphi := (f \circ \pi_1) - \pi_2$$

als Komposition und Differenz messbarer Funktionen ebenfalls messbar. Aber es gilt $\varphi(x,t) = f(x) - t$, d.h. $H(f) = \{\varphi > 0\} \cap \{\pi_2 \geq 0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$. Aus Satz 9.4 folgt also wegen

$$H(f)_x = [0, f(x)) \quad \text{und} \quad H(f)^t = \begin{cases} \{f > t\} & , t \geq 0 \\ \emptyset & , t < 0, \end{cases}$$

dass

$$(\mu \otimes \lambda)(H(f)) = \int_X \lambda(H(f)_x)\, d\mu(x) = \int_X \lambda([0, f(x)))\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x),$$

und genauso

$$(\mu \otimes \lambda)(H(f)) = \int_{\mathbb{R}} \mu(H(f)^t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,\infty)} \mu\left(\{f > t\}\right)\, d\lambda(t) = \int_{(0,\infty)} \mu\left(\{f > t\}\right)\, d\lambda(t),$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass einelementige Mengen Lebesgue-Nullmengen sind. □

Bemerkung 9.9. Die Schlussfolgerung der vorherigen Proposition bliebe auch gültig, wenn wir $H(f)$ durch die Menge

$$\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

ersetzt hätten. Denn diese unterscheidet sich von $H(f)$ nur durch den Graphen

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

und dieser ist eine $(\mu \otimes \lambda)$-Nullmenge, denn[a]

$$(\mu \otimes \lambda)(G(f)) = \int_X \lambda(G(f)_x)\, d\mu(x) = \int_X \lambda(\{f(x)\})\, d\mu(x) = \int_X 0\, d\mu(x) = 0.$$

[a] Die Messbarkeit von $G(f)$ haben wir in Aufgabe 32 gezeigt.

Natürlich können wir auch Produkte von mehr als zwei Maßen betrachten. Diese können wir rekursiv definieren, da nach Bemerkung 8.10 gilt, dass

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} \mathcal{A}_i\right) \otimes \mathcal{A}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 9.10. Für $i = 1, \ldots, n$ seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume. Dann wird durch

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i := \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n := \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} \mu_i\right) \otimes \mu_n$$

ein σ-endliches Maß auf $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ definiert. Dieses ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft

$$(\star) \qquad \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i), \quad (A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n).$$

Beweis. Satz 9.4 und Induktion. □

Bemerkung 9.11. Die Eigenschaft $(\star)$ zeigt auch, dass das Produkt von Maßen assoziativ ist, d.h.

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3.$$

Damit können wir nun auch das n-dimensionalen Lebesgue-Maß einführen.

Definition 9.12. Es sei $\lambda^1 := \lambda$ das 1-dimensionale Lebesgue–Maß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$. Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, setzen wir

$$\lambda^n := \bigotimes_{i=1}^{n} \lambda^1$$

und nennen dieses Maß das **n-dimensionale Lebesgue–Maß** auf $\mathbb{R}^n$. Nach Korollar 8.15 ist dieses ein Maß auf

$$\mathcal{B}_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_1.$$

Für unser erstes Resultat über das n-dimensionale Lebesgue-Maß erinnern wir an die Notation

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n : a < x \leq b\}$$

für $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$. Das n-dimensionale Lebesgue-Maß ordnet diesen Quadern ihr elementargeometrisches Volumen zu.

Satz 9.13. Es sei $n, m \in \mathbb{N}$.

(i) Es gilt $\lambda^{n+m} = \lambda^n \otimes \lambda^m$.

(ii) Für alle $a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b$, gilt

$$\lambda^n((a, b]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

und λ^n ist das einzige Maß auf $\mathcal{B}_n$ mit dieser Eigenschaft.

(iii) Das Maß λ^n ist **translationsinvariant**, d.h. für $E \in \mathcal{B}_n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(\star) \qquad \lambda^n(E+x) = \lambda^n(E).$$

Ferner ist λ^n das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathcal{B}_n$, das dem Einheitswürfel

$$(0,1]^n := (0,1] \times \ldots \times (0,1]$$

den Wert 1 zuordnet.

(iv) Für $r \in \mathbb{R}$ und $E \in \mathcal{B}_n$ gilt

$$(\star\star) \qquad \lambda^n(rE) = |r|^n \, \lambda^n(E).$$

Die Formeln $(\star)$ und $(\star\star)$ werden wir später noch einmal deutlich verallgemeinern.

Beweis. (i) Folgt sofort aus der Assoziativität der Produktbildung.

(ii) Nach Definition gilt

$$\lambda^n((a,b]) = \bigotimes_{i=1}^n \lambda^1 \left((a_1,b_1] \times \ldots (a_n,b_n]\right) = \lambda^1((a_1,b_1]) \cdot \ldots \cdot \lambda^1((a_n,b_n]) = (b_1-a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n-a_n).$$

Dass λ^n das einzige Maß auf $\mathcal{B}_n$ mit dieser Eigenschaft ist, folgt direkt aus dem allgemeinen Maßeindeutigkeitssatz 7.11: Das Mengensystem

$$\mathcal{E} := \{(a,b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}^n\}$$

ist $\cap$-stabil, mit Proposition 2.18 gilt $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{E})$ und für die Folge $E_k := (-k,k] \times \ldots \times (-k,k] \in \mathcal{E}$ gilt

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \lambda^n(E_k) = (2k)^n < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(iii) und (iv) haben wir im 1-dimensionalen Fall schon bewiesen. Der allgemeine Fall wird völlig analog durch Rückführung auf (ii) bewiesen (man vergleiche mit den Beweisen von Satz 4.19 und Satz 4.20). □

Bemerkung 9.14. Es gilt allgemeiner für $X \in \mathcal{B}_n$ und $Y \in \mathcal{B}_m$, dass

$$\lambda^{n+m}|_{X \times Y} = (\lambda^n)|_X \otimes (\lambda^m)|_Y.$$

Dies folgt mit Korollar 8.8 und dem Eindeutigkeitssatz.

Wir wiederholen einige der obigen abstrakten Resultate noch einmal im Kontext des Lebesgue-Maßes.

Proposition 9.15. (i) Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ Borel-messbar. Dann gilt

$$\lambda^{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(E_x)\, d\lambda^m(x).$$

Dies wird oft das **Prinzip von Cavalieri** genannt.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ Borel-messbar und $H(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}$. Dann ist $H(f)$ Borel-messbar und

$$\lambda^{n+1}(H(f)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_{(0,\infty)} \lambda^n\left(\{f > t\}\right) d\lambda(t).$$

Außerdem ist der Graph $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Borel-messbar und eine λ^{n+1}-Nullmenge.

Beweis. Dies folgt mittels Satz 9.13 (i) unmittelbar aus Satz 9.4, Proposition 9.8 und Bemerkung 9.9. □

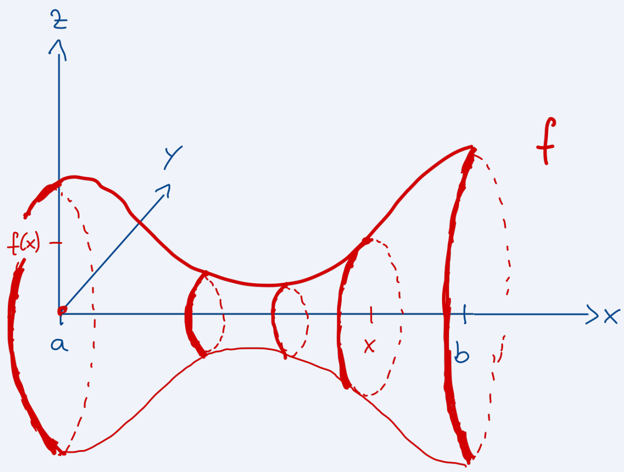
Beispiel 9.16. (i) Sei $n \geq 2$. Ist $x_0 = (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, so gilt $\{x_0\} \subseteq G(f)$ für die konstante (und daher messbare Funktion) $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, x \mapsto b_0$. Da $G(f)$ eine λ^n-Nullmenge ist, gilt das gleiche für $\{x_0\}$. D.h. einelementige Mengen und damit auch abzählbare Mengen sind λ^n-Nullmengen.

(ii) Das Prinzip von Cavalieri ermöglicht es, die bekannten Formeln für die elementargeometrischen Körper wieder zu gewinnen. In Beispiel 9.7 haben wir etwa die Fläche einer Kreisscheibe berechnet.

(iii) **(Rotationskörper)** Sei $f : [a,b] \to [0,\infty)$ Borel-messbar und

$$R := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

der Körper, der bei Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht.



Sind $\pi_x, \pi_y, \pi_z : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Borel-messbaren Projektionen auf die entsprechenden Achsen, so ist die Abbildung

$$\varphi : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi := (f^2 \circ \pi_x) - (\pi_y^2 + \pi_z^2)$$

ebenfalls Borel-messbar und es gilt $\varphi(x,y,z) = f^2(x) - (y^2 + z^2)$. Also ist auch $R = \{\varphi \geq 0\}$ Borel-messbar. Da der x-Schnitt R_x eine abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $f(x)$ ist, folgt aus Beispiel 9.7, Satz 9.13 (iv) und dem Satz von Cavalieri, dass der Rotationskörper R folgendes Volumen hat:

$$\lambda^3(R) = \int_{[a,b]} \lambda^2(R_x)\, d\lambda(x) = \int_{[a,b]} f^2(x)\lambda^2(D)\, d\lambda(x) = \pi \int_{[a,b]} f^2(x)\, d\lambda(x).$$

Wollen wir etwa die Einheitskugel $K_3[1] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ als Rotationskörper darstellen, so kann $f : [-1,1] \to [0,\infty), x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ gewählt werden und man erhält die bekannte Formel

$$\lambda^3(K_3[1]) = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi.$$

Wir wollen nun wieder über allgemeine Produktmaße sprechen und diskutieren, wie wir diesbezügliche Integrale berechnen können.

Satz 9.17 (Satz von Tonelli). Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f \in \mathcal{M}_+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Dann sind die Funktionen

$$g : (Y, \mathcal{B}) \ni y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \in [0,\infty]$$

und

$$h : (X, \mathcal{A}) \ni x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \in [0,\infty]$$

definiert und messbar. Ferner gilt

$$\int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Merke: Für nicht-negative messbare Funktionen können wir das Produktintegral also durch Nacheinanderausführung, in beliebiger Reihenfolge, der Einzelintegrale berechnen.

Beweis. Dass die erwähnten Funktionen g, h definiert sind, folgt aus der Messbarkeit der x- und y-Schnitte f_x und f_y (vergleiche Proposition 9.2). Nun verwendet man das Standardbeweisprinzip der Integrationstheorie:

1. Die Aussage des Satzes folgt für messbare charakteristische Funktionen $f = \mathbb{1}_E, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, aus Satz 9.4, siehe Bemerkung 9.6 (ii).

2. Wegen der Linearität des Integrals ist der Satz damit auch für einfache Funktionen aus $\mathcal{E}_+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ erfüllt.

3. Ist nun $f \in \mathcal{M}_+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ beliebig, so wähle mit Proposition 5.4 eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}_+(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mit $\varphi_n \nearrow f$. Dann gilt auch $(\varphi_n)^y \nearrow f^y$ für $y \in Y$ fixiert bzw. $(\varphi_n)_x \nearrow f_x$ für $x \in X$ fixiert, d.h. aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$h_n(x) := \int_Y \varphi_n(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y (\varphi_n)_x(y)\, d\nu(y) \nearrow \int f_x(y)\, d\nu(y) = h(x), \quad x \in X,$$

und genauso

$$g_n(y) := \int_X \varphi_n(x,y)\, d\mu(x) \nearrow g(y), \quad y \in Y.$$

Da h_n, g_n nach dem schon gezeigten messbar sind, sind auch $g, h \geq 0$ messbar. Eine weitere zweimalige Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert schließlich (unter

Verwendung der Gültigkeit des Satzes für die einfachen Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{E}_+$)

$$\begin{aligned}\int_X h(x)\,d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_X h_n(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\int_Y \varphi_n(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n\,d(\mu\otimes\nu) = \int f\,d(\mu\otimes\nu).\end{aligned}$$

Genauso folgt $\int_Y g(y)\,d\nu(y) = \int f\,d(\mu\otimes\nu)$, was den Beweis beschließt. □

Beispiel 9.18. Es gilt[a]

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,2]} xy^2 d\lambda^2(x,y) &= \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,2]} xy^2\,d\lambda(y)\right)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{[0,1]}\left(\int_0^2 xy^2\,dy\right)\,d\lambda(x)\\ &= \int_{[0,1]}\frac{8}{3}x\,d\lambda(x)\\ &= \frac{8}{3}\int_0^1 x\,dx = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir erhalten, wenn wir die Integrationsreihenfolge vertauscht hätten.

[a] Hier nutzen wir wieder die Vereinbarung, dass $\lambda^2|_{[-1,1]\times[0,1]}$ einfach als λ^2 geschrieben wird usw. Ferner nutzen wir, dass nach Bemerkung 9.14 gilt, dass $\lambda^2|_{[-1,1]\times[0,1]} = (\lambda\otimes\lambda)|_{[-1,1]\times[0,1]} = (\lambda|_{[-1,1]})\otimes(\lambda|_{[0,1]})$.

Als weitere Anwendung des Satzes von Tonelli können wir nun eine interessante Formel für das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ aufstellen.

Beispiel 9.19 (Gauß-Integral und Volumen der n-Kugel)**.** Für $r > 0$ sei

$$B_n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\}.$$

Ferner sei

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,d\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

das sogenannte **Gauß-Integral** (vergleiche Aufgabe 29). Dann gilt mit dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(t^2+s^2)}\,d\lambda^2(s,t) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{s^2}{2}}\,d\lambda(t)\right)\,d\lambda(s)\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}d\lambda(t)\right)}_{=I}d\lambda(s) = I\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}d\lambda(s)\right) = I^2.\end{aligned}$$

Allgemeiner folgt mit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2}\,d\lambda^n(x) = I^n.$$

Andererseits erhalten wir mit Proposition 9.15 (ii) (dem Layer-Cake-principle) auch

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2}\, d\lambda^n(x) &= \int_{(0,\infty)} \lambda^n\left(\{x : e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} > t\}\right) d\lambda(t)\\ &= \int_{(0,1)} \lambda^n\left(\{x : \|x\|_2^2 < -2\ln(t)\}\right) d\lambda(t) = \int_{(0,1)} \lambda^n\left(B_n\left(\sqrt{-2\ln(t)}\right)\right) d\lambda(t).\end{aligned}$$

Wegen $\lambda^n(B_n(r)) = r^n\lambda^n(B_n(1))$ folgt also

$$\begin{aligned}I^n &= \lambda^n(B_n(1)) \cdot \int_{(0,1)} (-2\ln(t))^{n/2} d\lambda(t) = 2^{n/2} \cdot \lambda^n(B_n(1)) \cdot \int_0^1 (-\ln(t))^{n/2} dt\\ &\overset{-\ln(t)=x}{=} 2^{n/2} \cdot \lambda^n(B_n(1)) \cdot \int_0^\infty x^{n/2} e^{-x} dx = 2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \lambda^n(B_n(1)).\end{aligned}$$

Hierbei ist $\Gamma(.)$ die in Beispiel 6.16 eingeführte Gamma-Funktion. Da wir $\lambda^2(B_2(1)) = \pi$ in Beispiel 9.7 schon ausgerechnet haben, folgt hieraus also einerseits (wegen $\Gamma(2) = 1! = 1$), dass

$$I^2 = 2 \cdot \Gamma(2) \cdot \lambda^2(B_2(1)) = 2\pi,$$

d.h. das **Gauß-Integral** hat den Wert

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} d\lambda(t) = \sqrt{2\pi}.$$

Andererseits folgt hiermit dann für das **n-dimensionale Volumen der Einheitskugel**, dass

$$\omega_n := \lambda^n(B_n(1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.^a$$

Und schließlich folgt auch noch, dass

$$\lambda^n(B_n(r)) = r^n \cdot \omega_n = r^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

[a] Wegen $\Gamma(m) = (m-1)!$ für $m \in \mathbb{N}$ folgt hieraus zum Beispiel für gerade Dimensionen $n = 2k$

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ folgt außerdem

$$\omega_{n+2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma((\frac{n}{2}+1)+1)} = \frac{\pi}{\frac{n}{2}+1}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi}{n+2}\cdot\omega_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

So erhalten wir etwa mit $\omega_1 = 2$ einen zweiten Beweis, dass $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$ (vergleiche Beispiel 9.16 (iii)).

Unser letztes Ziel in diesem Abschnitt ist die Verallgemeinerung des Satzes von Tonelli auf allgemeine Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Hier ist etwas Vorsicht geboten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 9.20. Auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \lambda^2)$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f = 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\times[0,\infty)} - 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\times(-\infty,0)}.$$

Diese ist Borel-messbar und λ^2-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) = 1 \cdot \lambda^2(\mathbb{Q} \times [0,\infty)) - 1 \cdot \lambda^2(\mathbb{Q} \times (-\infty,0))$$
$$= \lambda(\mathbb{Q}) \cdot \lambda([0,\infty)) - \lambda(\mathbb{Q}) \cdot \lambda((-\infty,0)) \overset{\lambda(\mathbb{Q})=0}{=} 0.$$

Andererseits kann man dieses Integral nicht so ohne weiteres durch Hintereinanderausführung der Einzelintegrale berechnen. Denn für $x \in \mathbb{Q}$ ist der x-Schnitt von f gegeben durch

$$f_x(y) = f(x,y) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) - 1 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

d.h. f_x ist für $x \in \mathbb{Q}$ nicht λ-integrierbar[a] und das Integral

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y)$$

somit nicht definiert. Damit machte natürlich auch

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

keinen Sinn. Man beachte jedoch, dass es sich bei $\mathbb{Q}$ um eine λ-Nullmenge handelt und dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Funktion $h(x)$ sehr wohl definiert ist und den Wert 0 annimmt (letzteres, weil $f(x,y) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R}$).

[a] Da $\int_{\mathbb{R}} (f_x)_\pm \, d\lambda = \infty$.

Um den Satz von Tonelli zu erweitern, müssen wir also zunächst über Funktionen sprechen, die nur außerhalb einer Nullmenge definiert sind.

Definition 9.21. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A \subseteq X$ (aber nicht notwendig $A \in \mathcal{A}$) und $h : A \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung.

(i) Ist h außerhalb einer μ-Nullmenge definiert, so heißt h **μ-fast sicher definiert**. In diesem Fall existiert also eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass $X \setminus A \subseteq N$.

(ii) Ist h μ-fast sicher definiert, so heißt h **μ-integrierbar**, falls eine μ-integrierbare Funktion $\tilde{h} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert, mit der h μ-fast sicher übereinstimmt. Letzteres bedeutet, dass eine μ-Nullmenge M existiert, so dass $\{x \in A : h(x) \neq \tilde{h}(x)\} \subseteq M$.

Ferner setzt man in diesem Fall

$$(\star) \qquad \int h \, d\mu := \int \tilde{h} \, d\mu.$$

Bemerkung 9.22. (i) Das Integral in $(\star)$ ist wohldefiniert, denn stimmt h μ-fast sicher mit einer weiteren μ-integrierbaren Funktion $h^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ überein, so gilt $\tilde{h} = h^*$ μ-fast sicher und damit nach Satz 6.4 auch $\int \tilde{h}\, d\mu = \int h^* \, d\mu$.

(ii) Betrachten wir $f = 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \times [0,\infty)} - 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \times (-\infty,0)}$ aus Beispiel 9.20. Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad h(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) = 0$$

ist auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda)$ dann λ-fast sicher definiert und auch λ-integrierbar (wähle etwa $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto 0$).

Nun können wir die gewünschte Verallgemeinerung des Satzes von Tonelli formulieren.

Satz 9.23 (Satz von Fubini). Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ sei $\mu \otimes \nu$-integrierbar. Dann gilt:

(i) Die Funktion
$$g(y) := \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$
ist auf Y ν-fast sicher definiert und ν-integrierbar.

(ii) Die Funktion
$$h(x) := \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$$
ist auf X μ-fast sicher definiert und μ-integrierbar.

Ferner ist
$$(\star) \qquad \int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Beweis. Wir schreiben $f : X \to \mathbb{R}$ als $f = f_+ - f_-$. Dann sind $f_\pm : X \times Y \to [0, \infty]$ messbar und die Gültigkeit von $(\star)$ für $f_\pm$ (statt f) folgt direkt aus dem Satz von Tonelli. Wegen $0 \le f_\pm \le |f|$ folgt hieraus und aus der Integrierbarkeit von f insbesondere auch
$$\int_Y \underbrace{\left(\int_X f_\pm(x,y)\, d\mu(x) \right)}_{=: g_\pm(y)} d\nu(y) = \int f_\pm\, d(\mu \otimes \nu) \le \int |f|\, d(\mu \otimes \nu) < \infty.$$
Aber damit zeigt Proposition 5.28 (iv), dass
$$\nu(\{g_+ = \infty\}) = \nu(\{g_- = \infty\}) = 0.$$
Somit ist auch $Y_0 := \{g_+ = \infty\} \cup \{g_- = \infty\} \in \mathcal{B}$ eine ν-Nullmenge. Die Funktion
$$g(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) = \int_X f_+(x,y)\, d\mu(x) - \int_X f_-(x,y)\, d\mu(x) = g_+(y) - g_-(y)$$
ist damit für $y \in Y \setminus Y_0$, und somit ν-fast sicher, definiert, und wegen $|g| \le g_+ + g_-$ auch ν-integrierbar. Dies zeigt die Gültigkeit von (i). Teil (ii) folgt ganz analog. Schließlich folgt die Gültigkeit von $(\star)$ aus dessen Gültigkeit für $f_\pm$ und der Linearität der beteiligten Integrale.

□

Bemerkung 9.24. Man wendet die Sätze von Fubini und Tonelli oft gemeinsam an:

Sei $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und
$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{oder} \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$
Dann ist $|f|$ nach dem Satz von Tonelli λ-integrierbar. Aber nach Satz 6.4 ist dann auch f λ-integrierbar. Also ist der Satz von Fubini anwendbar und es gilt insbesondere auch $(\star)$.

Beispiel 9.25 (Faltungsintegrale). Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λ^n-integrierbar. Die Funktion

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$$

ist dann Borel-messbar (denn $h = (f \circ (\pi_x - \pi_y)) \cdot (g \circ \pi_y)$). Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,y)| \, d\lambda^n(x) \right) d\lambda^n(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, |g(y)| \, d\lambda^n(x) \right) d\lambda^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, d\lambda^n(x) \right) |g(y)| \, d\lambda^n(y).\end{aligned}$$

Aber aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, d\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, d\lambda^n(x),$$

d.h. aus obiger Gleichungskette erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,y)| \, d\lambda^n(x) \right) d\lambda^n(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, d\lambda^n(x) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, d\lambda^n(y) \right) < \infty.$$

Aus den Sätzen von Fubini und Tonelli (vgl. Bemerkung 9.24) folgt also, dass die Funktion

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, d\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y) \, d\lambda^n(y)$$

auf $\mathbb{R}^n$ λ^n-fast sicher definiert und integrabel ist. Ferner haben wir gezeigt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \, d\lambda^n \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda^n \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| \, d\lambda^n \right).$$

Die fast-sicher definierte Funktion $f * g$ heißt die **Faltung** von f und g.

10. Der Transformationssatz

Stichpunkte. Transformationssatz, Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes, Polarkoordinaten, Oberflächenmaße

In diesem Abschnitt wollen wir eine Substitutionsregel für das Lebesgue-Maß beweisen. Dazu ist es zweckmäßig, die bekannte Substitutionsregel für das Riemann-Integral zunächst unter Verwendung von Lebesgue-Integralen zu reformulieren.

Bemerkung 10.1. Auch in diesem Abschnitt werden wir Einschränkungen des Lebesgue-Maßes λ^n auf messbare Teilmengen $B \in \mathcal{B}_n$ in der Regel wieder mit λ^n statt mit $\lambda^n|_B$ bezeichnen. Nur wenn die Umstände es erfordern, werden wir die genauere Bezeichnung verwenden.

Lemma 10.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to I$ bijektiv und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$(\Diamond) \qquad \int_I f(y)\, d\lambda(y) = \int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\, d\lambda(x).$$

Beweis. 1. Fall: φ ist streng monoton wachsend, d.h. $\varphi' \geq 0$ und $I = \varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Dann folgt aus der Substitutionsregel für das Riemann-Integral und aus Satz 6.9

$$\int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\, d\lambda(x) = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy = \int_{\varphi([a,b])} f(y)\, d\lambda(y).$$

2. Fall: φ ist streng monoton fallend, d.h. $\varphi' \leq 0$ und $I = [\varphi(b), \varphi(a)]$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\, d\lambda(x) &= \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot (-\varphi'(x))\, dx \\ &= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)\, dy = \int_{\varphi([a,b])} f(y)\, d\lambda(y).\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun eine $(\Diamond)$ entsprechende Identität für das höherdimensionale Lebesgue-Integral aufstellen. Hierzu erinnern wir zunächst an einige relevante Begriffe aus der mehrdimensionalen Analysis.

Erinnerung. (i) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so bezeichnet $D\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dessen (totale) Ableitung an der Stelle $x \in U$. Wir statten $\mathbb{R}^n$ stets mit der Standardbasis aus und können (und werden) die Ableitung daher mit dessen Jacobi-Matrix identifizieren: Ist also $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ mit $\varphi_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, so gilt

$$D\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

(ii) Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so bezeichnet $\mathrm{Diff}(U, V)$ die Menge aller C^1-Diffeomorphismen $\varphi : U \to V$, d.h. φ ist bijektiv und sowohl φ als auch φ^{-1} sind stetig differenzierbar[a]. Man beachte, dass für $\varphi \in \mathrm{Diff}(U, V)$ Folgendes gilt:

$$\forall x \in U: \quad \det(D\varphi(x)) \neq 0, \qquad (\heartsuit)$$

denn ist $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $\mathrm{id}_U : U \to U$ die Identität, so gilt mit der Kettenregel

$$E_n = D\,\mathrm{id}_U(x) = D(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = [D\varphi^{-1}(\varphi(x))][D\varphi(x)],$$

d.h. $D\varphi(x)$ ist invertierbar. Ist umgekehrt φ stetig differenzierbar und bijektiv und gilt $(\heartsuit)$, so folgt aus dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit, dass auch φ^{-1} stetig differenzierbar, φ also ein C^1-Diffeomorphismus ist.

[a]D.h. alle partiellen Ableitungen von φ und φ^{-1} existieren und sind stetig.

Satz 10.3 (Transformationssatz für das Lebesgue-Maß). Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in \mathrm{Diff}(U, V)$.

(a) Ist $f : V \to [0, \infty]$ Borel-messbar, so gilt

$$\int_V f(y)\, d\lambda^n(y) = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\, d\lambda^n(x).$$

(b) Es ist $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann integrierbar, wenn $U \ni x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|$ integrierbar ist und in diesem Fall bleibt die Formel in (a) gültig.

(c) Ist $A \subseteq U$ Borel-messbar, so auch $\varphi(A)$ und es gilt

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(x))|\, d\lambda^n(x)$$

Man nennt die Determinante $\det(D\varphi(x))$ auch die **Funktionaldeterminante** von φ an der Stelle x.

Bemerkung 10.4. (i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ sind stetig auf U und damit auch die Abbildung $U \ni x \mapsto |\det(D\varphi(x))|$. In Teil (a) ist der Integrand auf der rechten Seite also insbesondere Borel-messbar.

(ii) Im Falle $n = 1$ gilt $\det(D\varphi(x)) = \varphi'(x)$, d.h. $(\diamondsuit)$ ist wirklich ein Spezialfall von (a).

(iii) Da $\varphi^{-1} : V \to U$ stetig, also Borel-messbar ist, folgt für $A \in \mathcal{B}(U)$, dass $\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}(V)$. In Teil (c) ist also nur die Formel zu zeigen. Diese wiederum ist ein Spezialfall von (a) mit $f = \mathbb{1}_{\varphi(A)}$.

Den umfangreichen Beweis des Transformationssatzes verschieben wir etwas nach hinten und schauen uns stattdessen zunächst ein paar Anwendungen an.

Beispiel 10.5 (Lineare Abbildungen). Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist T ein C^1-Diffeomorphismus mit konstanter Ableitung $DT(x) = T, x \in \mathbb{R}^n$. Aus (c) folgt also

$$\lambda^n(T(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda^n(A), \quad A \in \mathcal{B}_n.$$

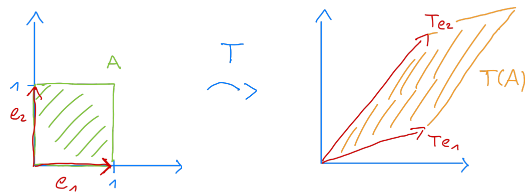
Das n-dimensionale Volumen von A wird also unter der linearen Abbildung T um den Faktor $|\det(T)|$ „verzerrt". Weiterhin ergibt sich für den Einheitswürfel $A = [0, 1]^n$, dass

$$\lambda^n(T([0, 1]^n)) = |\det(T)|\,.$$

Dies ist das schon aus der Linearen Algebra bekannte Resultat, dass die Determinante von T das n-dimensionale Volumen des Bildes des Einheitswürfels beschreibt. Aus (a) und (b) folgt ferner noch

$$\frac{1}{|\det(T)|}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,d\lambda^n(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))\,d\lambda^n(x),$$

sofern die Integrale Sinn machen (vergleiche Beispiel 5.23).



Das Bild des Einheitswürfels unter der linearen Abbildung T.

Beispiel 10.6 (Bewegungsinvarianz). Sei $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine Bewegung, d.h. es gilt

$$\varphi(x)=Qx+b,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

für eine orthogonale Matrix $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und ein $b\in\mathbb{R}^n$. Auch hier handelt es sich um einen C^1-Diffeomorphismus mit konstanter Ableitung, $D\varphi(x)=Q$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$. Da die Determinante einer orthogonalen reellen Matrix den Wert ±1 besitzt, folgt aus (c), dass

$$\lambda^n(\varphi(A))=|\det(Q)|\cdot\lambda^n(A)=\lambda^n(A).$$

Auch das n-dimensionale Lebesgue-Maß ist also bewegungsinvariant (und damit insbesondere auch rotations-, spiegelungs- und translationsinvariant). Aus (a) und (b) folgt ferner

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,d\lambda^n(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(Qx+b)\,d\lambda^n(x),$$

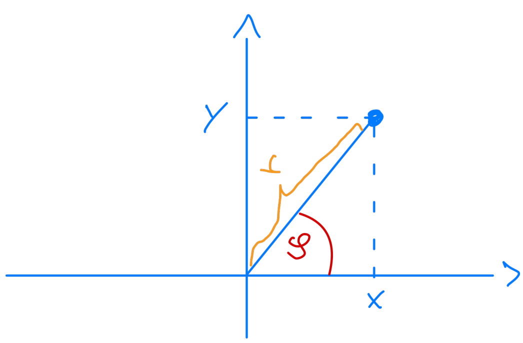
sofern die Integrale Sinn machen.

Beispiel 10.7 (Unterräume). Ist $V\subseteq\mathbb{R}^n$ ein echter Unterraum, d.h. $\dim(V)\le n-1$,[a] so existiert eine Bewegung (sogar eine Drehung) $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ mit $\varphi(V)\subseteq\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$. Es folgt

$$0\le\lambda^n(V)=\lambda^n(\varphi(V))\le\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})=0\quad\text{also}\quad\lambda^n(V)=0.$$

Dies impliziert auch, dass $\lambda^n(T(\mathbb{R}^n))=0$, falls $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ nicht bijektiv ist (die erste Formel in Beispiel 10.5 gilt also auch, wenn T nicht bijektiv ist).

[a] V ist dann insbesondere abgeschlossen, also eine Borel-Menge.



Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 10.8 (Polarkoordinaten in der Ebene). (i) Sei $N := [0,\infty) \times \{0\}$. Die Abbildung

$$\Phi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus N, \quad (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

ist stetig differenzierbar und bijektiv mit

$$\det(D\Phi(r,\varphi)) = \det\left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}\right) = r \cdot (\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi)) = r \neq 0.$$

Φ ist also ein C^1-Diffeomorphismus. Da N eine λ^2-Nullmenge ist, folgt mit dem Transformationssatz und dem Satz von Tonelli bzw. Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus N} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) &= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} (f\circ\Phi)(r,\varphi)\cdot r\, d\lambda^2(r,\varphi) \\ &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,2\pi)} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, d\varphi \right) r\, dr,\end{aligned}$$

sofern einer (und damit alle) der auftretenden Integranden integrierbar sind.

(ii) Aus (i) erhalten wir eine weitere Möglichkeit, das Gauß-Integral zu berechnen (vergleiche Beispiel 9.19). Mit dem Satz von Tonelli gilt

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, d\lambda(x)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, d\lambda^2(x,y) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,2\pi)} e^{-\frac{1}{2}r^2}\, d\varphi\right) r\, dr = 2\pi \int_0^\infty re^{-\frac{1}{2}r^2}\, dr = 2\pi,$$

d.h. $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$.

Wir wollen uns nun dem Beweis des Transformationssatzes zuwenden. Dies geschieht in einer Reihe von Schritten.

— Beweis des Transformationssatzes —

1. Schritt: Die Teile (a) und (b) folgen aus Teil (c)

Beweis: Teil (c) besagt, dass für $\varphi \in \mathrm{Diff}(U,V)$ gilt

$$\forall A \in \mathcal{B}(U): \quad \lambda^n(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(x))|\, d\lambda^n(x).$$

Schreiben wir die linke Seite als Bildmaß und verwenden wir eine etwas genauere Notation für die beteiligten Lebesgue-Maße, so bedeutet diese Identität gerade, dass

$$(\lambda^n|_V)_{\varphi^{-1}}(A) = \int_A |\det(D\varphi(x))|\, d\lambda^n|_U(x),$$

d.h. das Bildmaß $(\lambda^n|_V)_{\varphi^{-1}}$ auf $(U, \mathcal{B}(U))$ besitzt die Dichte $|\det(D\varphi(.))|$ bezüglich des Lebesgue-Maßes $\lambda^n|_U$ (vergleiche Satz 4.6 und Korollar 5.20). Oder in unserer Kurznotation für Maße mit Dichten:

$$(\lambda^n|_V)|_{\varphi^{-1}} = |\det(D\varphi(.))| \cdot \lambda^n|_U.$$

Unter Verwendung der Transformationsformel für Bildmaße (Proposition 5.22 bzw. Satz 6.4 (iii)) folgt damit zum Beispiel für $f : V \to [0,\infty]$ Borel-messbar und $\mu := (\lambda^n|_V)_{\varphi^{-1}}$

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))|\, d\lambda^n|_U(x) \overset{\text{Satz 6.4}(iv)}{=} \int_U f(\varphi(x))\, d\mu(x)$$
$$\overset{\text{Prop. 5.22}}{=} \int_V f(y)\, d\mu_\varphi(y) = \int_V f(y)\, d\lambda^n|_V(y).$$

Hierbei haben wir in der vorletzten Gleichung die Identität $\mu_\varphi = ((\lambda^n|_V)_{\varphi^{-1}})_\varphi = \lambda^n|_V$ benutzt. Damit ist $(c) \Rightarrow (a)$ gezeigt und $(c) \Rightarrow (b)$ folgt analog.

2. Schritt: Gilt Teil (c) für $\varphi_1 \in \mathrm{Diff}(U_1, U_2)$ und für $\varphi_2 \in \mathrm{Diff}(U_2, U_3)$, so auch für deren Verknüpfung $\varphi_2 \circ \varphi_1 \in \mathrm{Diff}(U_1, U_3)$.

Beweis: Da φ_2 Teil (c) erfüllt, folgt für $A \in \mathcal{B}(U_1)$, d.h. $\varphi(A) \in \mathcal{B}(U_2)$, dass

$$\lambda^n((\varphi_2 \circ \varphi_1)(A)) = \lambda^n(\varphi_2(\varphi_1(A))) = \int_{\varphi_1(A)} |\det(D\varphi_2(y))|\ d\lambda^n(y).$$

Aber auch φ_2 erfüllt nach Voraussetzung Teil (c) und damit nach Schritt 1 auch den Teil (a) des Transformationssatzes. Wenden wir diesen an mit $f(y) := |\det(D\varphi_2(y))|$, so folgt weiter

$$\int_{\varphi_1(A)} |\det(D\varphi_2(y))|\ d\lambda^n(y) = \int_A |\det(D\varphi_2(\varphi_1(x)))| \cdot |\det(D\varphi_1(x))|\ d\lambda^n(x)$$
$$= \int_A |\det D(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)|\ d\lambda^n(x),$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel und die Multiplikativität der Determinante benutzt haben.

3. Schritt: Teil (c) gilt im Falle, dass $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine Permutation der Koordinaten ist, d.h. $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ für eine Permutation $\pi \in S_n$.

Beweis: Es gilt $\varphi(x) = Px$ für eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. insbesondere $\det(D\varphi(x)) = \det(P) = \pm 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für einen Quader $(a,b] \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt ferner offensichtlich

$$\lambda^n_{\varphi^{-1}}((a,b]) = \lambda^n(\varphi((a,b])) = \lambda^n((a,b]).$$

Die Maße $\lambda^n_{\varphi^{-1}}$ und λ^n stimmen also auf den messbaren Quadern überein und damit aufgrund des Maßeindeutigkeitssatzes 7.11 (bzw. Satz 9.13 (ii)) auch auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Aber dann folgt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \lambda^n_{\varphi^{-1}}(A) = \lambda^n(A) = \int_A 1\, d\lambda^n(x) = \int_A |\det(D\varphi(x))|\ d\lambda^n(x).$$

4. Schritt: Für $\varphi \in \mathrm{Diff}(U, V)$ und Permutationsabbildungen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\varphi \text{ erfüllt } (c) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_2|_{\varphi_2^{-1}(U)} \text{ erfüllt } (c)$$

In anderen Worten: Beim Nachweis, dass φ Teil (c) erfüllt, dürfen wir die Koordinaten im Definitions- und Bildbereich beliebig permutieren.

Beweis: Folgt direkt aus Schritt 2 und 3.

5. Schritt: Im Falle $n = 1$ gilt (c) für alle $\varphi \in \mathrm{Diff}(U, V)$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen.

Beweis: Wenden wir Lemma 10.2 mit $f(x) = 1$ an, so folgt für alle Intervalle $[a,b] \subseteq U$, dass

$$\lambda(\varphi([a,b])) = \int_{\varphi[a,b]} 1 \, d\lambda(y) = \int_{[a,b]} |\varphi'(x)| \, d\lambda(x) = \int_{[a,b]} |\det(D\varphi(x))| \, d\lambda(x).$$

Die Maße $(\lambda|_V)_{\varphi^{-1}}$ und $|\det(D\varphi(.))| \cdot \lambda|_U$ stimmen also auf den messbaren Intervallen $[a,b] \subseteq U$ überein. Da diese Intervalle einen $\cap$-stabilen Erzeuger der Borel-Mengen $\mathcal{B}(U)$ bilden, folgt (c) wieder mit dem Maßeindeutigkeitssatz 7.11.

6. Schritt: Für $\varphi \in \mathrm{Diff}(U,V)$ sind äquivalent:

(i) φ erfüllt Teil (c).

(ii) Für alle $x \in U$ existiert eine offene Kugel $B = B(x,r) \subseteq U$, so dass die Einschränkung $\varphi|_B$ Teil (c) erfüllt.

Beweis: Nur $(ii) \Rightarrow (i)$ ist zu zeigen. Da wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ für jede offene Kugel $B(x,r)$ eine Kugel $B(p,r_p)$ mit $p \in \mathbb{Q}^n, r_p \in \mathbb{Q}^+$ und

$$x \in B(p,r_p) \subseteq B(x,r)$$

existiert, sehen wir wie im Beweis von Lemma 8.13 (siehe Übungen), dass wir U als abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln $B_n = B(p_n, r_n)$ darstellen können, auf denen (c) jeweils erfüllt ist, d.h.

$$U = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \quad \text{und} \quad \varphi|_{B_n} \text{ erfüllt (c).}$$

Setzen wir $C_1 := B_1$ und $C_n := B_n \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir schließlich eine disjunkte Folge messbarer Teilmengen von U mit $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ und $\varphi|_{C_n}$ erfüllt Teil (c) für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der σ-Additivität der beteiligten Maße folgt dann für $A \in \mathcal{B}(U)$:

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\varphi(A)) &= \lambda^n_{\varphi^{-1}}(A) = \lambda^n_{\varphi^{-1}}(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n_{\varphi^{-1}}(A \cap C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n(\varphi(A \cap C_n)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A\cap C_n} |\det(D\varphi(x))| \, d\lambda^n(x) = \int_A |\det(D\varphi(x))| \, d\lambda^n(x).
\end{aligned}$$

7. und finaler Schritt: Wir beweisen per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall U, V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen } \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(U,V): \quad \varphi \text{ erfüllt Teil (c)}$$

Den Induktionsanfang $n = 1$ haben wir mit Schritt 5 bereits gemacht. Nun nehmen wir an, die Aussage gelte für $(n-1) \in \mathbb{N}$. Wir haben zu zeigen, dass sie dann auch für n gilt.

Seien also $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in \mathrm{Diff}(U,V)$ und $p \in U$. Wegen $\det(D\varphi(p)) \neq 0$ (man vergleiche Erinnerung (ii) vom Beginn des Abschnitts), existiert ein $j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}(p) \neq 0$. Durch Permutieren der Koordinaten können wir wegen Schritt 4 ohne Einschränkung annehmen, dass $j = 1$, d.h.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0.$$

Nun sei

$$\psi : U \to \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n).$$

Dann hat die zugehörige Jacobi-Matrix eine Blockstruktur (hier bezeichnet $E_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Einheitsmatrix)

$$D\psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & * \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $\det(D\psi(p)) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$, d.h. $D\psi(p)$ ist invertierbar. Mit dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit existiert also eine Kugel $B = B(p,r) \subseteq U$, so dass $\psi|_B$ ein C^1-Diffeomorphismus ist. Nach Schritt 6 genügt es zu zeigen, dass $\varphi|_B$ Teil (c) erfüllt, d.h. wir können im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass $U = B$ gilt und ψ ein C^1-Diffeomorphismus auf U ist.

Nun zerlegen wir φ wie folgt

$$\varphi = \underbrace{(\varphi \circ \psi^{-1})}_{=:\rho} \circ \psi = \rho \circ \psi.$$

Für die erste Komponente der Abbildung ρ gilt dann

$$\varrho_1(y) = (\varphi_1 \circ \psi^{-1})(y) = \varphi_1(\psi^{-1}(y)) = \psi_1(\psi^{-1}(y)) = (\psi \circ \psi^{-1})_1(y) = y_1.$$

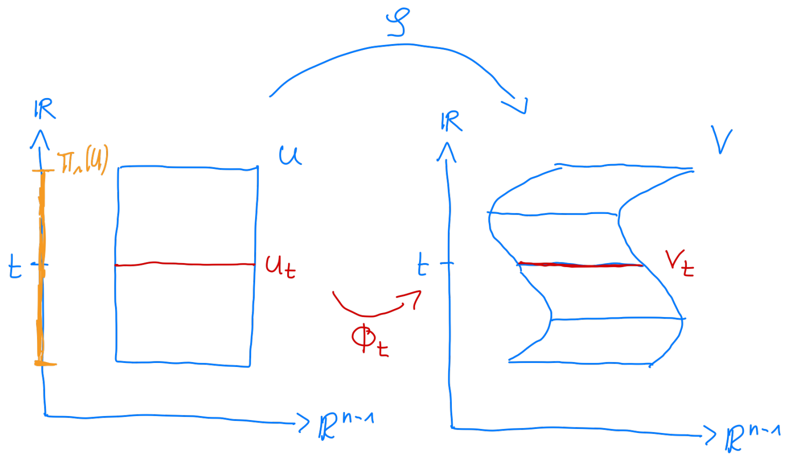
Nach Schritt 2 genügt es nun zu zeigen, dass sowohl ρ als auch ψ den Teil (c) erfüllt. Diese beiden Abbildungen haben gemeinsam, dass sie (mindestens) eine Koordinate festhalten. Wir müssen also nur zeigen, dass jeder Diffeomorphismus mit dieser Eigenschaft den Teil (c) erfüllt. Nach einer Permutation der Koordinaten und einer weiteren Anwendung von Schritt 4 können wir also im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass $\varphi \in \mathrm{Diff}(U,V)$ die erste Koordinate festhält, also folgende Gestalt hat: Für $x = (t,x') \in U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gilt

$$\varphi(t,x') = (t, \underbrace{\varphi_2(t,x'),\ldots,\varphi_n(t,x')}_{=:\Phi_t(x')}).$$

Für festes t gilt hier $\Phi_t \in \mathrm{Diff}(U_t, V_t)$, wobei $U_t, V_t \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ gerade die entsprechenden t-Schnitte sind, d.h.

$$U_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,x') \in U\} \quad \text{und} \quad V_t := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,x') \in V\}.$$

Dies sind offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{n-1}$ (warum?).



Man beachte, dass wir die Abbildungen Φ_t nur für

$$t \in \pi_1(U) = \{s \in \mathbb{R} : \exists x' \in U \text{ mit } (s,x') \in U\}$$

definiert haben. Hierbei ist $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, (s,x') \mapsto s$ die Projektion auf die erste Koordinate. Es ist nicht schwer zu sehen, dass mit U auch $\pi_1(U)$ offen also auch eine Borel-Menge ist.

Für $t \in \pi_1(U)$ erfüllt Φ_t dann nach Induktionsannahme insbesondere auch den Teil (c). Ferner hat die Jacobi-Matrix von φ die Blockgestalt

$$D\varphi(t,x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & D\Phi_t(x') \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt

$$(\diamond) \qquad \det(D\varphi(t,x')) = \det(D\Phi_t(x')), \quad ((t,x') \in U).$$

Nun sei $A \in \mathcal{B}(U)$. Wir beachten, dass für $t \in \mathbb{R}$

$$(\varphi(A))_t = \begin{cases} \Phi_t(A_t) & , t \in \pi_1(U), \\ \emptyset & , t \notin \pi_1(U). \end{cases}$$

Damit können wir den Beweis nun schrittweise vollenden:

$$\begin{aligned}
\lambda^n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}((\varphi(A))_t)\, d\lambda(t) && \text{(Cavalieri, Prop. 9.15)} \\
&= \int_{\pi_1(U)} \lambda^{n-1}(\Phi_t(A_t))\, d\lambda(t) \\
&= \int_{\pi_1(U)} \left(\int_{A_t} \left|\det(D\Phi_t(x'))\right| \, d\lambda^{n-1}(x') \right) d\lambda(t) && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\pi_1(U)}(t) \cdot \mathbb{1}_{A_t}(x') \left|\det(D\varphi(t,x'))\right| \, d\lambda^{n-1}(x') \right) d\lambda(t) && (\diamond) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A}(t,x') \left|\det(D\varphi(t,x'))\right| \, d\lambda^{n-1}(x') \right) d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x) \left|\det(D\varphi(x))\right| \, d\lambda^n(x) && \text{(Tonelli)} \\
&= \int_A \left|\det(D\varphi(x))\right| \, d\lambda^n(x). && \square
\end{aligned}$$

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Oberflächenmaße). Nehmen wir an, dass $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung mit $\operatorname{Rang}(T) = k \leq n$ ist. Wir wir bereits wissen, ist dann das Bild des k-dimensionalen Einheitswürfels $W := [0,1]^k$ eine λ^n-Nullmenge,

$$T(W) \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \lambda^n(T(W)) = 0.$$

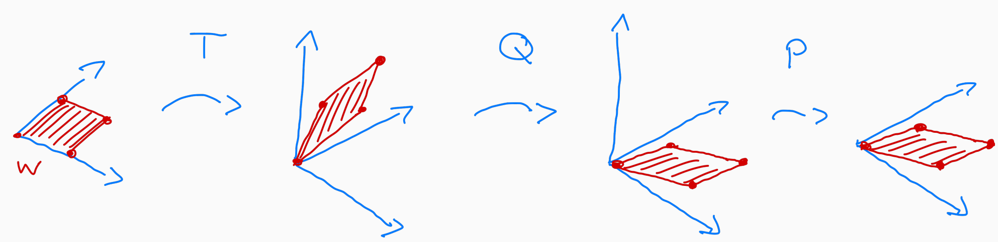
Allerdings liegt $T(W)$ im k-dimensionalen Unterraum $T(\mathbb{R}^k)$ des $\mathbb{R}^n$, d.h. es sollte doch möglich sein, $T(W)$ so etwas wie ein k-dimensionales Volumen zuzuordnen. Hierzu können wir etwa eine orthogonale Abbildung $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ so auswählen, dass

$$Q(T(W)) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : y = 0\}$$

und anschließend diese Menge mittels der orthogonalen Projektion

$$P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k, \quad (x,y) \mapsto x$$

zu einer Teilmenge $(P \circ Q \circ T)(W)$ von $\mathbb{R}^k$ machen.



Da $(P \circ Q \circ T) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$, folgt dann aus dem Transformationssatz bzw. Beispiel 10.5, dass

$$\lambda^k((P \circ Q \circ T)(W)) = |\det(P \circ Q \circ T)|\,.$$

Allerdings ist dies noch keine sinnvolle Formel für das k-dimensionale Volumen von $T(W)$, da sie von der zufällig gewählten orthogonalen Abbildung Q abhängt. Hier hilft ein Trick: Wir identifizieren alle Abbildungen mit den zugehörigen darstellenden Matrizen bzgl. der Standardbasen und nutzen, dass $P^tP = Q^tQ = E_n$ (hier ist P^t die zu P transponierte Matrix). Somit ist

$$\begin{aligned} |\det(PQT)|^2 &= \det(PQT) \cdot \det(PQT) = \det((PQT)^t) \cdot \det(PQT) \\ &= \det(T^tQ^tP^t) \cdot \det(PQT) = \det(T^tQ^tP^tPQT) \\ &= \det(T^tT). \end{aligned}$$

Wir erhalten also durch

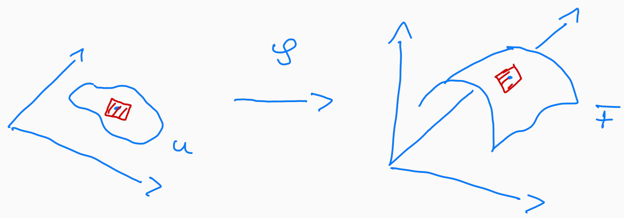
$$\mathrm{vol}_k(T(W)) := \sqrt{\det(T^tT)}$$

eine sinnvolle Definition des k-dimensionalen Volumens von $T(W)$.

Betrachten wir nun allgemeiner eine C^1-Abbildung $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Dann wirkt φ in einer kleinen Umgebung eines Punktes $x \in U$ annähernd wie die affin-lineare Funktion $p \mapsto \varphi(x) + D\varphi(x)p$. Ein kleiner Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^k$ um x wird also (abgesehen von einer Verschiebung) annähernd auf die Menge $D\varphi(x)(W)$ abgebildet. Diese hat das k-dimensionale Volumen

$$\sqrt{\det((D\varphi(x))^tD\varphi(x))} =: \sqrt{g_\varphi(x)}.$$

Die Abbildung $g_\varphi : U \to [0,\infty), x \mapsto \det((D\varphi(x))^tD\varphi(x))$ wird auch die **Gramsche Determinante** von φ genannt.



Damit sollte die folgende Definition ausreichend motiviert sein.

Definition 10.9. Eine offene Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***k*-dimensionales Flächenstück** in $\mathbb{R}^n$, falls $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und eine C^1-Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

(i) $\varphi(U) = F$,

(ii) $\varphi : U \to F$ ist ein Homöomorphismus,

(iii) $\mathrm{Rang}(D\varphi)(x) = k$ für alle $x \in U$.

In diesem Fall nennt man φ eine **Parametrisierung** von F. Weiterhin heißt das Maß

$$\sigma : \mathcal{B}(F) \to [0,\infty], \quad \sigma(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{g_\varphi(x)}\, d\lambda^k(x)$$

das ***k*-dimensionale Oberflächenmaß** von F und

$$\mathrm{vol}_k(E) := \sigma(E)$$

das ***k*-dimensionale Volumen** von $E \subseteq F$.

Bemerkung 10.10. (i) Mit dem Maß $d\mu = \sqrt{g_\varphi}\, d\lambda^k$ auf $(U, \mathcal{B}(U))$ gilt also $\sigma = \mu_\varphi$. Dies zeigt, dass σ wirklich ein Maß auf $(F, \mathcal{B}(F))$ ist.

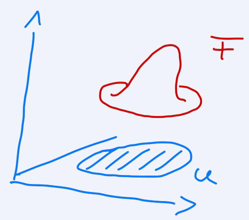
(ii) Man kann mit Hilfe des Transformationssatzes zeigen, dass die Definition des Oberflächenmaßes unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist.

Beispiel 10.11. (i) Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$F := \mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$$

ein k-dimensionales Flächenstück mit Parametrisierung

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}, \quad \varphi(x) = (x, f(x)).$$



Hier gilt (ohne Angabe des Arguments x)

$$D\varphi = \begin{pmatrix} E_k \\ Df \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$$

und somit mit dem Gradienten $\nabla f := (Df)^t \in \mathbb{R}^{k\times 1}$

$$g_\varphi = \det\left(\begin{pmatrix} E_k & \nabla f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k \\ (\nabla f)^t \end{pmatrix}\right) = \det(E_k + (\nabla f)(\nabla f)^t) = 1 + \|\nabla f\|_2^2.^a$$

Es folgt

$$\mathrm{vol}_k(F) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|_2^2}\ d\lambda^k(x).$$

(ii) Betrachten wir die obere Halbsphäre der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$

$$F := \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 = 1,\ y_3 > 0\}.$$

Diese ist Graph der Funktion

$$f : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \to F, \quad f(x) = \sqrt{1 - \|x\|_2^2}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$1 + \|\nabla f(x)\|_2^2 = \frac{1}{1 - \|x\|_2^2}$$

und somit unter Verwendung von Polarkoordinaten (vgl. Bsp. 10.8)

$$\mathrm{vol}_2(F) = \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}\ d\lambda^2(x) = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_{r=0}^1 = 2\pi.$$

Dies überrascht uns nicht, haben wir doch in der Schule gelernt, dass die Vollsphäre den Flächeninhalt 4π besitzt.

---

[a] Hierbei haben wir in der letzten Identität benutzt, dass Matrizen der Bauart $E_k + vv^t$ mit $v \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ nur die Eigenwerte 1 und $\|v\|_2^2 = v^t v$ besitzen und die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist.

11. Räume integrierbarer Funktionen

> **Stichpunkte.** $\mathcal{L}^p$-Halbnorm, $\mathcal{L}^p$-Räume, Hölder-Ungleichung, Minkowski-Ungleichung, Quotientenräume, L^p-Räume, Satz von Riesz-Fischer, Konvergenz im p-ten Mittel, Hilbertraum L^2, Rieszscher Darstellungssatz

Vereinbarung: In diesem Abschnitt bezeichnet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen festen Maßraum.

Unser erstes Ziel ist es, die Definition des Integrals auch auf komplexwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ auszudehnen. Dazu wissen wir bereits aus Korollar 8.16, dass f genau dann $\mathcal{A}$-messbar ist, wenn

$$\mathrm{Re}(f) : X \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(f) : X \to \mathbb{R}$$

beide $\mathcal{A}$-messbar sind. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 11.1. Die $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt μ**-integrierbar**, falls $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ beide μ-integrierbar sind. In diesem Fall setzen wir

$$\int f \, d\mu := \int \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int \mathrm{Im}(f) \, d\mu.$$

und

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbb{1}_A \, d\mu$$

für $A \in \mathcal{A}$.

Bemerkung 11.2. (i) Bis auf Teil (ii) c) (der dann keinen Sinn macht) bleiben alle Resultate von Satz 6.4 auch für komplexwertige Funktionen gültig. Dies folgt jeweils durch Betrachtung des Real- und Imaginärteiles von f und unter Verwendung der Abschätzung

$$|f| \leq |\mathrm{Re}(f)| + |\mathrm{Im}(f)| \leq 2\,|f|\,.$$

Nur für die Dreiecksungleichung muss man einen kleinen Trick verwenden: Man setzt $\lambda := \int f \, d\mu \in \mathbb{C}$ und hat $\lambda = |\lambda| e^{it}$ für ein $t \in [0, 2\pi)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &= |\lambda| = \mathrm{Re}(|\lambda|) = \mathrm{Re}(e^{-it}\lambda) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{-it} \int f \, d\mu \right) = \mathrm{Re}\left(\int e^{-it} f \, d\mu \right) \\ &= \int \mathrm{Re}(e^{-it} f) \, d\mu \leq \int |e^{-it} f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

(ii) Auch der Satz über die dominierte Konvergenz (Satz 6.5) und der Ausschöpfungssatz (Korollar 6.8) bleiben gültig.

Nun wollen wir die integrierbaren Funktionen im Kontext von Vektorräumen betrachten. Dazu sei

$$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

entweder der Körper der reellen oder der Körper der komplexen Zahlen. Für Funktionen $f, g : X \to \mathbb{K}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ sind dann $f + g$ und αf natürlich weiterhin punktweise definiert, d.h.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad (x \in X).$$

Da wir selbst im reellen Fall die Werte $\pm\infty$ nun nicht mehr zulassen, sind diese Ausdrücke stets definiert. Mit Satz 6.4 und Bemerkung 11.2 erhalten wir nun unmittelbar folgendes Resultat.

Proposition 11.3. Es sei

$$\mathcal{L}^1(X) := \mathcal{L}^1(X,\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} | \ f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

Dann gilt:

(i) $\mathcal{L}^1(X)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(ii) Das Integral

$$I : \mathcal{L}^1(X) \to \mathbb{K}, \quad I(f) := \int f \, d\mu$$

ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung.

Bemerkung 11.4. Wenn aus dem Kontext klar ist, über welches Maß man integriert und welche Werte die Funktionen annehmen dürfen, schreibt man meist nur $\mathcal{L}^1(X)$. Dies werden wir auch im Folgenden so handhaben. Die genaueren Schreibweisen werden je nach Bedarf verwendet, um Missverständnisse zu vermeiden.

Beispiel 11.5. Ist ν das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, so gilt

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{N},\nu) = l^1(\mathbb{N}) := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\},$$

vergleiche Beispiel 5.13 (ii).

In Analogie zu den $l^p(\mathbb{N})$-Räumen als Verallgemeinerung des Raumes $l^1(\mathbb{N})$ wollen wir nun auch noch $\mathcal{L}^p$-Räume integrierbarer Funktionen einführen und diese zugleich mit einer (wie wir später sehen werden) Norm versehen.

Definition 11.6. Es sei $p \in [1,\infty]$. Für eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ setzen wir

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)$$

(mit der Vereinbarung $\infty^{1/p} := \infty$) und

$$\|f\|_\infty := \inf\{C > 0 : |f| \le C \ \mu\text{-fast sicher}\}.$$

Ferner sei

$$\mathcal{L}^p(X) := \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

Auch hier schreiben wir manchmal $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^p(X,\mu,\mathbb{K})$, um Dinge zu verdeutlichen.

Bemerkung 11.7. (i) Man beachte, dass für $1 \le p < \infty$ die Funktion $X \ni x \mapsto |f(x)|^p \in [0,\infty)$, als Komposition der $\mathcal{A}$-messbaren Funktion f mit der stetigen Funktion $\mathbb{K} \ni z \mapsto |z|^p \in [0,\infty)$, ebenfalls $\mathcal{A}$-messbar ist.

(ii) Da f μ-integrierbar genau dann, wenn $\int |f| \; d\mu < \infty$, ist diese Definition von $\mathcal{L}^1(X)$ äquivalent zur ursprünglichen Definition in Proposition 11.3.

(iii) Funktionen $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ nennt man auch **μ-fast sicher beschränkt**, denn es gilt $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-fast sicher (Übung).

(iv) Im Falle eines **endlichen** Maßes μ sind die $\mathcal{L}^p$-Räume geschachtelt:

$$p_1 > p_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^\infty(X) \subseteq \mathcal{L}^{p_1}(X) \subseteq \mathcal{L}^{p_2}(X) \subseteq \mathcal{L}^1(X).$$

Für allgemeine Maßräume muss dies allerdings nicht mehr gelten (Übung). Übung

Unser nächstes Ziel ist es nun, zu zeigen, dass $\mathcal{L}^p(X)$ auch für $p \neq 1$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist und dass $\|.\|_p$ eine **Halbnorm** auf diesem Raum definiert, d.h. für alle $f,g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt

- $f = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p = 0,$
- $\|\alpha f\|_p = |a| \|f\|_p$ für $\alpha \in \mathbb{K}$,
- $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Die ersten beiden Eigenschaften sind klar, d.h. wir werden nur die dritte Eigenschaft, die Dreiecksungleichung, noch beweisen müssen.

Bemerkung 11.8. Dass es sich bei $\|.\|_p$ in der Regel nicht um eine Norm handelt, wissen wir übrigens auch schon, denn nach Proposition 5.28 (iii) gilt für $1 \le p < \infty$ die Äquivalenz

$$\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f|^p = 0 \ \mu\text{-fast sicher} \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ \mu\text{-fast sicher},$$

d.h. die Implikation $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ gilt im Allgemeinen nicht (für $p = \infty$ folgt $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-f.s. direkt aus der Definition). Um dieses Problem werden wir uns etwas später kümmern.

Satz 11.9. Es seien $p,q \in [1,\infty]$ sogenannte **konjugierte Exponenten**, d.h. es gelte

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

wobei $1/\infty := 0$.

(i) Es sei $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ und es gilt die **Hölder-Ungleichung**

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

(ii) Sind $f,g \in \mathcal{L}^p(X)$, so ist $f+g \in \mathcal{L}^p(X)$ und es gilt die **Minkowski-Ungleichung**

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^p(X)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|.\|_p$ eine Halbnorm auf diesem Raum.

Beweis. Wir betrachten nur den schwierigeren Fall $1 < p,q < \infty$.

(i) Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Es gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

In der Tat: Aus der Konvexität der Exponentialabbildung folgt

$$\begin{aligned} ab = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)} &= \exp\left(\frac{1}{p}(p\ln(a)) + \frac{1}{q}(q\ln(b))\right) \\ &\overset{\text{Konv.}}{\leq} \frac{1}{p}\exp(p\ln(a)) + \frac{1}{q}\exp(q\ln(b)) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zurück zum eigentlichen Beweis. Hier können wir $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$ annehmen. Zunächst folgt dann aus der Vorüberlegung, dass für alle $x \in X$

$$|(fg)(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q,$$

also auch

$$\int |(fg)(x)|\, d\mu \leq \frac{1}{p}\int |f(x)|^p\, d\mu + \frac{1}{q}\int |g(x)|^q\, d\mu < \infty,$$

d.h. $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ und $\|fg\|_1 \leq p^{-1}\|f\|_p^p + q^{-1}\|g\|_q^q$. Nun ersetzen wir in dieser Ungleichung f durch αf und g durch $\frac{1}{\alpha}g$ für ein noch zu wählendes $\alpha > 0$ und erhalten

$$\|fg\|_1 = \|(\alpha f)(\alpha^{-1}g)\|_1 \leq \frac{\alpha^p}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\alpha^q}\|g\|_q^q \quad (\alpha > 0).$$

Mit der Wahl $\alpha = \left(\|g\|_q\|f\|_p^{1-p}\right)^{1/p}$ folgt dann (nach einer kurzen Rechnung)

$$\alpha^p\|f\|_p^p = \frac{1}{\alpha^q}\|g\|_q^q = \|f\|_p\|g\|_q$$

und somit

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\|f\|_p\|g\|_q + \frac{1}{q}\|f\|_p\|g\|_q = (\frac{1}{p} + \frac{1}{q})\|f\|_p\|g\|_q = \|f\|_p\|g\|_q.$$

(ii) Um die Minkowski-Ungleichung zu zeigen, können wir $\|f+g\|_p > 0$ annehmen. Nun nutzen wir den zu p konjugierten Exponenten $q = \frac{p}{p-1} \in (1, \infty)$ und wenden die Hölder-Ungleichung an. Wegen $|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f| + |g|)|f+g|^{p-1}$ folgt

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p\, d\mu \leq \int |f||f+g|^{p-1}\, d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}\, d\mu \\ &\leq \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{1/q} + \left(\int |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{1/q} \\ &\overset{q(p-1)=p}{=} (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Wegen $1 = p - \frac{p}{q}$ folgt hieraus die Minkowski-Ungleichung, wenn wir beide Seiten mit $\|f+g\|_p^{-p/q}$ multiplizieren. □

Nun wollen wir aus den halbnormierten $\mathcal{L}^p$-Räumen normierte Räume machen, indem wir Funktionen, die μ-fast sicher übereinstimmen, identifizieren. Dies gelingt mittels der Quotientenraum-

Konstruktion aus der linearen Algebra, indem wir benutzen, dass

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(X) : \|f\|_p = 0\} = \{f \in \mathcal{L}^p(X) : f = 0 \ \mu\text{-fast sicher}\}$$

ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}^p(X)$ ist.

Erinnerung. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $N \subseteq V$ ein linearer Unterraum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V durch

$$v \sim w \quad :\Leftrightarrow \quad v - w \in N$$

und bezeichnen die Äquivalenzklasse zu $v \in V$ als $[v] = v + N$. Die Menge

$$V/N := \{[v] : v \in V\}$$

aller Äquivalenzklassen wird Quotienten- oder Faktorraum genannt. Ausgestattet mit der Addition bzw. Multiplikation

$$[v] + [w] = [v + w] \quad \text{bzw.} \quad a[v] = [av] \quad (a \in \mathbb{K})$$

wird der Quotientenraum selbst zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit neutralem Element $[0_V] = N$). Man beachte, dass diese Operationen wohldefiniert sind: Gilt zum Beispiel $[v] = [v']$, d.h. $v \sim v'$, und $[w] = [w']$, d.h. $w \sim w'$, so gilt $(v + w) - (v' + w') = (v - v') + (w - w') \in N$, d.h. auch $v + w \sim v' + w'$ und damit $[v + w] = [v' + w']$.

Definition 11.10. Für $p \in [1, \infty]$ sei der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$ mit Halbnorm $\|.\|_p$ wie oben definiert und

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(X) : \|f\|_p = 0\} = \{f \in \mathcal{L}^p(X) : f = 0 \ \mu\text{-fast sicher}\}.$$

Wir bezeichnen den zugehörigen Quotientenraum mit

$$L^p(X) := L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{N},$$

d.h. für $[f], [g] \in L^p(X)$ gilt $[f] = [g]$ genau dann, wenn $f = g$ μ-fast sicher.

Proposition 11.11. Auf dem Quotientenraum $L^p(X)$ wird durch

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p.$$

eine Norm definiert.

Beweis. Gilt $f \sim f'$, d.h. $f = f'$ μ-fast sicher, so auch $\|f\|_p = \|f'\|_p$, d.h. $\|[f]\|_p$ ist wohldefiniert. Die Normeigenschaften lassen sich nun leicht nachprüfen. Die Dreiecksungleichung folgt etwa aus der Minkowski-Ungleichung:

$$\|[f] + [g]\|_p = \|[f + g]\|_p = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|[f]\|_p + \|[g]\|_p .$$

□

Bemerkung 11.12. Es ist üblich, auch die Elemente von $L^p(X)$ mit dem Symbol f statt $[f]$ zu bezeichnen. Man muss sich aber stets darüber im Klaren sein, dass es sich eigentlich um eine Äquivalenzklasse von Funktionen handelt, die μ-fast sicher übereinstimmen. Zum Beispiel ist für $f \in L^p$ und $x \in X$ der Wert $f(x)$ nicht definiert (denn dieser Wert kann sich für verschiedene Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse unterscheiden). Allerdings macht es etwa Sinn zu sagen, dass $f(x) = 1$ für μ-fast alle $x \in X$, denn diese Eigenschaft gilt entweder für alle oder keinen Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse. Genauso kann man das Integral $\int f \, d\mu$ für $f \in L^p$ einfach als das Integral über einen Repräsentanten der zugehörigen Äquivalenzklasse definieren, denn verschiedene Repräsentanten führen zum gleichen Wert des Integrals.

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass die L^p-Räume vollständig, also Banachräume sind (d.h. jede Cauchy-Folge ist konvergent). Im Beweis verwenden wir ein elementares Resultat über normierte Räume.

Lemma 11.13. Es sei $(V, \|.\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann sind äquivalent:

(i) $(V, \|.\|)$ ist ein Banachraum.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe in V ist konvergent.

Den Beweis des Lemmas finden Sie im Anhang an dieses Kapitel.

Satz 11.14 (Satz von Riesz-Fischer)**.** Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(X)$ ein Banachraum.

Bemerkung 11.15. Würde man statt des Lebesgue-Integrals hier das Riemann-Integral zu Grunde legen, ginge die Vollständigkeit der $L^p(\mathbb{R})$-Räume übrigens verloren. Ein weiterer Grund, über das Riemann-Integral hinaus zu gehen.

Der Übersichtlichkeit halber unterscheiden wir im folgenden Beweis bei der Notation noch einmal zwischen Elementen aus L^p bzw. $\mathcal{L}^p$.

Beweis (des Satzes von Riesz-Fischer)**.** Wir beweisen nur den schwierigeren Fall $1 \leq p < \infty$: Sei $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(X)$ (d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathcal{L}^p(X)$). Wir setzen voraus, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n]$ in $L^p(X)$ absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|[f_n]\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p =: C < \infty.$$

Es sei $G_k := \sum_{n=1}^{k} |f_n|$ und $G := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Durch ($k$-malige) Anwendung der Minkowski-Ungleichung folgt dann

$$\|G_k\|_p \leq \sum_{n=1}^{k} \|f_n\|_p \leq C \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Da $G_k \nearrow G$ folgt somit aus monotoner Konvergenz

$$\|G\|_p^p = \int G^p \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int G_k^p \, d\mu \leq C^p < \infty,$$

d.h. $G \in \mathcal{L}^p(X)$. Insbesondere folgt aus Proposition 5.28, dass $G(x) < \infty$ für μ-fast alle $x \in X$. Da absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$ auch konvergieren, impliziert dies, dass auch

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

für μ-fast alle $x \in X$ existiert. Ist $A \in \mathcal{A}$ die Menge, für die dieser Grenzwert existiert, so setzen wir

$$F(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Dann ist F $\mathcal{A}$-messbar und $|F| \leq G$ auf X, d.h. mit G ist auch $F \in \mathcal{L}^p(X)$. Ferner gilt

$$|F - \sum_{n=1}^{k} f_n|^p \leq (|F| + \sum_{n=1}^{k} |f_n|)^p \leq (G + G)^p = 2^p G^p \in \mathcal{L}^1(X)$$

und
$$|F - \sum_{n=1}^{k} f_n|^p \overset{k\to\infty}{\to} 0 \quad \mu\text{-fast sicher.}$$
Mit dominierter Konvergenz folgt also
$$\int |F - \sum_{n=1}^{k} f_n|^p \, d\mu = \|F - \sum_{n=1}^{k} f_n\|_p^p \to 0 \quad (k \to \infty).$$
Gehen wir wieder zu den ensprechenden Äquivalenzklassen in $L^p(X)$ über, so bedeutet dies
$$\|[F] - \sum_{n=1}^{k} [f_n]\|_p \to 0 \quad (k \to \infty),$$
d.h. die in $L^p(X)$ absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} [f_n]$ ist in $L^p(X)$ auch konvergent. Aus Lemma 11.13 folgt damit die Vollständigkeit von $L^p(X)$.

□

Folgendes Korollar des Beweises des Satzes von Riesz-Fischer ist manchmal nützlich.

Korollar 11.16. Es sei $p \in [1, \infty]$. Ferner seien $g_k, g \in \mathcal{L}^p(X), k \in \mathbb{N}$, und es gelte $\|g_k - g\|_p \to 0$ für $k \to \infty$.[a] Dann existiert eine Teilfolge $(g_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $g_{k_n} \overset{n\to\infty}{\to} g$ μ-fast sicher.

[a] Man sagt in diesem Fall, dass $g_k \overset{k\to\infty}{\to} g$ im p-**ten Mittel** konvergiert.

Beweis. Wir betrachten wieder nur den Fall $1 \leq p < \infty$: Konstruiere die Teilfolge $(g_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv, so dass mit $g_0 := 0$
$$\|g_{k_n} - g_{k_{n-1}}\|_p \leq 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$$
und setze $f_n := (g_{k_n} - g_{k_{n-1}})$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$, d.h. wie im Beweis von Satz 11.14 sehen wir, dass eine Funktion $F \in \mathcal{L}^p(X)$ existiert, so dass
$$F = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n \ \mu\text{-fast sicher} \quad \text{und} \quad \|\sum_{n=1}^{N} f_n - F\|_p \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$
Aber $\sum_{n=1}^{N} f_n = g_{k_N}$, d.h.
$$\lim_{N\to\infty} g_{k_N} = F \ \mu\text{-fast sicher} \quad \text{und} \quad \|g_{k_N} - F\|_p \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$
Da nach Voraussetzung $\|g_{k_N} - g\| \to 0$, folgt $g = F$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Bevor wir uns dem Spezialfall des Raumes $L^2(X)$ zuwenden, wollen wir kurz der Frage nachgehen, welche Funktionen in den $\mathcal{L}^p$-Räumen überhaupt enthalten sind. Wir nennen dazu im Folgenden für eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $\varphi : X \to \mathbb{K}$ die Menge $\{\varphi \neq 0\} \in \mathcal{A}$ den **Träger** von φ. Ferner nennen wir φ in Verallgemeinerung von Definition 5.2 **einfach**, falls sie nur endlich viele Werte annimmt.

Satz 11.17. Es sei $p \in [1, \infty)$ und
$$S := \{\varphi : X \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ ist einfach und } \mu\left(\{\varphi \neq 0\}\right) < \infty\}$$
sei die Menge der **einfachen Funktionen mit Träger von endlichem Maß**. Dann ist $S \subseteq \mathcal{L}^p(X)$

dicht, d.h.

$$\forall f \in \mathcal{L}^p(X)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi \in S : \quad \|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

Bemerkung 11.18. 1. Gehen wir zu Äquivalenzklassen über, erhalten wir ein entsprechendes Dichtheitsresultat für $L^p(X)$. Auch hier wird in der Literatur oft nicht zwischen Funktion und Äquivalenzklasse unterschieden und man sagt oft einfach $S \subseteq L^p(X)$ ist dicht.

2. Im Falle $p = \infty$ liegen zwar die einfachen Funktionen dicht in $\mathcal{L}^\infty(X)$, im Allgemeinen aber nicht die einfachen Funktionen mit Träger von endlichem Maß (zum Beispiel kann die Funktion $x \mapsto 1$ aus $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ nicht durch solche approximiert werden).

3. Im Falle $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda^n)$ können stärkere Aussagen getroffen werden (z.B. sind stetige kompakt getragene Funktionen dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda^n), 1 \leq p < \infty$). Hierauf werden wir später noch einmal zurückkommen, siehe Korollar 13.19.

Beweis. Es sei $\varphi \in S$. Dann ist φ beschränkt, $|\varphi| \leq K$ für ein $K \geq 0$, und somit gilt

$$\int |\varphi|^p \, d\mu = \int_{\{\varphi \neq 0\}} |\varphi|^p \, d\mu \leq K^p \cdot \mu\left(\{\varphi \neq 0\}\right) < \infty.$$

Also ist $S \subseteq \mathcal{L}^p(X)$. Nun sei umgekehrt $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und zunächst $f \geq 0$. Dann existiert nach Proposition 5.4 eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_+(X, \mathcal{A})$ mit $\varphi_n \nearrow f$. Schreiben wir $\varphi_n = \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $a_k > 0$ und paarweise disjunkten $A_k \in \mathcal{A}$, so gilt ferner

$$\sum_{k=1}^m a_k^p \mu(A_k) = \int \varphi_n^p \, d\mu \leq \int f^p \, d\mu < \infty.$$

Dies zeigt $\mu\left(\{\varphi_n \neq 0\}\right) = \mu(\cup_k A_k) < \infty$, d.h. $\varphi_n \in S \subseteq \mathcal{L}^p(X)$. Schließlich gilt

$$|\varphi_n - f|^p = (f - \varphi_n)^p \leq f^p$$

und f^p ist μ-integrabel, d.h. mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\|\varphi_n - f\|_p \to 0.$$

Für ein allgemeines $f \in \mathcal{L}^p(X)$ wende man das schon Bewiesene auf $\mathrm{Re}(f)_\pm$ und $\mathrm{Im}(f)_\pm$ an.

□

Wir wollen als nächstes zeigen, dass der Raum $L^2(X)$ ein Hilbertraum ist.

Erinnerung. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{K}, \quad (v, w) \mapsto (v|w)$$

heißt **Skalarprodukt**, falls für $u, v, w \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ Folgendes gilt:

(i) $(au + bv|w) = a(u|w) + b(v|w)$,

(ii) $\overline{(v|w)} = (w|v)$ (d.h. $(v|w) = (w|v)$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$),

(iii) $(v, v) \geq 0$ und $(v, v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

Das Paar $(V, (.|.))$ heißt ein **Prä-Hilbertraum**. Jedes Skalarprodukt auf V induziert durch

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}, \quad v \in V,$$

eine Norm auf V. Die Dreiecksungleichung für diese Norm folgt dabei aus der **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|(u|v)| \leq \|u\|\|v\|, \quad u,v \in V.$$

Man nennt $(V, (.|.))$ einen Hilbertraum, falls der so normierte Raum vollständig ist.

Im Folgenden schreiben wir $f \in L^2(X)$ statt $[f] \in L^2(X)$, siehe Bemerkung 11.12.

Satz 11.19. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $L^2(X, \mu)$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(f|g) := \int f\overline{g}\, d\mu$$

ist ein Hilbertraum.

Bemerkung 11.20. Wenn wir dies genauer, aber auch unschöner, mit Äquivalenzklassen formulieren, müsste es heißen: Die Abbildung

$$L^2(X) \times L^2(X) \ni ([f], [g]) \mapsto ([f] \mid [g]) := \int f\overline{g}\, d\mu \in \mathbb{K}$$

ist wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten f, g) und ein Skalarprodukt. Die erste Behauptung ist aber klar, denn gilt μ-fast sicher, dass $f = f^*$ und $g = g^*$, so gilt auch $f\overline{g} = f^*\overline{g^*}$ μ-fast sicher.

Beweis. Dass $f\overline{g} \in L^1(X)$ für $f, g \in L^2(X)$, das Integral also definiert ist, folgt aus der Hölder-Ungleichung. Die drei Eigenschaften eines Skalarprodukts sind leicht zu überprüfen. So folgt (i) aus der Linearität des Integrals, (ii) folgt aus

$$\overline{\int h\, d\mu} = \int \overline{h}\, d\mu$$

und (iii) folgt wegen $(f|f) = \|f\|_2^2$. Insbesondere ist $L^2(X)$ mit der induzierten Norm $\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \|f\|_2$ also nach dem Satz von Riesz-Fischer auch vollständig. □

Bemerkung 11.21. Man beachte, dass im Falle des Hilbertraums $L^2(X)$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(f|g)| \leq \|f\|\|g\|$$

nichts anderes als die Hölder-Ungleichung für den Fall $p = q = 2$ ist.

Zum Schluss wollen wir noch einen Blick auf die Gestalt der stetigen linearen Funktionale auf $L^2(X)$ werfen. Hierzu benötigen wir folgendes abstraktes Resultat.

Satz 11.22 (Rieszscher Darstellungssatz). Sei $(V, (.|.))$ ein Hilbertraum.

(i) Ist $u \in V$, so ist die Abbildung

$$\Phi_u : V \ni v \mapsto (v|u) \in \mathbb{K}$$

linear und stetig.

(ii) Ist umgekehrt $\Phi : V \to \mathbb{K}$ linear und stetig, so existiert ein eindeutiges $u \in V$, so dass

$\Phi = \Phi_u$, d.h.

$$\Phi(v) = (v|u)$$

für alle $v \in V$.

Teil (i) folgt sofort aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\Phi_u(v) - \Phi_u(v')\right| = \left|(v|u) - (v'|u)\right| = \left|(v - v'|u)\right| \leq \left\|v - v'\right\| \|u\| .$$

Den Beweis von Teil (ii) finden Sie im Anhang zu diesem Kapitel.

Für den Spezialfall $V = L^2(X)$ erhalten wir somit folgende Version des Darstellungssatzes von Riesz.

Korollar 11.23 (Rieszscher Darstellungssatz für L^2). Sei $\Phi : L^2(X) \to \mathbb{K}$ stetig und linear. Dann existiert ein eindeutiges $g \in L^2(X)$, so dass für alle $f \in L^2(X)$

$$\Phi(f) = \int f\overline{g}\, d\mu.$$

Bemerkung 11.24. Wir werden im nächsten Abschnitt eine Folgerung dieses Korollars für Funktionen aus $\mathcal{L}^2(X)$ (statt Äquivalenzklassen aus $L^2(X)$) verwenden: Ist $\varphi : \mathcal{L}^2(X) \to \mathbb{K}$ linear und beschränkt, d.h. es existiert $K \geq 0$ mit

$$(\star) \qquad |\varphi(f)| \leq K \|f\|_2$$

für alle Funktionen $f \in \mathcal{L}^2(X)$, so existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}^2(X)$ (die bis auf Änderungen auf Nullmengen eindeutig ist), so dass

$$\varphi(f) = \int f\overline{g}\, d\mu, \qquad f \in \mathcal{L}^2(X).$$

Dies folgt unmittelbar, wenn wir das Korollar auf die wegen $(\star)$ wohldefinierte und stetige lineare Abbildung

$$\Phi : L^2(X) \to \mathbb{K}, \quad \Phi([f]) := \varphi(f)$$

anwenden.

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Beweis von Lemma 11.13). $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine absolut konvergente Reihe in V. Dann ist $\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Da für $n > m$ gilt

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = \left|\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|\right|,$$

ist damit $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V und daher aufgrund der Vollständigkeit von V konvergent.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V. Durch Wahl von $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots$ im Cauchy-Folgen-Kriterium lässt sich induktiv eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren, so dass

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (k \in \mathbb{N}),$$

d.h. die Teleskopreihe $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium absolut. Aber dann ist diese

Reihe nach Voraussetzung auch konvergent, d.h.

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=\lim_{m\to\infty}(x_{n_{m+1}}-x_{n_1})=\Big(\lim_{m\to\infty}x_{n_{m+1}}\Big)-x_{n_1}$$

existiert. Also ist die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Aber jede Cauchy-Folge mit konvergenter Teilfolge muss selbst konvergieren (Zeigen Sie dies!). Also ist V vollständig.

Zusatz (Beweis von Satz 11.22, Teil (ii)). **1. vorbereitender Schritt:** $U\subseteq V$ sei ein abgeschlossener Unterraum. Ferner sei

$$U^\perp:=\{v\in V:\ (v|u)=0 \text{ für alle } u\in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von U. Dann ist klar, dass auch $U^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von V ist. Wir zeigen nun, dass

$$V=U\oplus U^\perp,$$

d.h. $V=U+U^\perp$ und $U\cap U^\perp=\{0\}$.

Die letzte Aussage ist klar, denn ist $v\in U^\perp$, so gilt für alle $u\in U$, dass $(v|u)=0$. Gilt auch $v\in U$, so können wir $u=v$ wählen und erhalten $(v|v)=\|v\|^2=0$ also $v=0$.

Jetzt sei $x\in V$ beliebig und $\delta:=\inf\{\|x-u\|:u\in U\}$. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus U, so dass $\|x-u_n\|\to\delta$. Nun gilt in jedem Vektorraum mit Skalarprodukt die **Parallelogrammgleichung**, d.h.

$$2(\|a\|^2+\|b\|^2)=\|a-b\|^2+\|a+b\|^2,\qquad (a,b\in V).$$

Wenden wir dies an mit $a=u_n-x, b=u_m-x$, so folgt

$$2(\|u_n-x\|^2+\|u_m-x\|^2)=\|u_n-u_m\|^2+\|u_n+u_m-2x\|^2,\qquad n,m\in\mathbb{N}.$$

Da $\frac{1}{2}(u_n+u_m)\in U$, folgt hieraus

$$\begin{aligned}\|u_n-u_m\|^2&=2\|u_n-x\|^2+2\|u_m-x\|^2-4\left\|\frac{1}{2}(u_n+u_m)-x\right\|^2\\&\le 2\|u_n-x\|^2+2\|u_m-x\|^2-4\delta^2.\end{aligned}$$

Hier geht die rechte Seite (wegen $\|u_n-x\|\to\delta$) für $n,m\to\infty$ gegen 0, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, die im vollständigen Raum V konvergieren muss. Wir setzen

$$u_0:=\lim_{n\to\infty}u_n.$$

Da U abgeschlossen ist und $u_n\in U, n\in\mathbb{N}$, gilt, ist auch $u_0\in U$. Nun sei $v_0:=x-u_0$, so dass

$$x=u_0+v_0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $v_0\in U^\perp$ gilt. Dazu betrachten wir für ein beliebiges $u\in U$ und ein noch zu wählendes $\alpha\in\mathbb{K}$ die Funktion

$$f:[0,\infty)\to[0,\infty),\quad f(t)=\|v_0+t\alpha u\|^2.$$

Nach Definition von u_0 und δ hat diese Funktion ein Minimum in $t=0$ (nämlich δ^2), denn

$$v_0+t\alpha u=x-(u_0-t\alpha u)\quad\text{und}\quad u_0-t\alpha u\in U.$$

Also muss auch $f'(0)=0$ gelten. Da

$$f(t)=(v_0+t\alpha u|v_0+t\alpha u)=\|v_0\|^2+t^2|\alpha|^2\|u\|^2+t\left((\alpha u|v_0)+(v_0|\alpha u)\right)=\|v_0\|^2+t^2|\alpha|^2\|u\|^2+2t\,\mathrm{Re}(\alpha\,(u|v_0)),$$

gilt also

$$f'(0)=2\,\mathrm{Re}(\alpha\,(u|v_0))=0.$$

Nun wählen wir $\alpha=\overline{(u|v_0)}$ und sehen, dass

$$|(u|v_0)|^2=0$$

gilt, d.h. $(u|v_0)=0$. Da $u\in U$ hier beliebig war, folgt $v_0\in U^\perp$.

2. Schritt: Eindeutigkeit

Für $u,u'\in V$ gelte

$$\Phi(v)=(v|u)=(v|u')$$

für alle $v \in V$. Dann folgt auch $(v|u-u')=0$ für alle $v \in V$. Für die Wahl $v = u - u'$ folgt

$$(u-u'|u-u') = \|u-u'\|^2 = 0 \quad \text{also auch} \quad u-u'=0 \quad \text{bzw.} \quad u=u'.$$

3. Schritt: Existenz

Ist $\Phi = 0$ die Nullabbildung, so können wir $u = 0$ wählen. Nun sei $\Phi \neq 0$ und

$$U := \operatorname{Kern}(\Phi) := \Phi^{-1}(\{0\}).$$

Aufgrund der Linearität von Φ ist dies ein Unterraum von V und aufgrund der Stetigkeit von Φ ist dieser abgeschlossen. Nach Schritt 1 gilt also $V = U \oplus U^{\perp}$. Wäre $U^{\perp} = \{0\}$, so müsste $V = U$, d.h. $\Phi = 0$ gelten. Da wir annehmen, dass dies nicht der Fall ist, existiert also $0 \neq w' \in U^{\perp}$ (für das dann $w' \notin U$ also $\Phi(w') \neq 0$ gilt). Für $w := \frac{1}{\Phi(w')} \cdot w' \in U^{\perp}$ gilt damit aufgrund der Linearität $\Phi(w) = 1$. Ferner folgt $v - \Phi(v)w \in U$ für alle $v \in V$, denn

$$\Phi\left(v - \Phi(v)w\right) = \Phi(v) - \Phi(v)\Phi(w) = \Phi(v) - \Phi(v) = 0.$$

Da $w \in U^{\perp}$ folgt somit mit der Wahl $u := \frac{1}{\|w\|^2} \cdot w$ für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned}
(v|u) &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot (v|w) \\
&= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \left(\underbrace{(v - \Phi(v)w|w)}_{=0} + (\Phi(v)w|w) \right) \\
&= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \left(\Phi(v) \|w\|^2 \right) = \Phi(v).
\end{aligned}$$

12. Maße mit Dichten

Stichpunkte. Absolut stetige Maße, singuläre Maße, Lebesgue-Zerlegung, Satz von Radon-Nikodym

In diesem Abschnitt wollen wir noch einmal einen genaueren Blick auf Maße mit Dichten werfen. Dazu sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν sei ein weiteres Maß auf $(X, \mathcal{A})$, das eine Dichte bezüglich μ besitze (vergleiche Korollar 5.20). Dies hieß gerade, dass eine Funktion $h \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ existiert, so dass

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Unsere Kurzschreibweise hierfür war

$$\nu = h \cdot \mu \quad \text{bzw.} \quad d\nu = h \, d\mu.$$

Letztere Schreibweise lag nahe, da

$$\int f \, d\nu = \int fh \, d\mu$$

für alle $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$.

Bemerkung 12.1. (i) Auch über die Eindeutigkeit von Dichten haben wir schon gesprochen. Gilt

$$\nu = h \cdot \mu = h' \cdot \mu$$

für $h, h' \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und ist ν σ-endlich, so gilt $h = h'$ μ-fast sicher. Dies haben wir in einer Übungsaufgabe gezeigt. Mit einem ganz ähnlichen Beweis kann man auch zeigen, dass die gleiche Aussage gilt, wenn das Maß μ σ-endlich ist. Übung

(ii) Sind $g, h \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$, so folgt durch zweimalige Anwendung von Korollar 5.20, dass

$$g \cdot (h \cdot \mu) = (gh) \cdot \mu$$

Im Folgenden soll es nun um die Frage gehen, welche Maße überhaupt eine Dichte besitzen. Hierzu machen wir folgende Beobachtung.

Lemma 12.2. Seien μ und ν zwei Maße auf $(X, \mathcal{A})$ und es gelte $\nu = h \cdot \mu$ für ein $h \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann ist jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Proposition 5.24. Alternativ kann man auch argumentieren, dass für $\mu(A) = 0$ die Funktion $\mathbb{1}_A h$ μ-fast sicher gleich 0 ist und daher

$$\nu(A) = \int \mathbb{1}_A h \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

□

Maße mit der hier beobachteten Eigenschaft bekommen eine spezielle Bezeichnung.

Definition 12.3. Es seien μ, ν zwei Maße auf $(X, \mathcal{A})$.

(i) Man nennt ν **absolut stetig bezüglich** μ und schreibt $\nu \ll \mu$, falls jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

(ii) Man nennt μ und ν **(gegenseitig) singulär** und schreibt $\mu \perp \nu$, falls eine messbare Menge $A_0 \in \mathcal{A}$ existiert, so dass

$$\mu(A_0) = \nu(A_0^c) = 0.$$

Bemerkung 12.4. (i) Sind μ und ν singulär, so nimmt ν also höchsten auf Teilmengen von A_0 positive Werte an und μ höchstens auf Teilmengen von A_0^c. Die Maße „leben“ sozusagen auf disjunkten Teilmengen von X.

(ii) Ist $A_0 \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar und $\nu = \sum_{a \in A_0} \delta_a$ eine Summe von Dirac-Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, so sind ν und das Lebesgue-Maß λ singulär.

(iii) Gilt $\nu \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, so ist $\nu = 0$ das Nullmaß.

Beweis: Sei $A_0 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_0) = \nu(A_0^c) = 0$. Dann kann man argumentieren

$$\mu(A_0) = 0 \quad \stackrel{\nu \ll \mu}{\Rightarrow} \quad \nu(A_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(X) = \nu(A_0) + \nu(A_0^c) = 0.$$

Lemma 12.2 zeigt also, dass ν absolut stetig bezüglich μ ist, falls ν eine Dichte bezüglich μ besitzt. Wir wollen nun zeigen, dass hiervon auch die Umkehrung gilt, d.h.

$$\nu \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \nu \text{ besitzt eine Dichte bezüglich } \mu.$$

Dies wird eine Folgerung des nachfolgenden Satzes sein, der von eigenem Interesse ist.

Satz 12.5. Seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann existieren $h \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ und σ-endliche Maße ν_a und ν_s auf $(X, \mathcal{A})$, so dass Folgendes gilt:

(i) $\nu_a = h \cdot \mu$,

(ii) $\nu_s \perp \mu$,

(iii) $\nu = \nu_a + \nu_s$ und diese Zerlegung von ν in einen absolut stetigen und einen singulären Anteil bezüglich μ ist eindeutig.

Man nennt die Zerlegung von ν in Teil (iii) die **Lebesgue-Zerlegung** von ν bezüglich μ.

Bevor wir uns den Beweis dieses Satzes ansehen, wollen wir zeigen, dass er tatsächlich die gewünschte Charakterisierung von Maßen mit Dichten zur Folge hat.

Satz 12.6 (Satz von Radon-Nikodym)**.** Es seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann sind äquivalent:

(i) Es existiert $h \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ mit $\nu = h \cdot \mu$.

(ii) $\nu \ll \mu$.

Beweis. Nur $(ii) \Rightarrow (i)$ ist noch zu zeigen. Dazu sei $\nu \ll \mu$. Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, so folgt also unter Verwendung der Lebesgue-Zerlegung von ν auch $0 = \nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A)$. Insbesondere zeigt dies $\nu_s(A) = 0$, d.h. auch ν_s ist absolut stetig bezüglich μ. Aber dann gilt $\nu_s \ll \mu$ und

$\nu_s \perp \mu$, d.h. Bemerkung 12.4 (iii) zeigt, dass $\nu_s = 0$ und somit $\nu = \nu_a$ gelten muss. Mit der Notation von Satz 12.5 folgt also $\nu = \nu_a = h \cdot \mu$ für ein $h \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. □

Nun kommen wir zum Beweis von Satz 12.5.

Beweis (von Satz 12.5). Wir betrachten den Beweis nur für den Fall, dass μ und ν beide endlich sind. Den Beweis des allgemeinen Falles finden Sie im Anhang an dieses Kapitel.

(a) Existenz der Lebesgue-Zerlegung:

Es sei

$$\rho := \mu + \nu.$$

Auch dies ist dann ein endliches Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und es gilt $\mu \ll \rho$ und $\nu \ll \rho$.

1. Schritt: Für $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \rho) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(f \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \text{ und } f \in \mathcal{L}^1(X, \nu)\Big)$$

und in diesem Fall ist

$$(\star) \qquad \int f \, d\rho = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu.$$

Beweis: Die Gleichung $(\star)$ gilt offensichtlich für eine messbare charakteristische Funktion $f = \mathbb{1}_A$ und folgt dann für $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ mit dem Standardbeweisprinzip der Integrationstheorie. Betrachten wir $|f|$ bzw. $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$, so sehen wir schließlich auch, dass die obige Äquivalenz gilt und dass $(\star)$ auch für $f \in \mathcal{L}^1(X, \rho)$ gültig bleibt.

2. Schritt: Es existiert ein $g \in \mathcal{L}^2(X, \rho)$, so dass

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\rho = \int fg \, d\mu + \int fg \, d\nu$$

für alle $f \in \mathcal{L}^2(X, \rho)$.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{L}^2(X, \rho)$. Wir schreiben $\|f\|_{2,\rho}$ für die zugehörige Halbnorm. Dann folgt aus $(\star)$ und der Hölder-Ungleichung (dies war auch eine Übungsaufgabe), dass Übung

$$\int |f| \, d\nu \leq \int |f| \, d\rho = \|f\|_{1,\rho} \leq (\rho(X))^{\frac{1}{2}} \, \|f\|_{2,\rho} < \infty,$$

d.h. $\mathcal{L}^2(X, \rho) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \nu)$. Dies zeigt, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{L}^2(X, \rho) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int f \, d\nu$$

definiert ist. Offensichtlich ist φ auch linear und wegen obiger Abschätzung gilt

$$|\varphi(f)| \leq \int |f| \, d\rho \leq (\rho(X))^{\frac{1}{2}} \, \|f\|_{2,\rho}, \qquad f \in \mathcal{L}^2(X, \rho),$$

d.h. φ ist beschränkt. Wir können also die Folgerung des Rieszschen Darstellungssatzes aus Bemerkung 11.24 anwenden, d.h. es existiert ein $g \in \mathcal{L}^2(X, \rho)$, so dass

$$\int f \, d\nu = \varphi(f) \overset{11.24}{=} \int fg \, d\rho, \qquad f \in \mathcal{L}^2(X, \rho).$$

Dies ist die erste zu beweisende Gleichung und die zweite folgt aus Schritt 1.

3. Schritt: Es gilt
$$\int f(1-g)\,d\nu = \int fg\,d\mu, \qquad f \in \mathcal{L}^2(X,\rho).$$

Beweis: Folgt sofort aus Schritt 2, da die beteiligten Integrale endlich sind.

4. Schritt: Für
$$A := \{0 \le g < 1\}, \quad h := \mathbb{1}_A \frac{g}{1-g} \quad \text{und} \quad \nu_a := \mathbb{1}_A \cdot \nu$$
gilt Teil (i), d.h. $\nu_a = h \cdot \mu$.

Beweis: Ist $E \in \mathcal{A}$ beliebig, so ist $f = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_E \in \mathcal{L}^2(X,\rho)$, da ρ endlich ist, d.h. wir erhalten aus Schritt 3, dass
$$\int_E \mathbb{1}_A(1-g)\,d\nu = \int \mathbb{1}_E \mathbb{1}_A (1-g)\,d\nu = \int \mathbb{1}_E \mathbb{1}_A g\,d\mu = \int_E \mathbb{1}_A g\,d\mu.$$
Dies zeigt, dass die folgenden Maße übereinstimmen:
$$\mathbb{1}_A(1-g)\cdot\nu = \mathbb{1}_A g \cdot \mu.$$
Multiplizieren wir beide Seiten mit $\mathbb{1}_A \frac{1}{1-g} \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ und nutzen wir Bemerkung 12.1 (ii), so folgt hieraus
$$\nu_a = \mathbb{1}_A \cdot \nu = \mathbb{1}_A \frac{g}{1-g} \cdot \mu = h \cdot \mu.$$

5. und letzter Schritt: Mit
$$\nu_s := \mathbb{1}_{A^c} \cdot \nu$$
gelten auch die Teile (ii) und (iii).

Beweis: Aus der Definition von ν_a und ν_s folgt $\nu = \nu_a + \nu_s$, d.h. Teil (iii). Offensichtlich gilt auch $\nu_s(A) = 0$, d.h. Teil (ii) folgt, wenn wir $\mu(A^c) = 0$ zeigen können. Hierzu wenden wir Schritt 2 auf $f = \mathbb{1}_{\{g<0\}}$ an und erhalten
$$0 \le \int \mathbb{1}_{\{g<0\}}\,d\nu = \int \mathbb{1}_{\{g<0\}} g\,d\rho \le 0,$$
also
$$\int \mathbb{1}_{\{g<0\}} g\,d\rho = 0.$$
Dies impliziert $g\mathbb{1}_{\{g<0\}} = 0$ ρ-fast sicher, also (wegen $\mu \ll \rho$) auch μ-fast sicher. Dies zeigt
$$\mu(\{g<0\}) = 0.$$
Auf analoge Weise erhalten wir aus Schritt 3, angewandt auf $f = \mathbb{1}_{\{g\ge 1\}}$, dass
$$0 \le \mu(\{g \ge 1\}) \le \int \mathbb{1}_{\{g\ge1\}} g\,d\mu = \int \mathbb{1}_{\{g\ge1\}}(1-g)\,d\nu \le 0,$$
d.h. $\mu(\{g \ge 1\}) = 0$. Insgesamt folgt
$$\mu(A^c) = \mu(\{g<0\}) + \mu(\{g\ge1\}) = 0.$$

(b) Eindeutigkeit der Lebesgue-Zerlegung: Es sei
$$\nu = \nu'_a + \nu'_s$$

eine weitere Lebesgue-Zerlegung von ν und $A_0 \in \mathcal{A}$ sei so gewählt, dass $\nu_s'(A_0) = \mu(A_0^c) = 0$. Dann gilt auch

$$\nu_a(A_0^c) = \nu_a'(A_0^c) = 0,$$

da beide Maße absolut stetig bezüglich μ sind. Für $E \in \mathcal{A}$ folgt hieraus wegen

$$\nu_s'(E \cap A_0) = \nu_a'(E \cap A_0^c) = \nu_a(E \cap A_0^c) = 0,$$

dass

$$\begin{aligned}\nu_s'(E) &= \nu_s'(E \cap A_0) + \nu_s'(E \cap A_0^c) = \nu_s'(E \cap A_0^c)\\ &= \nu_s'(E \cap A_0^c) + \nu_a'(E \cap A_0^c) = \nu(E \cap A_0^c)\\ &= \nu_a(E \cap A_0^c) + \nu_s(E \cap A_0^c) = \nu_s(E \cap A_0^c) \le \nu_s(E).\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung mit vertauschten Rollen von ν_s' und ν_s zeigt auch $\nu_s \le \nu_s'$, d.h. insgesamt folgt $\nu_s = \nu_s'$. Dies hat dann wegen $\nu = \nu_a + \nu_s$ auch $\nu_a = \nu_a'$ zur Folge. □

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Beweis von Satz 12.5 im σ-endlichen Fall). Es sei

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$$

für messbare $E_n, F_k \in \mathcal{A}$ mit

$$\mu(E_n) < \infty \quad \text{und} \quad \nu(F_k) < \infty \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Mit dem üblichen Trick können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ und $F_k \subseteq F_{k+1}$ für $n,k \in \mathbb{N}$. Nun sei

$$G_n := E_n \cap F_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt auch $G_n \subseteq G_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Ferner ist $\mu(G_n) < \infty$ und $\nu(G_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch die Maße

$$\nu_n := \mathbb{1}_{G_n \setminus G_{n-1}} \cdot \nu \quad \text{und} \quad \mu_n := \mathbb{1}_{G_n \setminus G_{n-1}} \cdot \mu$$

sind dann endlich (hier setzen wir $G_0 := \emptyset$). Ferner gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n = \nu \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n = \mu.$$

Wenden wir das schon Bewiesene auf μ_n und ν_n an, so existiert $h_n \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, so dass

$$\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s},$$

wobei $\nu_{n,a} := h_n \cdot \mu_n$ und $\nu_{n,s} \perp \mu_n$. Es folgt

$$\begin{aligned}\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,a}\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,s}\right)\\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \cdot \mu_n\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,s}\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \mathbb{1}_{G_n \setminus G_{n-1}}\right) \cdot \mu + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,s}\right).\end{aligned}$$

Setzen wir

$$h := \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \mathbb{1}_{G_n \setminus G_{n-1}}, \quad \nu_a := h \cdot \mu \quad \text{und} \quad \nu_s := \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n,s},$$

so folgt die Behauptung.

13. Konstruktion und Regularität von Maßen

Stichpunkte. Halbringe, Prämaße, Fortsetzungssatz von Carathéodory, Lebesgue-Stieltjes-Maß, äußere Maße, Regularität, Dichtheit stetiger Funktionen in $\mathcal{L}^p$.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion des 1-dimensionalen Lebesgue-Maßes. Dieses soll dadurch charakterisiert sein, dass es den halboffenen Intervallen

$$\mathcal{H}_1 := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

ihre Länge zuordnet, d.h.

$$\lambda((a,b]) = b - a.$$

Wir werden daher zunächst die **Längenfunktion**

$$l : \mathcal{H}_1 \to [0,\infty], \quad l((a,b]) := b - a$$

untersuchen. Die Frage ist, ob wir diese zu einem Maß auf $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{H}_1)$ erweitern können. Dazu betrachten wir zunächst die Struktur des Mengensystems $\mathcal{H}_1$.

Lemma 13.1. Für $\mathcal{H}_1$ wie oben gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{H}_1$.

(ii) Sind $I, J \in \mathcal{H}_1$, so auch $I \cap J$.

(iii) Sind $I, J \in \mathcal{H}_1$, so existieren disjunkte $I_1, I_2 \in \mathcal{H}_1$ mit $J \setminus I = I_1 \cup I_2$.

Beweis. (i) $\emptyset = (a,a]$.

(ii) $(a,b] \cap (c,d] = (\max(a,c), \min(b,d)]$ (dies kann auch die leere Menge sein).

(iii) Man rechnet nach, dass $(a,b] \setminus (c,d] = (a, \min(b,c)] \cup (\max(a,d), b]$ (wobei die letzte Vereinigung disjunkt ist und erneut leere Mengen beinhalten kann). □

Mengensysteme mit diesen drei Eigenschaften bekommen eine spezielle Bezeichung.

Definition 13.2. Es sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{H}$ auf X heißt **Halbring auf** X, falls Folgendes gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{H}$

(ii) Sind $A, B \in \mathcal{H}$, so ist $A \cap B \in \mathcal{H}$.

(iii) Sind $A, B \in \mathcal{H}$, so ex. $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$ mit $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k$.

Bemerkung 13.3. Das Mengensystem $\mathcal{H}_1$ ist also ein Halbring auf $\mathbb{R}$. Man beachte, dass dieser nicht stabil unter Vereinigungen ist!

Auch die Längenfunktion $l : \mathcal{H}_1 \to [0,\infty]$ hat einige spezielle Eigenschaften. Wie wir später sehen werden, handelt es sich um ein sogenanntes Prämaß.

Definition 13.4. Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring auf X. Dann heißt $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ ein **Prämaß auf $\mathcal{H}$**, falls Folgendes gilt:

(i) $\nu(\emptyset) = 0$ **(Nulltreue)**

(ii) Für jede disjunkte Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \quad (\sigma\text{-}\textbf{Additivität})$$

Gilt statt (ii) nur die folgende schwächere Eigenschaft (ii'), so heißt ν ein **Inhalt auf $\mathcal{H}$**.

(ii') Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt, so gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \nu(A_n) \quad (\textbf{Additivität})$$

Ein Prämaß ist also σ-additiv wann immer es „Sinn macht" davon zu sprechen, d.h. wenn für die disjunkte Mengen folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Vereinigung $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\mathcal{H}$ liegt. Genauso für Inhalte, die additiv sind, wann immer davon sinnvoll gesprochen werden kann. Selbstverständlich ist jedes Maß auf einer σ-Algebra dort auch ein Prämaß und jedes Prämaß auf einem Halbring ist auch ein Inhalt.

Wenn wir zunächst ohne Beweis akzeptieren, dass die Längenfunktion $l : \mathcal{H}_1 \to [0, \infty]$ ein Prämaß ist, geht es nun um die Frage, ob sich Prämaße stets zu einem Maß erweitern lassen. Dies ist in der Tat der Fall.

Satz 13.5 (Fortsetzungssatz von Carathéodory). Es sei $\mathcal{H}$ ein Halbring auf X und $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ sei ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Ferner sei ν σ-endlich auf $\mathcal{H}$, d.h. es existiert eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{und} \quad \nu(E_n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann existiert genau ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{H})$, das ν fortsetzt, d.h. es gilt $\mu|_{\mathcal{H}} = \nu$.

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage folgt sofort aus dem allgemeinen Maßeindeutigkeitssatz 7.11. Den Beweis der Existenzaussage verschieben wir auf später (siehe Satz 13.14 (b)). □

Bemerkung 13.6. Wie wir sehen werden, existiert auch ohne die vorausgesetzte σ-Endlichkeit von ν eine Fortsetzung von ν zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{H})$. Diese muss aber dann nicht eindeutig sein.

Nun sind also zwei Dinge zu tun: Wir müssen den Beweis des Fortsetzungssatzes komplettieren und wir müssen zeigen, dass es sich bei der Längenfunktion tatsächlich um ein Prämaß handelt. Als Vorbereitung für beide Punkte wollen wir zunächst weitere Informationen über allgemeine Inhalte und Prämaße bereitstellen.

Lemma 13.7. Es sei $\mathcal{H}$ ein Halbring auf X und $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ sei ein Inhalt. Ferner sei $A \in \mathcal{H}$.

(i) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt und gilt $\cup_{j=1}^n A_j \subseteq A$, so folgt

$$\sum_{j=1}^n \nu(A_j) \leq \nu(A).$$

Insbesondere ist ν auch isoton.

(ii) Sind $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{H}$ mit $A \subseteq \cup_{n=1}^m E_n$, so gilt

$$\nu(A) \leq \sum_{n=1}^m \nu(E_n).$$

(iii) Ist ν sogar ein Prämaß und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, so gilt

$$\nu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n).$$

Beweis. Den Beweis des Lemmas finden Sie im Anhang zu diesem Kapitel. □

Nun wollen wir zeigen, dass die Längenfunktion l ein Prämaß ist. Da es nicht aufwendiger ist, betrachten wir sogar einen etwas allgemeineren Sachverhalt. Dazu sei daran erinnert, dass für eine monoton wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die rechts- und linksseitigen Grenzwerte

$$F(x+) := \lim_{y \searrow x} F(y) \quad \text{und} \quad F(x-) := \lim_{y \nearrow x} F(y), \quad x \in \mathbb{R},$$

existieren. Gilt $F(x+) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so heißt F **rechtsseitig stetig**.

Proposition 13.8. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig. Dann ist

$$\nu : \mathcal{H}_1 \to [0, \infty], \quad \nu((a, b]) := F(b) - F(a)$$

ein Prämaß auf $\mathcal{H}_1$.

Für den Fall $F(x) = x$ erhalten wir die Längenfunktion l von oben.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ν ein Inhalt ist: Sei dazu $(a, b] = \cup_{j=1}^n (a_j, b_j]$ mit paarweise disjunkten $(a_j, b_j] \in \mathcal{H}_1, 1 \leq j \leq n$. Durch Umsortierung können wir stets erreichen, dass $a_j \leq a_{j+1}$, d.h. $a_{j+1} = b_j, 1 \leq j \leq n-1$. Dies setzen wir im Folgenden voraus. Damit gilt (Teleskopsumme)

$$\begin{aligned} \nu((a, b]) &= F(b) - F(a) = F(b_n) - F(a_1) \\ &= \sum_{j=1}^n (F(b_j) - F(a_j)) = \sum_{j=1}^n \nu((a_j, b_j]), \end{aligned}$$

d.h. ν ist ein Inhalt (denn offensichtlich gilt auch $\nu(\emptyset) = \nu((a, a]) = F(a) - F(a) = 0$).

Um zu zeigen, dass ν auch ein Prämaß ist, sei

$$(a, b] = \cup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]$$

mit paarweise disjunkten Intervallen $(a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$. Wir können annehmen, dass $a < b$ und $a_n < b_n, n \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass

$$F(b) - F(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (F(b_n) - F(a_n)).$$

Dazu wählen wir $0 < \delta < b - a$. Das Intervall $[a + \delta, b]$ ist kompakt (und nicht-leer) und aus der Voraussetzung folgt

$$[a + \delta, b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n + \delta).$$

Wegen der Kompaktheit existiert $m \in \mathbb{N}$ mit

$$[a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} (a_n, b_n + \delta),$$

also auch $(a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} (a_n, b_n + \delta]$. Da ν schon als Inhalt auf $\mathcal{H}_1$ erkannt ist, folgt hieraus aus Lemma 13.7 (ii), dass

$$F(b) - F(a + \delta) = \nu((a + \delta, b]) \leq \sum_{n=1}^{m} \nu((a_n, b_n + \delta]) = \sum_{n=1}^{m} (F(b_n + \delta) - F(a_n)).$$

Da F rechtsseitig stetig ist (und auch die Summe von endlich vielen rechtsseitig stetigen Funktionen wieder rechtsseitig stetig ist), können wir δ gegen 0 schicken und erhalten

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{m} (F(b_n) - F(a_n)),$$

was wegen der Monotonie von F erst recht die Ungleichung

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n))$$

impliziert. Um auch die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, zeigen wir

$$\forall m \in \mathbb{N} : \quad \sum_{n=1}^{m} (F(b_n) - F(a_n)) \leq F(b) - F(a),$$

was das Gewünschte zur Folge hat. Sei also $m \in \mathbb{N}$. Nach einer möglichen Umbenennung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die disjunkten Intervalle $((a_n, b_n])_{n=1}^{m}$ nach wachsendem a_n sortiert sind, d.h. es gilt insbesondere auch $a_n \geq b_{n-1}$ und $F(a_n) - F(b_{n-1}) \geq 0$ für $2 \leq n \leq m$. Also folgt

$$\sum_{n=1}^{m} (F(b_n) - F(a_n)) = F(b_m) - \left(\sum_{n=2}^{m} (F(a_n) - F(b_{n-1})) \right) - F(a_1) \leq F(b_m) - F(a_1).$$

Da $(a, b] = \cup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n]$ gilt $a_1 \geq a$ und $b_m \leq b$, d.h. aus der Monotonie von F folgt ferner

$$\sum_{n=1}^{m} (F(b_n) - F(a_n)) \leq F(b) - F(a),$$

was den Beweis komplettiert. $\square$

Der Fortsetzungssatz 13.5 liefert nun sofort folgendes Resultat.

Satz 13.9. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig. Dann gibt es genau ein Maß μ^F auf $(\mathcal{B}_1, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$\mu^F((a,b]) = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \leq b.$$

Dieses heißt das **Lebesgue-Stieltjes-Maß zur verallgemeinerten Verteilungsfunktion** F. Es gilt

$$\mu^F(K) < \infty$$

für alle $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

Beweis. Das Mengensystem $\mathcal{H}_1$ ist nach Lemma 13.1 ein Halbring und $\nu : \mathcal{H}_1 \to [0, \infty], \nu((a,b]) := F(b) - F(a)$, nach Proposition 13.8 ein Prämaß. Weiterhin ist dieses Prämaß offensichtlich σ-endlich auf $\mathcal{H}_1$. Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit von μ^F aus Satz 13.5. Ist ferner $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq (-n, n]$, d.h. $\mu^F(K) \leq \mu^F((-n, n]) = F(n) - F(-n) < \infty$. □

Für die Wahl $F(x) = x$ schreiben wir natürlich λ statt μ^F. Der obige Satz verallgemeinert damit insbesondere Satz 4.16, d.h. die Existenz des 1-dimensionalen Lebesgue-Maßes ist damit endlich gezeigt.

In der folgenden Bemerkung fassen wir die wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Stieltjes Maßes μ^F zusammen. Auf die (einfachen) Beweise werden wir aus Zeitgründen zumeist verzichten.

Bemerkung 13.10. (i) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu^F(\{x\}) = \mu^F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu^F((x - \frac{1}{n}, x]) = \lim_{n\to\infty}(F(x) - F(x - \frac{1}{n})) = F(x) - F(x-).$$

Hieraus folgt auch

$$\begin{aligned}\mu^F((a,b)) &= \mu^F((a,b] \setminus \{b\}) = F(b-) - F(a),\\ \mu^F([a,b]) &= \mu^F((a,b] \cup \{a\}) = F(b) - F(a-), \text{ usw.}\end{aligned}$$

(ii) Ist $a \in \mathbb{R}$ und $F_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$, so gilt $\mu^{F_a} = \delta_a$.

(iii) Sind F_1, F_2 rechtsseitig stetig und monoton wachsend, so gilt

$$\mu^{F_1} = \mu^{F_2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad F_2 = F_1 + c.$$

(iv) Ist umgekehrt μ ein Maß auf $(\mathcal{B}_1, \mathbb{R})$, das kompakten Mengen endliches Maß zuordnet, so wird durch

$$F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \mu((0,x]), & x \geq 0 \\ -\mu((x,0]), & x < 0 \end{cases}$$

eine rechtsseitig stetige monoton wachsende Funktion definiert, für die $\mu^{F_\mu} = \mu$ gilt.

(v) Ist F stückweise stetig differenzierbar, d.h. es existieren $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, so dass

$$F_{(-\infty, x_0]}, \qquad F|_{[x_{k-1}, x_k]} \quad (k = 1, \ldots n) \quad \text{ und } \quad F|_{[x_n, \infty)}$$

jeweils stetig differenzierbar sind, so besitzt μ^F die Dichte

$$h(x) := \begin{cases} F'(x) & , x \notin \{x_0, \ldots, x_n\} \\ 0 & , x \in \{x_0, \ldots, x_n\} \end{cases}$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes λ. Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu^F = \int fh \, d\lambda = \int fF' \, d\lambda,$$

wobei wir im letzten Integral beachten müssen, dass der Integrand nur λ-fast sicher definiert ist.[a]

[a] In der Literatur finden Sie übrigens auch oft die Bezeichnung

$$\int f \, dF := \int f \, d\mu^F.$$

Kommen wir nun zum noch fehlenden Beweis des Fortsetzungssatzes. Hierzu benötigen wir zunächst noch einen weiteren Begriff.

Definition 13.11. Sei X eine Menge.

(a) Eine Abbildung $\nu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt **äußeres Maß**, falls

(i) $\nu^*(\emptyset) = 0$ **(Nulltreue)**

(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt: $A \subseteq B \Rightarrow \nu^*(A) \leq \nu^*(B)$ **(Isotonie)**

(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von X gilt

$$\nu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^*(A_n) \quad \textbf{(}\boldsymbol{\sigma}\textbf{-Sub-Addidivität)}$$

(b) Sei $\nu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann heißt $A \subseteq X$ ν^***-messbar**, falls

$$\forall E \subseteq X : \quad \nu^*(E) = \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E).$$

Die Menge aller ν^*-messbaren Teilmengen von X wird mit $\mathcal{A}(\nu^*)$ bezeichnet.

Im Unterschied zu Maßen sind äußere Maße also auf ganz $\mathcal{P}(X)$ definiert, aber sie sind dort nicht notwendig σ-additiv (was die Isotonie impliziert), sondern nur noch σ-sub-additiv und isoton.

Bemerkung 13.12. (i) Offensichtlich gilt für jede Teilmenge $E \subseteq X$ die disjunkte Zerlegung

$$E = (A \cap E) \cup (A^c \cap E).$$

Die Menge A ist genau dann ν^*-messbar, wenn sich das äußere Maß von **jedem** E dann auch als Summe der äußeren Maße von $A \cap E$ und $A^c \cap E$ berechnen lässt.

(ii) Da jedes äußere Maß auch endlich sub-additiv ist (man wähle in der entsprechenden Bedingung $A_n = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$), gilt für alle Mengen $A, E \subseteq X$ stets

$$\nu^*(E) \leq \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E),$$

d.h. A ist ν^*-messbar genau dann, wenn für alle $E \subseteq X$ gilt, dass

$$\nu^*(E) \geq \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E).$$

(iii) Gilt $\nu^*(A) = 0$, so ist A ν^*-messbar, denn aufgrund der Isotonie gilt

$$\nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E) \leq \nu^*(A) + \nu^*(E) = \nu^*(E), \quad E \subseteq X.$$

Der nachfolgende Satz (der auch auf Carathéodory zurückgeht), erklärt die Wichtigkeit von äußeren Maßen.

Satz 13.13. Sei $\nu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{A}(\nu^*)$ eine σ-Algebra und $\nu^*|_{\mathcal{A}(\nu^*)}$ ist ein vollständiges Maß.

Aus Zeitgründen wollen wir auch diesen Satz hier nicht beweisen. Sie finden den Beweis aber im Anhang an dieses Kapitel.

Nun müssen wir noch den Zusammenhang zwischen äußeren Maßen und Prämaßen herstellen.

Satz 13.14. Es sei $\mathcal{H}$ ein Mengensystem auf X mit $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ sei eine nulltreue Abbildung. Ferner sei

$$\nu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_n) : (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \mathcal{H} \text{ und } A \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right\}, \quad A \subseteq X.$$

(a) Es ist ν^* ein äußeres Maß auf X und für alle $A \in \mathcal{H}$ gilt $\nu^*(A) \leq \nu(A)$.

(b) Ist $\mathcal{H}$ sogar ein Halbring und ν ein Prämaß auf $\mathcal{H}$, so gilt

(i) $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{A}(\nu^*)$,

(ii) $\nu^*(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{H}$.

Insbesondere ist $\mu := \nu^*|_{\sigma(\mathcal{H})}$ in diesem Fall eine Fortsetzung von ν zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{H})$.

Bemerkung 13.15. (i) Teil (b) liefert uns den noch fehlenden Beweis der Existenzaussage des Fortsetzungssatzes 13.5.

(ii) Wir erhalten das äußere Maß ν^* also, indem wir Teilmengen von X durch abzählbar viele Elemente aus $\mathcal{H}$ „von außen" approximieren. Hierbei ist zu beachten, dass $\inf \emptyset := \infty$, d.h. $A \subseteq X$ bekommt das äußere Maß ∞, falls A nicht durch Mengen aus $\mathcal{E}$ überdeckt werden kann.

(iii) In der Situation von Teil (a) muss weder $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}(\nu^*)$ noch $\nu^*(A) = \nu(A)$ für $A \in \mathcal{H}$ gelten.

Beweis. (a) Wir überprüfen die drei Eigenschaften eines äußeren Maßes:

(a.i) Für $A = \emptyset$ wählen wir $E_n = \emptyset, n \in \mathbb{N}$, und erhalten aufgrund der Nulltreue von ν, dass $0 \leq \nu^*(\emptyset) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(\emptyset) = 0$, also $\nu^*(\emptyset) = 0$.

(a.ii) Ist $A \subseteq B$, so ist jede Überdeckung von B mit Elementen aus $\mathcal{H}$ auch eine Überdeckung von A, d.h. $\nu^*(A) \leq \nu^*(B)$, da auf der linken Seite das Infimum über eine größere Menge gebildet wird.

(a.iii) Nun sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$. Im Falle, dass $\nu^*(A_N) = \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$, ist die σ-Sub-Additivität trivialerweise erfüllt. Wir können also annehmen, $\nu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere existiert dann nach Definition des Infimums zu jedem $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(E_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $A_n \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} E_{n,k}$ und

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(E_{n,k}) \leq \nu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Aber $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \cup_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} E_{n,k}$ und damit

$$\nu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \nu(E_{n,k}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(E_{n,k}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\nu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu^*(A_n)\right) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die σ-Sub-Additivität von ν^*.

(a.i) bis (a.iii) zeigen, dass ν^* ein äußeres Maß ist. Wählen wir schließlich für $A \in \mathcal{H}$ die Mengen $E_1 = A, E_n = \emptyset, n \geq 2$, so sehen wir auch noch, dass

$$\nu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) = \nu(A), \qquad A \in \mathcal{H}.$$

(b.i) Da $\mathcal{A}(\nu^*)$ eine σ-Algebra ist, genügt es $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}(\nu^*)$ zu zeigen. Nach Bemerkung 13.12 (ii) gilt dies, wenn für jedes $A \in \mathcal{H}$ und $E \subseteq X$

$$\nu^*(E) \geq \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E).$$

Im Falle $\nu^*(E) = \infty$ ist dies offensichtlich erfüllt, d.h. wir betrachten den Fall $\nu^*(E) < \infty$. Nach Definition von ν^* existiert dann für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $E \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ und

$$\nu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n) < \nu^*(E) + \varepsilon.$$

Wir wollen nun auch $\nu^*(A \cap E)$ und $\nu^*(A^c \cap E)$ nach oben abschätzen. Da $\mathcal{H}$ ein Halbring ist, gilt zunächst

$$A \cap E_n \in \mathcal{H}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad (A \cap E) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap E_n),$$

d.h.

$$\nu^*(A \cap E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap E_n).$$

Aufgrund von Eigenschaft (iii) eine Halbrings existieren ferner für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M_n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte $C_{n,k} \in \mathcal{H}, 1 \leq k \leq M_n$, so dass

$$A^c \cap E_n = E_n \setminus (A \cap E_n) = \bigcup_{k=1}^{M_n} C_{n,k} \quad \text{und damit} \quad A^c \cap E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A^c \cap E_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{M_n} C_{n,k},$$

d.h.

$$\nu^*(A^c \cap E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{M_n} \nu(C_{n,k}).$$

Halten wir noch fest, dass wegen der Additivität von ν gilt

$$\nu(E_n) = \nu\left((A \cap E_n) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{M_n} C_{n,k}\right)\right) = \nu(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{M_n} \nu(C_{n,k}),$$

so folgt schließlich zusammengefasst, dass

$$\begin{aligned}\nu^*(A\cap E)+\nu^*(A^c\cap E) &\le \sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(A\cap E_n)+\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{M_n}\nu(C_{n,k})\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\nu(A\cap E_n)+\sum_{k=1}^{M_n}\nu(C_{n,k})\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n)<\nu^*(E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\nu^*(A\cap E)+\nu^*(A^c\cap E)\le\nu^*(E),$$

d.h. $A \in \mathcal{A}(\nu^*)$ und somit $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}(\nu^*)$.

(b.ii) Sei $A \in \mathcal{H}$. Aus Teil (a) wissen wir bereits, dass $\nu^*(A) \le \nu(A)$. Für die umgekehrte Ungleichung sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}$ mit $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Nach Lemma 13.7 (ii) gilt $\nu(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_n)$, woraus

$$\nu(A)\le\inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(E_n) : (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{H} \text{ mit } A\subseteq\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right\}=\nu^*(A)$$

folgt. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch einen kurzen Blick auf die sogenannte **Regularität** von solchen Maßen werfen, die auf der Borel-σ-Algebra eines metrischen Raumes (X, d) definiert sind. Hierbei geht es um die Frage, ob das Maß gut durch seine Werte auf offenen, abgeschlossenen bzw. kompakten Mengen beschrieben wird.

Satz 13.16. Es sei X ein metrischer Raum und μ ein Maß auf $(X, \mathcal{B}(X))$. Ferner existiere eine Folge offener Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n \quad \text{und} \quad \mu(U_n)<\infty \quad (n\in\mathbb{N}).^a$$

Dann gilt für alle $B \in \mathcal{B}(X)$:

(i) $\mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subseteq O \text{ und } O \text{ ist offen }\}$.

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \subseteq B \text{ und } A \text{ ist abgeschlossen }\}$.

Ist X darüber hinaus σ-kompakt (vergleiche Proposition 2.16), so gilt auch

(iii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B \text{ ist kompakt }\}$.

[a] D.h. μ ist σ-endlich auf dem Mengensystem der offenen Teilmengen von X. Dies ist etwa für jedes endliche Maß, für die Lebesgue-Stieltjes-Maße aus Proposition 13.8 und für das Lebesgue-Maß λ^n erfüllt.

Bemerkung 13.17. Maße, die (i) erfüllen nennt man **von außen regulär**. Solche, die (iii) erfüllen heißen **von innen regulär**. Schließlich heißt ein Maß **regulär**, wenn es von innen und von außen regulär ist.

Korollar 13.18. Ist μ ein **lokal-endliches Maß** auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, d.h. $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten $K \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist μ regulär.

Beweis (des Korollars). Die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B(0,k)} \subseteq \mathbb{R}^n$ sind kompakt. Ferner gilt

$$\mathbb{R}^n = \cup_{k\in\mathbb{N}} B(0,k) = \cup_{k\in\mathbb{N}} \overline{B(0,k)} \quad \text{und} \quad \mu\left(\overline{B(0,k)}\right) < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Also sind die Voraussetzungen von Satz 13.16 erfüllt. □

Insbesondere sind also etwa die Lebesgue-Stieltjes-Maße aus Proposition 13.8 und das Lebesgue-Maß λ^n jeweils regulär.

Beweis (von Satz 13.16). **Teil (i) und (ii):** Aufgrund der Isotonie des Maßes gilt stets

$$\mu(B) \le \underbrace{\inf\{\mu(O) : O \supseteq B \text{ ist offen }\}}_{=:I} \quad \text{und} \quad \mu(B) \ge \underbrace{\sup\{\mu(A) : A \subseteq B \text{ ist abg.}\}}_{=:S}.$$

Für die umgekehrten Ungleichungen betrachten wir die Menge

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{B}(X) :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists O \text{ offen und } A \text{ abgeschl. mit } A \subseteq B \subseteq O \text{ und } \mu(O \setminus A) \le \varepsilon\}.$$

Nehmen wir an, dass $\mathcal{G} = \mathcal{B}(X)$ gezeigt werden kann. Ist dann $B \in \mathcal{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, und sind $A \subseteq B \subseteq O$ mit $\mu(O \setminus A) \le \varepsilon$ entsprechend gewählt, so folgt auch $\mu(B \setminus A) \le \varepsilon$ und $\mu(O \setminus B) \le \varepsilon$ und damit

$$\mu(B) \ge \mu(O) - \varepsilon \ge I - \varepsilon$$

und

$$\mu(B) \le \mu(A) + \varepsilon \le S + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgen dann die noch fehlenden Ungleichungen.

Es bleibt also nur $\mathcal{G} = \mathcal{B}(X)$ zu zeigen.

1. Fall: μ ist endlich

Wir zeigen, dass $\mathcal{G}$ alle abgeschlossenen Mengen enthält und dass $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist. Da die abgeschlossenen Mengen die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ erzeugen, folgt $\mathcal{G} = \mathcal{B}(X)$.

Schritt 1.1 Alle abgeschlossenen Mengen sind Element von $\mathcal{G}$.

Beweis: Sei $B \subseteq X$ abgeschlossen und $\varepsilon > 0$. Mit Hilfe der stetigen Abbildung

$$X \ni x \mapsto \operatorname{dist}(x, B) := \inf\{d(x,y) : y \in B\}$$

definieren wir die offenen Mengen

$$O_n := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, B) < 1/n\}.$$

Dann gilt $O_n \supseteq O_{n+1} \supseteq B$ und $B = \overline{B} = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ (hier nutzen wir, dass $d(x,B) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{B}$). Aus der Stetigkeit (von oben) von μ folgt damit $\mu(O_n \setminus B) = \mu(O_n) - \mu(B) \to 0$ für $n \to \infty$. Wählen wir also $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug, $O := O_{n_0}$ und $A = B$, so gilt

$$A \subseteq B \subseteq O \quad \text{und} \quad \mu(O \setminus A) \le \varepsilon.$$

Schritt 1.2 $\mathcal{G}$ ist eine σ-Algebra.

Beweis: (i) $X \in \mathcal{G}$ ist klar, da X offen und abgeschlossen ist.

(ii) Sei $B \in \mathcal{G}$ und sei $\varepsilon > 0$. Ferner seien $A \subseteq B \subseteq O$ entsprechend gewählt. Dann gilt $O^c \subseteq B^c \subseteq A^c$, die Mengen O^c und A^c sind abgeschlossen bzw. offen und es gilt $\mu(A^c \setminus O^c) = \mu(O \setminus A) \le \varepsilon$. Also ist auch $B^c \in \mathcal{G}$.

(iii) Sei $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ mit $B_n \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{N}$, und sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren dann (zu $\varepsilon_n := \varepsilon 2^{-n-1}$) offene O_n bzw. abgeschlossene A_n, so dass

$$A_n \subseteq B_n \subseteq O_n \quad \text{und} \quad \mu(O_n \setminus A_n) < \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Wir setzen $O := \cup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ und $A' := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt $A' \subseteq B \subseteq O$ und O ist offen (allerdings A' nicht notwendig abgeschlossen). Ferner gilt

$$\mu\left(O \setminus A'\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(O_n \setminus A') \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(O_n \setminus A_n\right) \le \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun sei $A := \cup_{k=1}^N A_k$ für ein noch zu wählendes $N \in \mathbb{N}$. Dies ist eine abgeschlossene Menge und $A \subseteq A' \subseteq B$. Ferner gilt aufgrund der Stetigkeit von unten, dass

$$\mu(A' \setminus A) = \mu(A') - \mu\left(\cup_{k=1}^N A_k\right) \to 0$$

für $N \to \infty$. Wir wählen N so groß, dass $\mu(A' \setminus A) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt insgesamt

$$\mu(O \setminus A) \le \mu(O \setminus A') + \mu(A' \setminus A) \le \varepsilon.$$

Dies zeigt $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}$.

2. Fall: $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ **mit** U_n **offen und** $\mu(U_n) < \infty$**.**

Die Maße $\mu_n(.) := \mu(. \cap U_n)$ auf $(X, \mathcal{B}(X))$ sind dann nach Voraussetzung endlich. Ist nun $B \in \mathcal{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$, so existieren nach Fall 1 offene Mengen O_n und abgeschlossene Mengen A_n, so dass

$$A_n \subseteq B \subseteq O_n \quad \text{und} \quad \mu_n(O_n \setminus A_n) \le \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Wir setzen $O := \cup_{n\in\mathbb{N}}(O_n \cap U_n)$ und $A' := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt $A' \subseteq B$, die Menge O ist offen und

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap U_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (O_n \cap U_n) = O.$$

Ferner gilt

$$\mu\left(O \setminus A'\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu((O_n \cap U_n) \setminus A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(O_n \setminus A_n) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun wählen wir die abgeschlossene Menge $A := \cup_{n=1}^N A_n$ mit N groß genug und argumentieren wie in Fall 1, um $\mu(O \setminus A) \le \varepsilon$ zu erhalten. Damit gilt $B \in \mathcal{G}$, was zu zeigen war.

Teil (iii): Gilt $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit $K_n \subseteq X$ kompakt und ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $K_n \cap A$ ebenfalls kompakt und

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n \cap A).$$

Daher folgt Teil (iii) aus Teil (ii). □

Als Anwendung der Regularität schauen wir uns noch einmal dichte Teilmengen der $\mathcal{L}^p$-Räume an. Dazu nennen wir

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

den (abgeschlossenen) **Träger** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$. Dieser ist kompakt genau dann, wenn er beschränkt ist, d.h. wenn ein $r \geq 0$ existiert, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > r \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0.$$

Wir definieren weiterhin

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt}\} \quad \text{und} \quad C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := C_0(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Korollar 13.19. Es sei μ ein lokal-endliches[a] Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, d.h.

$$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \quad \|f - g\|_p \leq \varepsilon.$$

[a]Vergleiche Korollar 13.18.

Für $p = \infty$ ist diese Aussage offensichtlich im Allgemeinen falsch (warum?).

Beweis. Wir beachten, dass $C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, denn

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \cdot \mu(\operatorname{supp}(f)) < \infty,$$

da $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und μ lokal-endlich ist.

1. Schritt: $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$:

Beweis: Da $C_0(\mathbb{R}^n)$ stabil unter endlichen Linearkombinationen ist, genügt es nach Satz 11.17 zu zeigen, dass jede charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B$ mit $B \in \mathcal{B}_n$ und $\mu(B) < \infty$ durch Funktionen aus $C_0(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der p-Norm beliebig gut approximiert werden kann. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Korollar 13.18 (und dem Beweis von Satz 13.16) existieren offene Mengen O und kompakte Mengen K, so dass

$$K \subseteq B \subseteq O \quad \text{und} \quad \mu(O \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Nun ist

$$r := \operatorname{dist}(K, O^c) := \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in O^c\} > 0.^a$$

Wir setzen

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq r/2\}.$$

Dann gilt

$$K \subseteq V \subseteq O$$

und V ist abgeschlossen und beschränkt (denn K ist beschränkt), also kompakt. Definiere

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, K) + d(x, V^c)}.$$

Dann ist g stetig, $0 \leq g \leq 1$ und es gilt $g(x) = 1$ für $x \in K$ und $g(x) = 0$ für $x \in V^c$. Insbesondere ist $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, da $\operatorname{supp}(g) \subseteq V$ abgeschlossen also (mit V) auch kompakt ist. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
\|g - \mathbb{1}_B\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |g - \mathbb{1}_B|^p \, d\mu \\
&= \int_K |1-1|^p \, d\mu + \int_{O \setminus K} |g - \mathbb{1}_B|^p \, d\mu + \int_{O^c} |0-0|^p \, d\mu \\
&\le \int_{O \setminus K} (|g| + |\mathbb{1}_B|)^p \, d\mu \le 2^p \mu(O \setminus K) \le 2^p \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

2. Schritt: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$

Beweis: Für jedes $\delta > 0$ sei $k_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein **Glättungskern**, d.h.

(i) k_δ ist nichtnegativ und beliebig oft differenzierbar,

(ii) $k_\delta(x) = 0$ für $|x| \ge \delta$,

(iii) $\int k_\delta(x) \, d\lambda^n(x) = 1$.

Hier kann etwa $k_\delta(x) := \delta^{-n} k(\delta^{-1} x)$ mit

$$k(x) := \begin{cases} c \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|_2^2}\right) & , \|x\|_2 < 1 \\ 0 & , \|x\|_2 \ge 1 \end{cases}$$

mit einer passend gewählten Normierungskonstante $c > 0$ gewählt werden. Nach Schritt 1 genügt es zu zeigen, dass $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ durch C_0^∞-Funktionen in der p-Norm beliebig genau approximiert werden kann. Wir betrachten die Faltung (vgl. Beispiel 9.25)

$$g_\delta := g * k_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) k_\delta(y) \, d\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) k_\delta(x-y) \, d\lambda^n(y).$$

Aus Satz 6.17 folgt, dass mit k_δ auch g_δ beliebig oft differenzierbar ist. Ferner gilt für $0 < \delta \le 1$

$$\operatorname{supp}(g_\delta) \subseteq \operatorname{supp}(g) + \operatorname{supp}(k_\delta) \subseteq \underbrace{\operatorname{supp}(g) + \overline{B(0,1)}}_{=:S(g)}.$$

Da $S(g) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, gilt also $g_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Schließlich ist g als stetige Funktion mit kompaktem Träger sogar gleichmäßig stetig. Ist also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so existiert $1 \ge \delta_\varepsilon > 0$, so dass

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \|y\|_2 \le \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(x-y)| \le \varepsilon.$$

Hieraus folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $0 < \delta \le \delta_\varepsilon$, dass

$$\begin{aligned}
|g(x) - g_\delta(x)| &= \left| \int g(x) k_\delta(y) \, d\lambda^n(y) - \int g(x-y) k_\delta(y) \, d\lambda^n(y) \right| \\
&\le \int |g(x) - g(x-y)| k_\delta(y) \, d\lambda^n(y) \le \varepsilon
\end{aligned}$$

und damit auch

$$\int |g(x) - g_\delta(x)|^p \, d\mu(x) = \int_{\operatorname{supp}(g) \cup S(g)} |g(x) - g_\delta(x)|^p \, d\mu(x) \le \varepsilon^p \cdot \mu(\operatorname{supp}(g) + S(g)) < \infty.$$

Die Familie $(|g - g_\delta|^p)_{0<\delta\le\delta_\varepsilon}$ konvergiert also für $\delta \to 0$ (gleichmäßig) gegen 0 und besitzt die integrierbare Majorante $\varepsilon^p \mathbb{1}_{\operatorname{supp}(g)\cup S(g)}$. Aus dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt somit
$$\int |g_\delta(x) - g(x)|^p \; d\mu(x) \to 0 \qquad (\delta \to 0).$$
□

[a] Sonst existieren Folgen (x_n) aus K und (y_n) aus O^c mit $d(x_n, y_n) \to 0$. Da K kompakt ist, können wir o.E. annehmen, dass (x_n) in K konvergiert. Aber dann konvergiert auch (y_n) gegen ein Element aus $K \subseteq O$. Da O offen ist, liegen also alle bis auf endlich viele Glieder von (y_n) in O. Dies ist ein Widerspruch, da (y_n) eine Folge in O^c ist.

— Zusatzmaterial —

Zusatz (Beweis von Lemma 13.7). **1. Schritt:** Sind $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{H}$, so existiert $m \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{H}$, so dass
$$A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \bigcup_{l=1}^m C_l.$$
Beweis: Wir beweisen per Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage eine direkte Folgerung aus Teil (iii) der Definition eines Halbrings. Für den Schritt $n \mapsto n+1$ nehmen wir an, dass
$$A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \bigcup_{l=1}^m C_l,$$
mit paarweise disjunkten $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{H}$. Dann gilt
$$A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = \left(A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)\right) \setminus B_{n+1} = \left(\bigcup_{l=1}^m C_l\right) \setminus B_{n+1} = \bigcup_{l=1}^m (C_l \setminus B_{n+1}).$$
Nun sind $C_1, \dots, C_m, B_{n+1} \in \mathcal{H}$, d.h. wegen Eigenschaft (iii) eines Halbrings existieren für jedes $1 \le l \le m$ paarweise disjunkte $\widetilde{C}_{l,k} \in \mathcal{H}, 1 \le k \le M_l$ mit
$$C_l \setminus B_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{M_l} \widetilde{C}_{l,k} \quad \text{also} \quad A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = \bigcup_{l=1}^m \bigcup_{k=1}^{M_l} \widetilde{C}_{l,k}.$$
Da die $C_l, 1 \le l \le m$, paarweise disjunkt sind, sind alle $\widetilde{C}_{l,k}, 1 \le k \le M_l, 1 \le l \le m$, paarweise disjunkt, d.h. die Aussage ist gezeigt.

2. Schritt: Wir beweisen die Teile (i) bis (iii).

(i) Nach Schritt 1 existieren $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt, so dass
$$A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \bigcup_{k=1}^m C_k, \quad \text{d.h.} \quad A = \left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^m C_k\right),$$
wobei alle beteiligten Mengen aus $\mathcal{H}$ und paarweise disjunkt sind. Aus der Additivität von ν folgt damit
$$\nu(A) = \sum_{j=1}^n \nu(A_j) + \sum_{k=1}^m \nu(C_k) \ge \sum_{j=1}^n \nu(A_j).$$

(ii) Da $A = \cup_{n=1}^m (A \cap E_n)$, $A \cap E_n \in \mathcal{H}$ und $\nu(A \cap E_n) \le \nu(E_n)$ (wie aus Teil (i) folgt), können wir o.B.d.A. annehmen, dass
$$A = \cup_{n=1}^m E_n.$$
Setze $F_1 := E_1$ und
$$F_n := E_n \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}), \quad 2 \le n \le m,$$
so dass die F_n paarweise disjunkt sind und $A = \cup_{n=1}^m F_n$ gilt. Nach Schritt 1 existieren paarweise disjunkte Mengen $C_{n,k} \in \mathcal{H}, 1 \le k \le N_n, 1 \le n \le m$, mit
$$F_n = \bigcup_{k=1}^{N_n} C_{n,k} \quad \text{also} \quad A = \bigcup_{n=1}^m \bigcup_{k=1}^{N_n} C_{n,k}.$$

Aus der Additivität des Inhaltes ν und aus Teil (i) folgt wegen $F_n \subseteq E_n$

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_n} \nu(C_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{m} \nu(E_n).$$

(iii) Folgt genauso wie Teil (ii) (ersetze m durch ∞ bzw. $\leq m$ durch $< \infty$).

Zusatz (Beweis von Satz 13.13). **1. Schritt:** $X \in \mathcal{A}(\nu^*)$

Da für $E \subseteq X$ gilt, dass $X \cap E = E$ und $X^c \cap E = \emptyset$, folgt

$$\nu^*(E) = \nu^*(E) + \nu^*(\emptyset) = \nu^*(X \cap E) + \nu^*(X^c \cap E),$$

d.h. $X \in \mathcal{A}(\nu^*)$.

2. Schritt: $A \in \mathcal{A}(\nu^*) \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}(\nu^*)$

Dies ist offensichtlich, da die ν^*-Messbarkeitsbedingung symmetrisch in A und A^c ist.

3. $\mathcal{A}(\nu^*)$ **ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen:**

Es genügt, dies für zwei Mengen zu zeigen. Seien also $A, B \in \mathcal{A}(\nu^*)$ und $E \subseteq X$ beliebig. Dann gilt zunächst aufgrund der ν^*-Messbarkeit von A, dass

$$\nu^*(E) = \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E)$$

und aufgrund der ν^*-Messbarkeit von B (mit $E' = A \cap E$ bzw. $E'' = A^c \cap E$) weiterhin

$$\begin{aligned} \nu^*(E) &= \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A^c \cap E) \\ &= \nu^*(B \cap A \cap E) + \nu^*(B^c \cap A \cap E) + \nu^*(B \cap A^c \cap E) + \nu^*(B^c \cap A^c \cap E). \end{aligned}$$

Weiterhin ist $(A \cup B) = (B \cap A) \cup (B^c \cap A) \cup (B \cap A^c)$, d.h. wegen der Sub-Additivität von ν^* folgt

$$\nu^*(B \cap A \cap E) + \nu^*(B^c \cap A \cap E) + \nu^*(B \cap A^c \cap E) \geq \nu^*((A \cup B) \cap E),$$

also mit der vorherigen Gleichung auch

$$\nu^*(E) \geq \nu^*((A \cup B) \cap E) + \nu^*(B^c \cap A^c \cap E) = \nu^*((A \cup B) \cap E) + \nu^*((A \cup B)^c \cap E).$$

Wegen Bemerkung 13.12 (ii) ist also auch $A \cup B \in \mathcal{A}(\nu^*)$.

4. Schritt: $\mathcal{A}(\nu^*)$ **ist eine σ-Algebra, falls es unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen abgeschlossen ist:**

In der Tat, nehmen wir an, dies sei der Fall und sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{A}(\nu^*)$. Dann setzen wir $A_1 := B_1$ und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} A_n = B_n \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) &= B_n \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})^c \\ &= (B_n^c \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})^c. \end{aligned}$$

Wegen Schritt 2 und 3 ist damit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}(\nu^*)$, die offensichtlich diskunkt ist. Also gilt $\cup_n B_n = \cup_n A_n \in \mathcal{A}(\nu^*)$. Damit ist $\mathcal{A}(\nu^*)$ auch unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen und damit nach Schritt 1 und 2 auch eine σ-Algebra.

5. Schritt: $\mathcal{A}(\nu^*)$ **ist eine σ-Algebra und** $\nu^*|_{\mathcal{A}(\nu^*)}$ **ist ein Maß:**

Nach Schritt 4 müssen wir für den ersten Punkt nur noch zeigen, dass $\mathcal{A}(\nu^*)$ abgeschlossen unter disjunkten abzählbaren Vereinigungen ist. Sei also $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige *disjunkte* Folge in $\mathcal{A}(\nu^*)$. Wir wollen zeigen, dass $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}(\nu^*)$. Dazu führen wir die Abkürzungen

$$\tilde{A}_n := \cup_{k=1}^n A_k \quad \text{und} \quad A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

ein. Man beachte, dass $\tilde{A}_n \in \mathcal{A}(\nu^*), n \in \mathbb{N}$, denn $\mathcal{A}(\nu^*)$ ist nach 3. abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen. Nun sei $E \subseteq X$ beliebig. Aus der ν^*-Messbarkeit von A_n folgt dann zunächst (mit $E' = \tilde{A}_n \cap E$)

$$\begin{aligned} \nu^*(\tilde{A}_n \cap E) &= \nu^*(A_n \cap \tilde{A}_n \cap E) + \nu^*(A_n^c \cap \tilde{A}_n \cap E) \\ &= \nu^*(A_n \cap E) + \nu^*(\tilde{A}_{n-1} \cap E), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Disjunktheit der A_n und die Definition von $\tilde{A}_n$ benutzt haben, um $A_n \cap \tilde{A}_n = A_n$ und $A_n^c \cap \tilde{A}_n = \tilde{A}_{n-1}$ zu vereinfachen. Induktiv folgt dann

$$\nu^*(\tilde{A}_n \cap E) = \sum_{k=1}^{n} \nu^*(A_k \cap E).$$

Nun benutzen wir, dass $\tilde{A}_n \in \mathcal{A}(\nu^*)$ und dass ν^* isoton ist und erhalten

$$\nu^*(E) = \nu^*(\tilde{A}_n \cap E) + \nu^*(\tilde{A}_n^c \cap E) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \nu^*(A_k \cap E) \right) + \nu^*(A^c \cap E), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Schicken wir $n \to \infty$, und nutzen wir zweimal die σ-Sub-Additivität, so folgt hieraus schließlich

$$\begin{aligned} \nu^*(E) &\geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^*(A_k \cap E) \right) + \nu^*(A^c \cap E) \geq \nu^* \left(\cup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap E) \right) + \nu^*(A^c \cap E) \\ &= \nu^* \left(A \cap E \right) + \nu^*(A^c \cap E) \geq \nu^*(E), \end{aligned}$$

d.h.

$$\nu^*(E) = \nu^* \left(A \cap E \right) + \nu^*(A^c \cap E) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^*(A_k \cap E) \right) + \nu^*(A^c \cap E).$$

Die erste Gleichung zeigt, dass $A = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}(\nu^*)$. Schließlich folgt aus der zweiten Gleichung mit $E = A$ auch noch, dass

$$\nu^*(A) = \nu^* \left(\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu^*(\underbrace{A_k \cap A}_{=A_k}) \right) + \underbrace{\nu^*(A^c \cap A)}_{=\nu^*(\emptyset)=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^*(A_k),$$

d.h. ν^* ist σ-additiv auf $\mathcal{A}(\nu^*)$ und damit ein Maß. Die Vollständigkeit dieses Maßes folgt sofort aus der Isotonie und Bemerkung 13.12 (iii).

Literaturverzeichnis

[1] Heinz Bauer. *Maß - und Integrationstheorie*. De Gruyter, 2011.

[2] Theodor Bröcker. *Analysis II. 2., korr. Aufl.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

[3] Martin Brokate and Götz Kersting. *Maß und Integral*. Mathematik Kompakt. [Compact Mathematics]. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[4] Jürgen Elstrodt. *Maß - und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, seventh edition, 2011.

[5] Gerald B. Folland. *Real Analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999.

[6] Joachim Hilgert. *Analysis I-III*. Vorlesungsskript TU Clausthal, 2000.

[7] Walter Rudin. *Reelle und Komplexe Analysis*. R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999.

[8] René L. Schilling. *Maß und Integral: Eine Einführung für Bachelor-Studenten*. De Gruyter, May 2015.

[9] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real Analysis*. Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[10] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*, volume 126 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.