

Skript zur Vorlesung

Analysis partieller Differentialgleichungen

Marcel Hansmann

Stand vom 15. August 2024

Dies ist ein Skript zur gleichnamigen Vorlesung im Sommersemester 2024 an der TU Chemnitz, welche sich sowohl an Bachelor- wie an Master-Studierende richtete. Zur Ausarbeitung der Vorlesung habe ich neben der Lehrbuchliteratur auch auf einige Skripte von Kollegen zurückgegriffen (siehe das Literaturverzeichnis). Der Text dieses Manuskripts ist nur oberflächlich Korrektur gelesen und nur zum internen Gebrauch gedacht. Für Kommentare und Korrekturen bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

0. Prolog	1
I. Klassische Theorie	3
1. Harmonische Funktionen	4
2. Die Poisson-Gleichung	15
3. Die Wärmeleitungsgleichung	38
4. Die Wellengleichung	59
II. Distributionen, Sobolev-Räume und funktionalanalytische Methoden	71
5. Distributionen	72
6. Sobolev-Räume	92
7. Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator	103
A. Anhang	112
A.1. Fakten aus der Vektoranalysis	112
A.2. Fakten aus der Maßtheorie	113
A.3. Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung	114
A.4. Der Rieszsche Darstellungssatz	115
Symbolverzeichnis	118
Literaturverzeichnis	120

0. Prolog

Eine partielle Differentialgleichung (PDG) drückt Zusammenhänge zwischen einer unbekanntem Funktion und ihren partiellen Ableitungen aus. Ein Beispiel ist die sogenannte **Diffusions-** oder **Wärmeleitungsgleichung** für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Die Aufgabe besteht darin, bei gegebener rechter Seite $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, die die Gleichung erfüllt. Hierbei nennt man $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ oft die **Orts-** und $t \in \mathbb{R}$ die **Zeitvariable**. Ferner ist

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \Delta := \Delta_x := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} := \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2.$$

Man nennt Δ den (auf der Ortsvariablen wirkenden) **Laplace-Operator**.¹

Wir wollen uns im Folgenden anhand dieser Gleichung einmal exemplarisch ansehen, wie partielle Differentialgleichungen bei der Modellierung (z.B.) physikalischer Phänomene zustande kommen. Auf mathematische Exaktheit werden wir hierbei eher verzichten.

Dazu betrachten wir den Transport eines Stoffes durch ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, etwa die Ausbreitung von Tinte in einem Wasserglas. Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die Dichte des Stoffes zum Zeitpunkt t am Ort $x \in \Omega$. Ist $B \subseteq \Omega$ eine Kugel, so ist die Masse des Stoffes in B zum Zeitpunkt t gegeben durch

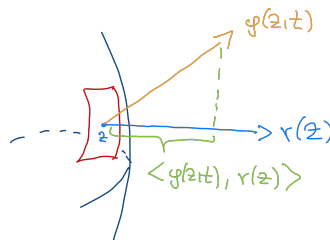
$$M(t) := \int_B u(x, t) \, dx.^2$$

Für die Massendifferenz $M(t+h) - M(t)$, also die Änderung der Masse vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+h$, erhalten wir dann mit dem Massenerhaltungssatz folgende Bilanzgleichung:

$$M(t+h) - M(t) = \text{Zustrom über } \partial B - \text{Abfluss über } \partial B + \text{Quellen in } B - \text{Senken in } B.$$

Den Zu- und Abfluss des Stoffes durch den Rand ∂B drücken wir durch eine (modellbedingte) **Flussfunktion** $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus. Dies bedeutet, dass der Fluss durch ein kleines Flächenstück $F \subseteq \partial B$, mit $z \in F$, im Zeitintervall $[t, t+h]$ näherungsweise gegeben ist durch

$$h \cdot (\text{Fluss in } z \text{ senkrecht zu } F) \cdot (\text{Flächeninhalt von } F) = h \cdot \langle \varphi(z, t), \nu(z) \rangle \cdot \sigma(F).$$



¹Pierre-Simon Laplace, 1749-1827

²Dies ist die abkürzende Schreibweise für das Lebesgue-Integral $\int_B u(x, t) \, d\lambda^n(x)$, die wir in dieser Vorlesung verwenden wollen. Falls an anderer Stelle die Notation nicht klar sein sollte, hilft eventuell ein Blick in das Symbolverzeichnis.

Hierbei bezeichnet $\nu(z)$ die äußere Normale an B im Punkte z und σ ist das Oberflächenmaß auf ∂B , vergleiche Anhang A.1. Ferner ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n .

Die im Zeitintervall $[t, t+h]$ durch die Oberfläche von B auf- bzw. abgegebene Stoffmenge ist damit gegeben durch

$$-\int_t^{t+h} \left(\int_{\partial B} \langle \varphi(z, s), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \right) ds.$$

Das Minuszeichen ist hier unserer Wahl von ν als der äußeren Normalen geschuldet (wenn die Integrale positiv sind, nimmt die Stoffmenge in B ab).

Nun drücken wir noch analog mögliche Quellen oder Senken durch eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus, die angibt, wie viel des Stoffes pro Zeit- und Volumeneinheit in Ω erzeugt bzw. vernichtet wird. Aus der Bilanzgleichung folgt dann insgesamt:

$$M(t+h) - M(t) = -\int_t^{t+h} \left(\int_{\partial B} \langle \varphi(z, s), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \right) ds + \int_t^{t+h} \left(\int_B f(x, s) dx \right) ds.$$

Teilen wir diese Gleichung durch h und lassen wir h gegen 0 gehen, so folgt unter Verwendung der Formel für $M(t)$ und mittels Vertauschung von Ableitung und Integral

$$\int_B \partial_t u(x, t) dx = -\int_{\partial B} \langle \varphi(z, t), \nu(z) \rangle d\sigma(z) + \int_B f(x, t) dx.$$

Nun besagt der **Divergenzsatz**, siehe Anhang A.1, dass

$$\int_{\partial B} \langle \varphi(z, t), \nu(z) \rangle d\sigma(z) = \int_B \operatorname{div} \varphi(x, t) dx,$$

wobei $\operatorname{div} \varphi := \operatorname{div}_x \varphi := \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_i$ (d.h. wir betrachten die Divergenz in Bezug auf die Ortsvariable x). Aus der vorherigen Gleichung erhalten wir also

$$\int_B \partial_t u(x, t) dx = -\int_B \operatorname{div} \varphi(x, t) dx + \int_B f(x, t) dx$$

beziehungsweise

$$\int_B (\partial_t u(x, t) + \operatorname{div} \varphi(x, t)) dx = \int_B f(x, t) dx.$$

Da dies für jede Kugel $B \subseteq \Omega$ gelten muss, folgt schließlich

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div} \varphi(x, t) = f(x, t).$$

In vielen Fällen ist es sinnvoll, anzunehmen, dass der Fluss proportional zum Gradienten

$$\nabla u = \nabla_x u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)^T$$

ist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt (Fluss von dichten Mengen zu weniger dichten Mengen). Setzen wir also etwa $\varphi(x, t) = -\nabla u(x, t)$, so folgt

$$\partial_t u(x, t) - \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) = f(x, t).$$

Wegen $\Delta := \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2 = \operatorname{div} \nabla$ erhalten wir schließlich die Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t).$$

Der Name Wärmeleitungsgleichung ist der Tatsache geschuldet, dass die Gleichung auch beschreibt, wie sich die Temperatur in einem Körper mit der Zeit entwickelt.

Teil I.

Klassische Theorie

1. Harmonische Funktionen

Stichpunkte. Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen, Mittelwerteigenschaft (MWE), Faltungen, Glättungskerne, MWE \Rightarrow glatt, subharmonische Funktionen, Maximumprinzipien, Satz von Liouville

Betrachten wir die homogene Wärmeleitungsgleichung (d.h. $f = 0$) mit einer Funktion $v(x, t) = u(x)$, die nicht von der Zeit t abhängt, so ist

$$\partial_t v(x, t) - \Delta v(x, t) = 0$$

äquivalent zu der sogenannten **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u(x) = 0.$$

Diese beschreibt also die zeitlich stationären Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung.

Definition 1.1. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (und nicht-leer). Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt (**klassische**) **Lösung**^a der Laplace-Gleichung auf Ω , falls

$$\forall x \in \Omega : \quad \Delta u(x) = 0.$$

Diese Funktionen werden auch **harmonisch** genannt. Wir schreiben daher $h(\Omega)$ für die Menge aller klassischen Lösungen der Laplace-Gleichung (bzw. aller harmonischen Funktionen) auf Ω .

^aSpäter werden wir auch andere Lösungsbegriffe kennenlernen, siehe Kapitel 5.

Bemerkung 1.2. Im Falle $n = 1$ handelt es sich bei der Laplace-Gleichung um die **gewöhnliche Differentialgleichung** $u'' = 0$, die wir einfach durch Integration lösen können. Zum Beispiel ist u genau dann harmonisch auf $\Omega = \mathbb{R}$, falls u affin-linear ist, d.h. für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $u(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$. Im Folgenden liegt der Fokus daher auf dem Fall $n \geq 2$.

Die Laplace-Gleichung ist die erste partielle Differentialgleichung, die wir in dieser Vorlesung untersuchen wollen. Dabei sind etwa folgende Fragen von Interesse:

- Gibt es Lösungen?
- Sind Lösungen eindeutig?
- Können wir die Lösungen explizit beschreiben? Gibt es Lösungsformeln?
- Können wir (auch ohne Lösungsformel) Eigenschaften der Lösungen angeben?

Die ersten beiden Fragen können wir sofort beantworten.

Beispiel 1.3. Ist $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ affin-linear, d.h. es existiert $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass

$$u(x) = \langle a, x \rangle + b = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

so ist $u \in h(\Omega)$. Es existieren also stets unendlich viele Lösungen der Laplace-Gleichung auf Ω .

Vorsicht: Wir behaupten nicht, dass alle Lösungen der Laplace-Gleichung affin-linear sind (jedenfalls im Falle $\Omega \neq \mathbb{R}$). Wir werden unten viele weitere Lösungen kennenlernen.

Der Laplace-Operator ist ein Beispiel eines **linearen partiellen Differentialoperators**, denn die Abbildung $\Delta : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ ist **linear**, d.h.

$$\Delta(au_1 + bu_2) = a\Delta u_1 + b\Delta u_2, \quad u_1, u_2 \in C^2(\Omega), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Mit zwei Lösungen der Laplace-Gleichung ist also auch deren Summe und ein skalares Vielfaches wieder eine Lösung. Dies liefert sofort folgende Proposition.

Proposition 1.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $h(\Omega)$ ein (nicht-trivialer) Unterraum von $C^2(\Omega)$.

Im Falle $n = 2$ kann man die harmonischen Funktionen sogar präzise charakterisieren.

Satz 1.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ offen. Dann ist $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann harmonisch, wenn u lokal der Realteil einer holomorphen Funktion ist. Letzteres bedeutet, dass für alle $p \in \Omega$ eine offene Umgebung $W \subseteq \Omega$ von p und eine holomorphe Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass $u|_W = \operatorname{Re}(f)$.

Beweis. \Leftarrow : Es gelte $u|_W = \operatorname{Re}(f)$ für eine holomorphe Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{C}$. Notieren wir den entsprechenden Imaginärteil mit $v : W \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt also

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (x, y) \in W.$$

Aus der Funktionentheorie wissen wir, dass u und v auf W glatt sind ($\in C^\infty(W)$) und die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen:

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Mit dem Satz von Schwarz dürfen partielle Ableitungen vertauscht werden, so dass folgt

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0.$$

\Rightarrow : Übung. □

Übungsblatt 1

Da holomorphe Funktionen glatt (d.h. beliebig oft komplex differenzierbar) und sogar analytisch sind, erhalten wir noch eine Folgerung.

Korollar 1.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Dann ist jede harmonische Funktion $u \in h(\Omega)$ glatt (und sogar reell-analytisch).

Harmonische Funktionen haben also im 2-dimensionalen Fall sehr viele Eigenschaften mit holomorphen Funktionen gemeinsam. Im restlichen Teil dieses Abschnitts wollen wir nun zeigen, dass dies auch für höhere Dimensionen der Fall ist. Dazu müssen wir zunächst an ein paar Dinge erinnern.

Erinnerung 1.7. (i) Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\} \quad \text{und} \quad B[x, r] := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}.$$

Dabei bezeichnet $|x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) **Transformationsformel für Sphären und Kugeln:** Ist $f : B[x, r] \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_{B(x,r)} f(y) dy = r^n \int_{B(0,1)} f(x + rz) dz$$

und

$$\int_{\partial B(x,r)} f(z) d\sigma(z) = r^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} f(x + r\zeta) d\sigma(\zeta).$$

Hierbei schreiben wir (wie im Prolog erwähnt) einfach dy statt $d\lambda^n(y)$, usw. Ferner ist σ das Oberflächenmaß auf den entsprechenden Sphären, siehe Anhang A.1.

(iii) **Schichtintegration:** Ist $f : B[x, r] \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_{B(x,r)} f(y) dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} f(z) d\sigma(z) \right) ds.$$

(iv) Für das n -dimensionale Volumen bzw. die $(n - 1)$ -dimensionale Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^n setzen wir

$$\omega_n := \lambda^n(B(0,1)) \quad \text{und} \quad \sigma_{n-1} := \sigma(\partial B(0,1)).$$

Dann folgt aus (ii) mit der Wahl $f = 1$, dass

$$\lambda^n(B(x,r)) = r^n \omega_n, \quad \sigma(\partial B(x,r)) = r^{n-1} \sigma_{n-1}$$

und aus (iii) folgt damit $\omega_n = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$. Weiterhin ist $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$.

Für die weitere Untersuchung der Laplace-Gleichung müssen wir nun sphärische und Kugelmittel von Funktionen betrachten. Warum dies eine Rolle spielt, wird in Lemma 1.9 klar werden. Wir haben aber in den Übungen auch bereits gesehen, dass der Laplace-Operator mit Rotationen (oder allgemeiner: orthogonalen Abbildungen) vertauscht. Auch dies deutet schon an, dass es Sinn machen kann, die Werte von Funktionen auf den rotationssymmetrischen Sphären oder Kugeln zu betrachten.

Übungsblatt 1

Definition 1.8. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(\Omega)$, $x \in \Omega$ und $r_0 > 0$ so gewählt, dass $B[x, r_0] \subseteq \Omega$. Ferner sei $0 \leq r \leq r_0$. Dann nennt man

(i)

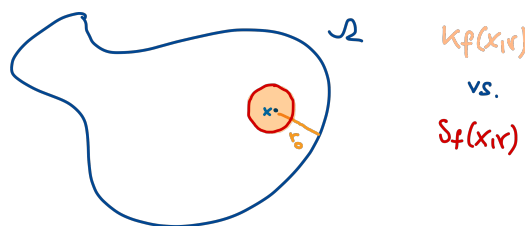
$$S_f(x,r) := \begin{cases} \frac{1}{\sigma(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} f(\xi) d\sigma(\xi), & \text{falls } r > 0 \\ f(x), & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

das **sphärische Mittel** von f auf $\partial B[x, r]$, und

(ii)

$$K_f(x,r) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) dy, & \text{falls } r > 0 \\ f(x), & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

das **Kugelmittel** von f auf $B(x,r)$.



Integrationsbereich bei Kugel- bzw. sphärischem Mittel.

Lemma 1.9. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^m(\Omega)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $x \in \Omega$ und $r_0 > 0$ so gewählt, dass $B[x, r_0] \subseteq \Omega$.

(i) Es gilt

$$S_f(x, r) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} f(x + r\zeta) d\sigma(\zeta), \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

(ii) Die Abbildung $[0, r_0] \ni r \mapsto S_f(x, r) \in \mathbb{R}$ ist in $C^m([0, r_0])$.

(iii) Ist $f \in C^2(\Omega)$, so gilt

$$\partial_r S_f(x, r) = \frac{r}{n} K_{\Delta f}(x, r), \quad 0 \leq r \leq r_0$$

und

$$\Delta f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} (S_f(x, r) - f(x)).$$

Bemerkung 1.10. (i) Die letzte Gleichung zeigt, dass $\Delta f(x)$ (bis auf einen Skalierungsfaktor) ungefähr angibt, wie weit f auf kleinen Sphären um x im Mittel von $f(x)$ abweicht. Dies liefert eine anschauliche Interpretation der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t v(x, t) = \Delta_x v(x, t)$. Ist die mittlere Temperatur $v(\cdot, t)$ auf kleinen Sphären um x größer als die Temperatur $v(x, t)$ in x , so wird die Temperatur in x im nächsten Moment ansteigen.

(ii) Analoge Aussagen können auch für das Kugelmittel gezeigt werden.

Beweis (von Lemma 1.9). (i) Folgt aus der Transformationsformel für Sphären (Erinn. 1.7 (ii)).

(ii) Folgt unter Verwendung von Teil (i) aus dem Satz über die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von Parameterintegralen (vergleiche Satz A.2), da die Funktion $[0, r_0] \ni r \mapsto f(x + r\zeta)$ m -mal stetig differenzierbar ist.

(iii) Mit dem Argument in Teil (ii) darf man Ableitung und Integral vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} \partial_r S_f(x, r) &= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{d}{dr} f(x + r\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla f(x + r\zeta), \zeta \rangle d\sigma(\zeta) \stackrel{\text{E.1.7(ii)}}{=} \frac{1}{r^{n-1} \sigma_{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla f(z), \frac{z-x}{r} \rangle d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{r^{n-1} \sigma_{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla f(z), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \stackrel{\text{S.A.1)}}{=} \frac{1}{r^{n-1} \sigma_{n-1}} \int_{B(x,r)} \operatorname{div}(\nabla f(y)) dy \\ &= \frac{1}{r^{n-1} \sigma_{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y) dy \stackrel{\text{E.1.7(iv)}}{=} \frac{r}{n} K_{\Delta f}(x, r). \end{aligned}$$

Im Folgenden schreiben wir $S(r) := S_f(x, r)$. Dann folgt aus der vorherigen Rechnung, dass $S'(0) = 0$ und genauso

$$S''(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S'(r) - S'(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S'(r)}{r} = \frac{1}{n} \lim_{r \rightarrow 0} K_{\Delta f}(x, r) = \frac{1}{n} \Delta f(x).$$

Aber nach dem Satz von Taylor gilt

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(S(r) - S(0) - S'(0)r - \frac{S''(0)}{2} r^2 \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{S(r) - f(x)}{r^2} - \frac{1}{2n} \Delta f(x) \right),$$

was den Beweis von Teil (iii) beschließt. \square

Teil (iii) des vorherigen Lemmas zeigt, dass f harmonisch ist, falls f mit seinen sphärischen Mittelwerten übereinstimmt (d.h. $S_f(x, r) = f(x)$). Tatsächlich können harmonische Funktionen auf diese Weise sogar charakterisiert werden.

Satz 1.11. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $u \in h(\Omega)$.
- (ii) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) = S_u(x, r)$.
- (iii) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) = K_u(x, r)$.

Man nennt die äquival. Eigenschaften (ii) und (iii) die **Mittelwerteigenschaft (MWE)** von u .^a

^aDie Äquivalenz dieser Aussagen gilt bereits im Fall, dass u nur stetig ist.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei $x \in \Omega$ und $B[x, r_0] \subseteq \Omega$. Ist u harmonisch, also $\Delta u = 0$ auf Ω , so ist auch das Kugelmittel $K_{\Delta u}(x, r) = 0$ für alle $0 \leq r \leq r_0$. Aus Lemma 1.9, Teil (iii), folgt

$$\partial_r S_u(x, r) = \frac{r}{n} K_{\Delta u}(x, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

d.h. $r \mapsto S_u(x, r)$ ist auf $[0, r_0]$ konstant. Also folgt $S_u(x, r) = S_u(x, 0) = u(x)$ für alle $0 \leq r \leq r_0$.

(ii) \Rightarrow (i): Aus Lemma 1.9, Teil (iii), folgt

$$\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} (S_u(x, r) - u(x)) = 0.$$

(ii) \Leftrightarrow (iii): Übung. □

Übungsblatt 1

Wir wollen als nächstes zeigen, dass stetige Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft, und damit insbesondere auch harmonische Funktionen, automatisch beliebig oft differenzierbar sind. Damit wird die Äquivalenz aus obigem Satz dann sogar schon im Falle $u \in C(\Omega)$ gelten. Als Vorarbeit hierzu müssen wir uns allerdings zunächst etwas mit **Faltungen** befassen. Diese werden es erlauben, nicht-differenzierbare Funktionen zu **glätten**.

Erinnerung 1.12. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Der **Träger** einer stetigen Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega,$$

d.h. durch den topologischen Abschluss der Menge, auf der φ nicht verschwindet. Man beachte, dass der Abschluss hier in Bezug auf Ω gebildet wird, d.h. $\text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$. Die Menge der auf Ω stetigen Funktionen mit **kompaktem Träger** bezeichnen wir mit

$$C_c(\Omega) := \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}.$$

Entsprechend setzen wir

$$C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

(ii) Eine messbare^a Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls

$$\int_K |f(x)| \, dx < \infty$$

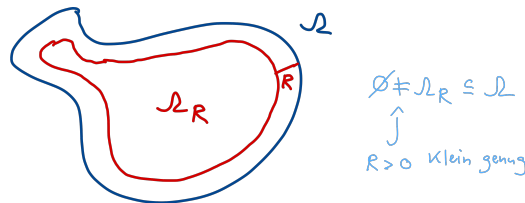
für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq \Omega$. Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\Omega)$.

^aMessbar bedeutet für uns immer Borel-messbar.

Im Folgenden setzen wir

$$\Omega_R := \{x \in \Omega : B[x, R] \subseteq \Omega\} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > R\}$$

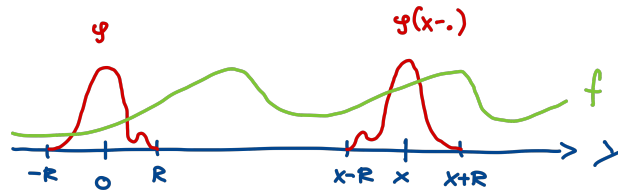
für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $R > 0$. Man beachte, dass mit Ω auch Ω_R offen ist und dass $\Omega_R = \emptyset$ gelten kann.



Definition 1.13. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq B[0, R]$. Ist $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$, so definieren wir die **Faltung** $\varphi * f : \Omega_R \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\Omega} \varphi(x - y)f(y) dy, \quad x \in \Omega_R.$$

Bemerkung 1.14. (i) Der Wert von $(\varphi * f)(x)$ ergibt sich also als ein mittels $\varphi(x - \cdot)$ gewichtetes Integralmittel von f .



(ii) Das Integral in der Definition der Faltung existiert, denn für $x \in \Omega_R$ ist $B[x, R] \subseteq \Omega$ und $\varphi(x - y) = 0$ für $y \notin B[x, R]$. Also gilt

$$\int_{\Omega} |\varphi(x - y)f(y)| dy = \int_{B[x, R]} |\varphi(x - y)f(y)| dy \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_{B[x, R]} |f(y)| dy < \infty,$$

da f lokal integrierbar ist.

(iii) Im wichtigen Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ gilt $\Omega_R = \mathbb{R}^n$ für alle $R > 0$, d.h. hier ist die Faltung auf ganz \mathbb{R}^n definiert: $\varphi * f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Mittels Substitution sehen wir ferner sofort, dass die Faltung in diesem Fall **kommutativ** ist, d.h.

$$(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z)\varphi(z) dz =: (f * \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Nun wollen wir zeigen, dass das Falten mit einer glatten Funktion eine Glättung der Ausgangsfunktion bewirkt (durch das Mitteln mit der glatten Funktion wird der Graph von f in gewissem Sinne glatt „geschmiert“). Dazu setzen wir

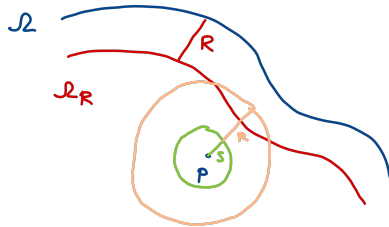
$$\partial^{\alpha} := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$$

für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Hierbei ist $\partial_i^0 u := u$ und die **Ordnung** von α ist definiert als $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Satz 1.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq B[0, R]$. Dann gilt

$$\varphi * f \in C^k(\Omega_R) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$.



Skizze zum Beweis von Satz 1.15

Beweis. Sei $p \in \Omega_R$ und $0 < s < \text{dist}(p, \partial\Omega_R)$. Dann gilt $B[p, R+s] \subseteq \Omega$ und $B[p, s] \subseteq \Omega_R$.

(i) *Stetigkeit in p:* Für $x \in B[p, s]$ gilt $B[x, R] \subseteq B[p, R+s] \subseteq \Omega$ und somit

$$\begin{aligned} |(\varphi * f)(x) - (\varphi * f)(p)| &= \left| \int_{\Omega} \varphi(x-y)f(y) dy - \int_{\Omega} \varphi(p-y)f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B[x, R]} \varphi(x-y)f(y) dy - \int_{B[p, R]} \varphi(p-y)f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B[p, R+s]} (\varphi(x-y) - \varphi(p-y))f(y) dy \right| \\ &\leq \sup\{|\varphi(z) - \varphi(z')| : |z - z'| \leq s\} \cdot \int_{B[p, R+s]} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Das Integral existiert, da $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ und aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von φ konvergiert das Supremum für $s \rightarrow 0$ gegen 0.

(ii) *Partielle Differenzierbarkeit in p:* Es sei $k \geq 1$. Wir zeigen zunächst, dass $\varphi * f$ in p nach $x_j, 1 \leq j \leq n$, partiell differenzierbar ist. Sei $e_j \in \mathbb{R}^n$ der j -te Einheitsvektor und $|t| < s$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) folgt (unter Benutzung von $\frac{d}{ds} \varphi(p + se_j - y) = \partial_j \varphi(p + se_j - y)$)

$$\begin{aligned} (\varphi * f)(p + te_j) - (\varphi * f)(p) &= \int_{\Omega} (\varphi(p + te_j - y) - \varphi(p - y)) f(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^t \partial_j \varphi(p + se_j - y) ds \right) f(y) dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \left(\int_{\Omega} \partial_j \varphi(p + se_j - y) f(y) dy \right) ds \\ &= \int_0^t ((\partial_j \varphi) * f)(p + se_j) ds. \end{aligned}$$

Wir haben in (i) gezeigt, dass der letzte Integrand stetig in s ist (denn $\partial_j \varphi$ erfüllt die gleichen Voraussetzungen wie φ), d.h. eine erneute Anwendung des HDI zeigt, dass $\partial_j(\varphi * f)$ existiert und dass $\partial_j(\varphi * f) = (\partial_j \varphi) * f$. Die allgemeine Aussage folgt nun per Induktion. \square

Eine besondere Rolle werden Faltungen mit sogenannten Glättungskernen spielen.

Definition 1.16. Sei $\varepsilon > 0$. Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Glättungskern auf $B(0, \varepsilon)$** , falls

- (i) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,
- (ii) $\text{supp}(\varphi) \subseteq B[0, \varepsilon]$, und
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$.

Bemerkung 1.17. In den Übungen zeigen Sie, dass solche Glättungskerne existieren und diese sogar radialsymmetrisch gewählt werden können.

Übungsblatt 2

Nun können wir uns wieder den harmonischen Funktionen widmen.

Satz 1.18. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(\Omega)$ habe die Mittelwerteigenschaft. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und φ ein radialsymmetrischer Glättungskern auf $B(0, \varepsilon)$, d.h. $\varphi(x) = \rho(|x|)$ für eine Funktion $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Nach Satz 1.15 gilt dann $\varphi * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, wobei $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) > \varepsilon\}$. Wir zeigen nun, dass $u = \varphi * u$ auf Ω_ε gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

Tatsächlich gilt für $x \in \Omega_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} (\varphi * u)(x) &= \int_{\Omega} \varphi(x-y)u(y) dy = \int_{B[x, \varepsilon]} \varphi(x-y)u(y) dy \\ &\stackrel{\text{rad.sym.}}{=} \int_{B[x, \varepsilon]} \varphi(y-x)u(y) dy = \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x, s)} \underbrace{\varphi(\xi-x)}_{=\rho(|\xi-x|)=\rho(s)} u(\xi) d\sigma(\xi) \right) ds \\ &= \int_0^\varepsilon \rho(s) \left(\int_{\partial B(x, s)} u(\xi) d\sigma(\xi) \right) ds \stackrel{\text{MWE}}{=} u(x) \cdot \left(\sigma_{n-1} \int_0^\varepsilon s^{n-1} \rho(s) ds \right) = u(x). \end{aligned}$$

Hierbei folgt die letzte Gleichung wegen

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy = \int_{B[0, \varepsilon]} \varphi(y) dy = \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(0, s)} \varphi(\xi) d\sigma(\xi) \right) ds = \sigma_{n-1} \int_0^\varepsilon s^{n-1} \rho(s) ds.$$

□

Aus den Sätzen 1.18 und 1.11 erhalten wir damit die angekündigte **Verschärfung** von Satz 1.11.

Korollar 1.19. Für $u \in C(\Omega)$ sind äquivalent:

- (i) u hat die Mittelwerteigenschaft.
- (ii) u ist harmonisch.

In diesem Fall gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bemerkung 1.20. Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar zeigen, dass u in diesen Fällen nicht nur glatt sondern sogar reell-analytisch ist.

Wir wollen uns nun noch einer weiteren Eigenschaft zuwenden, die harmonische Funktionen mit holomorphen Funktionen gemein haben. Dazu sei an den Zusammenhangsbegriff erinnert.

Erinnerung 1.21. (i) Ist M ein metrischer Raum, so heißt M **zusammenhängend**, falls M sich *nicht* als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer und offener Teilmengen von M darstellen lässt. Dies ist genau dann der Fall, wenn M und \emptyset die einzigen Teilmengen von M sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (warum?). Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt zusammenhängend, falls A mit der induzierten Metrik zusammenhängend ist.

(ii) Ist M **wegzusammenhängend**, d.h. für alle $x, y \in M$ existiert $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ stetig mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$, so ist M auch zusammenhängend. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (sie gilt aber zum Beispiel für offene Teilmengen von normierten Räumen).

(iii) **Maximumprinzip für holomorphe Funktionen:** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in $p \in \Omega$ ein lokales Maximum, so muss f auf Ω konstant sein.

Wir wollen nun zeigen, dass auch harmonische Funktionen ein Maximumprinzip erfüllen. Dies gilt sogar für die größere Klasse der subharmonischen Funktionen.

Definition 1.22. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann nennen wir $u \in C(\Omega)$ **subharmonisch**, falls eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

- (i) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) \leq S_u(x, r)$.
- (ii) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) \leq K_u(x, r)$.

Hierbei sind S_u und K_u wie gehabt das sphärische bzw. Kugelmittel von u . Dass die **Mittelwertungleichungen** (i) und (ii) äquivalent sind, sieht man analog wie in Satz 1.11.

Bemerkung 1.23. (i) Die Namensgebung „subharmonisch“ erklärt sich am besten mit der folgenden Beobachtung: Ist $u \in C^2(\Omega)$, so gilt

$$u \text{ ist subharmonisch} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u \geq 0.$$

Insbesondere ist jede harmonische Funktion auch subharmonisch.

(ii) Sind $u, v \in C(\Omega)$ subharmonisch, so auch $\max(u, v)$. Damit ist etwa die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow \max(x, 0) \in \mathbb{R}$$

subharmonisch (aber nicht harmonisch!).

Übungsblatt 2

Im folgenden Satz bezeichnet $C(\overline{\Omega})$ die Menge der Funktionen $u \in C(\Omega)$, die sich stetig auf den Abschluss $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen. Die stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ wird weiterhin mit u bezeichnet.

Satz 1.24. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(\Omega)$ subharmonisch.

- (i) **Schwaches Maximumprinzip:** Ist Ω beschränkt und $u \in C(\overline{\Omega})$, so wird das Maximum von u auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen, d.h. es gilt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

- (ii) **Starkes Maximumprinzip:** Ist Ω zusammenhängend und besitzt u bei $x_0 \in \Omega$ ein globales Maximum, so ist u konstant.

Ist u sogar harmonisch, können wir diesen Satz auf die dann subharmonischen Funktionen $-u$ bzw. $|u| = \max(u, -u)$ anwenden und erhalten folgendes Korollar.

Korollar 1.25. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch, so gilt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad \text{und} \quad \max_{x \in \overline{\Omega}} |u|(x) = \max_{x \in \partial\Omega} |u|(x).$$

Ist Ω zusammenhängend und u nicht-konstant, so wird das Maximum und Minimum nur auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen.

Bemerkung 1.26. (a) Das schwache Maximumprinzip besagt, dass das globale Maximum von u (auch) auf dem Rand von Ω angenommen wird, schließt aber nicht aus, dass es auch im Inneren von Ω angenommen wird. Das starke Maximumprinzip schließt dies aus, es sei denn u ist konstant.

(b) Auf den Zusammenhang kann in (ii) nicht verzichtet werden: die harmonische Funktion $u : B(0,1) \cup B(2,1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u|_{B(0,1)} = 0$ und $u|_{B(1,2)} = 1$ erfüllt das starke Maximumprinzip offensichtlich nicht. Auch auf die Beschränktheit von Ω kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden.

(c) Subharmonische Funktionen können **lokale** Maxima besitzen, ohne konstant zu sein. Beispielsweise hat die Funktion $B(0,1) \in (x,y) \mapsto \max(x,0)$ in jedem Punkt (x,y) mit $x < 0$ ein lokales Maximum. Dieses Beispiel zeigt auch, dass subharmonische Funktionen kein vergleichbares Minimumprinzip erfüllen.

(d) Im Gegensatz zu subharmonischen Funktionen sind harmonische Funktionen reell-analytisch. Dies hat zur Folge, dass die Existenz eines lokalen Maximums bzw. Minimums in der zusammenhängenden Menge Ω die Konstanz von u nach sich zieht (ohne Beweis).

Übungsblatt 3

Nun müssen wir starkes und schwaches Maximumprinzip noch beweisen.

Beweis (von Satz 1.24). $u \in C(\Omega)$ sei subharmonisch.

(ii) Sei $x_0 \in \Omega$ eine globale Maximalstelle von u und A die Menge aller globaler Maximalstellen, d.h. $A := \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\} = u^{-1}(\{u(x_0)\})$. Da u stetig in Ω ist, ist A abgeschlossen in Ω . Wir wollen nun zeigen, dass A auch offen in Ω ist. Da Ω nach Annahme zusammenhängend und A auch nicht-leer ist (da $x_0 \in A$), folgt dann $A = \Omega$, d.h. u ist konstant.

Es sei also $x \in A$. Wir wählen $r > 0$, so dass $B[x,r] \subseteq \Omega$. Dann folgt aus der Mittelwertgleichung für das Kugelmittel, dass

$$u(x_0) \stackrel{x \in A}{=} u(x) \leq \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy,$$

was wir schreiben können als

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x,r)} (u(x_0) - u(y)) \, dy \leq 0.$$

Nun gilt nach Wahl von x_0 für den Integranden $u(x_0) - u(y) \geq 0$ für alle $y \in B(x,r)$, d.h. es folgt

$$\int_{B(x,r)} (u(x_0) - u(y)) \, dy = 0.$$

Da die nicht-negative Funktion $y \mapsto u(x_0) - u(y)$ zudem stetig ist, muss somit sogar

$$u(x_0) - u(y) = 0 \quad \text{also} \quad u(y) = u(x_0)$$

für alle $y \in B(x, r)$ gelten. Dies zeigt $B(x, r) \subseteq A$, d.h. A ist offen.

(i) Da sowohl $\partial\Omega$ als auch $\overline{\Omega}$ kompakt sind, existieren die auftretenden Maxima und werden angenommen. Sei $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit

$$u(x_0) := \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x).$$

Ist $x_0 \in \partial\Omega$, so sind wir fertig. Ist $x_0 \in \Omega$, so müssen wir $x_1 \in \partial\Omega$ finden, so dass $u(x_0) = u(x_1)$. Dies geht wie folgt: Wir wählen $x_1 \in \partial\Omega$ so, dass der Punkt den Abstand von x_0 zu $\partial\Omega$ realisiert, d.h.

$$\text{dist}(x_0, \partial\Omega) = |x_1 - x_0|.$$

Dies funktioniert, da die Funktion $\partial\Omega \ni y \mapsto |x_0 - y|$ stetig und $\partial\Omega$ kompakt ist. Setzen wir nun $r := |x_1 - x_0|$, so gilt $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ und $u(x_0) = \sup_{x \in B(x_0, r)} u(x)$, d.h. wegen (ii) ist $u|_{B(x_0, r)}$ konstant, hat also den Wert $u(x_0)$. Da u stetig und $x_1 \in \partial B(x_0, r)$ ist, muss damit auch $u(x_1) = u(x_0)$ gelten. \square

Wir beschließen das Kapitel mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Liouville über holomorphe Funktionen. Dieser besagt, dass eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konstant ist.

Satz 1.27 (von Liouville). Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Ist u nach oben oder unten beschränkt, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $u(x) \geq C$ bzw. $u(x) \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist u konstant.

Beweis. Übung. \square

2. Die Poisson-Gleichung

Stichpunkte. Poisson-Gleichung, Dirichlet-Problem, Randwertproblem (RWP), Wohlgestelltheit, Satz von Perron, 1. und 2. Greensche Formel, Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, Greensche Darstellungsformel, Newton-Potential, Greensche Funktion, Poisson-Kern, Poisson-Formel für die Kugel, Perronsche Methode

Im letzten Abschnitt haben wir uns mit den zeitlich stationären Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung befasst. Dies führte zur Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$. In diesem Abschnitt soll es nun etwas allgemeiner um die zeitlich stationären Lösungen der **inhomogenen** Wärmeleitungsgleichung gehen, d.h. um die Gleichung

$$\partial_t v(x, t) - \Delta_x v(x, t) = \tilde{f}(x).^1$$

und zeitunabhängige Lösungen der Form $v(x, t) = u(x)$. Dies führt auf die Gleichung $-\Delta u = \tilde{f}$. Um das Minuszeichen loszuwerden, setzen wir $f := -\tilde{f}$ und erhalten die **Poisson-Gleichung**²

$$\Delta u = f.$$

Bemerkung 2.1. Die Poisson-Gleichung spielt auch bei anderen physikalischen Prozessen eine wichtige Rolle, z.B.

- in der Elektrostatik: hierbei ist $-f$ eine gegebene Ladungsdichte (Ladungsmenge in kleinem Volumen um einen Raumpunkt) und u das elektrostatische Potential (d.h. $-\nabla u$ ist das elektrische Feld),
- in der Gravitation: hierbei ist $-f$ eine gegebene Massendichte und u das Gravitationspotential.

Man nennt die Poisson-Gleichung daher oft auch **Potential-Gleichung**.

Definition 2.2. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(\Omega)$.

- (i) Die Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt eine **(klassische) Lösung** der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in Ω , falls

$$\forall x \in \Omega : \quad \Delta u(x) = f(x).$$

- (ii) Sei $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besteht das **Dirichlet^a-Problem für die Poisson-Gleichung** $\Delta u = f$ im Auffinden einer klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, welche auf dem Rand von Ω mit g übereinstimmt, d.h. es gilt

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Man nennt f und g die **Daten** des Dirichlet-Problems.

^aPeter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859

¹Im Prolog haben wir gezeigt, dass mittels \tilde{f} z.B. eine gegebene (in diesem Fall zeitlich stationäre) Wärmezufuhr in Ω modelliert werden kann.

²Siméon Denis Poisson, 1781-1840

Bemerkung 2.3. Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung ist ein Beispiel eines **Randwertproblems (RWP)**. Solche Randwerte sind oft physikalisch begründet. Bei der Wärmeleitung könnten wir die Vorgabe $u|_{\partial\Omega} = 0$ etwa so interpretieren, dass der beobachtete Körper von außen gekühlt wird. Aus mathematischer Sicht haben wir die Hoffnung, dass die Vorgabe von Randwerten zu eindeutigen Lösungen führt. Ohne eine solche Vorgabe hat die Poisson-Gleichung, sofern sie überhaupt lösbar ist, stets unendlich viele Lösungen. Denn ist u eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ auf Ω und u_0 harmonisch auf Ω , so ist auch $u + u_0$ eine Lösung, denn $\Delta(u + u_0) = \Delta u + \Delta u_0 = \Delta u = f$.

Beginnen wir unsere Untersuchung mit dem Dirichlet-Problem auf der Kugel. Dieses ist im Falle **konstanter Daten** sehr einfach explizit lösbar (den Fall nicht-konstanter Daten werden wir uns erst später ansehen).

Beispiel 2.4. Auf $\Omega = B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir die konstanten Daten $f := f_0$ und $g := g_0$, d.h. wir suchen eine Lösung von

$$\Delta u(x) = f_0 \quad (|x| < R) \quad \text{und} \quad u(x) = g_0 \quad (|x| = R).$$

Eine Lösung dieses Problems ist gegeben durch

$$(\star) \quad u(x) := g_0 - \frac{f_0}{2n}(R^2 - |x|^2), \quad |x| \leq R.$$

Tatsächlich ist die Lösung (\star) die einzig mögliche, wie das nächste Resultat zeigt.

Proposition 2.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen **und beschränkt**. Ferner seien $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ auf } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und diese erfüllt die Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \frac{r^2}{2n} \|f\|_\infty,$$

sofern Ω in einer Kugel vom Radius r enthalten ist.

Vorsicht: die Supremums- bzw. Maximumnorm wird, wenn nicht anders gesagt, immer in Bezug auf den Definitionsbereich der Funktion gebildet, d.h. die Ungleichung bedeutet ausgeschrieben, dass

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + \frac{r^2}{2n} \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Beweis. (i) Sind u_1, u_2 zwei Lösungen, so ist $u_1 - u_2$ harmonisch in Ω und verschwindet auf $\partial\Omega$. Mit dem Korollar 1.25 zum Maximumprinzip folgt $|u_1 - u_2| = 0$ auf $\overline{\Omega}$, d.h. $u_1 = u_2$.

(ii) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\Omega \subseteq B(0, r)$ und $u \geq 0$.^a Ferner können wir annehmen, dass f beschränkt ist (sonst ist die Ungleichung klar). Sei $g_0 := \|g\|_\infty$ und $f_0 := \|f\|_\infty$. Wir betrachten die Funktion $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ definiert

durch

$$v(x) := u(x) - g_0 - \frac{f_0}{2n}(r^2 - |x|^2), \quad x \in \Omega.$$

Dann gilt

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + f_0 = f(x) + f_0 \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

d.h. v ist subharmonisch auf Ω . Da $r^2 - |x|^2 \geq 0$ auf $\partial\Omega \subseteq B(0, r)$, folgt ferner

$$v|_{\partial\Omega} \leq u|_{\partial\Omega} - g_0 = g - g_0 \leq 0.$$

Aus dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen (Satz 1.24) folgt damit $v \leq 0$ auf $\overline{\Omega}$, d.h. für alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt

$$u(x) \leq g_0 + \frac{f_0}{2n}(r^2 - |x|^2) \leq g_0 + \frac{f_0}{2n}r^2.$$

Da $u \geq 0$, folgt die behauptete Abschätzung. \square

^aAnsonsten betrachte $\tilde{u} : \Omega - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{u}(x) := u(x + x_0) + \|u\|_\infty$, falls $\Omega \subseteq B(x_0, r)$, und entsprechend $\tilde{f}(x) = f(x + x_0)$, $\tilde{g}(x) = g(x + x_0) + \|u\|_\infty$.

Bemerkung 2.6. (i) Die Proposition 2.5 liefert neben der Eindeutigkeit auch die Stabilität der Lösungen für das Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung im Falle eines beschränkten Ω : Gilt

$$\begin{array}{ll} \Delta u_1 = f_1 \text{ auf } \Omega & \Delta u_2 = f_2 \text{ auf } \Omega \\ u_1 = g_1 \text{ auf } \partial\Omega & u_2 = g_2 \text{ auf } \partial\Omega, \end{array}$$

so gilt

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_\infty + \frac{r^2}{2n} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

(ii) Nach Hadamard^a nennt man ein RWP **wohlgestellt**, falls

- eine Lösung existiert,
- die Lösung eindeutig ist, und
- die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Letzteres bedeutet, dass „kleine“ Änderungen in den Daten auch nur „kleine“ Änderungen an den Lösungen bewirken.^b Zur Wohlgestelltheit fehlt hier also „nur“ noch die Existenz von Lösungen.

(iii) Für unbeschränktes Ω müssen die Lösungen des Dirichlet-Problems nicht mehr eindeutig sein. Beispielsweise ist auf $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ durch

$$u_a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_a(x, y) := a \cdot x$$

eine Lösung des Dirichlet-Problems $\Delta u = 0$ auf Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ gegeben.

^aJacques Hadamard, 1865-1963

^bEtwas genauer ist hierbei die Stetigkeit der Abbildung

$$T : C(\Omega) \times C(\partial\Omega) \rightarrow C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad T(f, g) = u$$

gemeint, die die Daten (f, g) auf die zugehörige Lösung u abbildet. Hierzu muss der Daten- bzw. Lösungsraum natürlich mit einer Topologie bzw. Metrik versehen werden. Im obigen Fall ist die Abbildung zum Beispiel stetig, sofern wir beide Räume mit der jeweiligen Supremums- bzw. Maximumsnorm versehen.

Wie steht es um die Lösbarkeit der Poisson-Gleichung bzw. des zugehörigen Dirichlet-Problems? Hierzu betrachten wir zunächst das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung und beginnen mit

einem Gegenbeispiel.

Beispiel 2.7. Es sei $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\}$ in \mathbb{R}^2 . Wir betrachten das RWP

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 \text{ für } 0 < |x| < 1 \\ u(x) &= 0 \text{ für } |x| = 1 \\ u(0) &= 1\end{aligned}$$

und nehmen an es existiere eine Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Aus den Übungen wissen wir, dass dann auch $u \circ T$ für jede Drehmatrix $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ harmonisch und damit ebenfalls eine Lösung des RWP ist. Aber nach Proposition 2.5 ist die Lösung eindeutig, d.h. es müsste $u = u \circ T$ für jedes solche T gelten. Dies ist nur möglich, wenn u radialsymmetrisch ist. Wiederum aus den Übungen kennen wir aber die Gestalt von radialsymmetrischen harmonischen Funktionen: es ist $u(x) = a + b \ln |x|$ für gewisse Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Da u beschränkt ist, muss damit $b = 0$ gelten und u konstant sein. Damit können die Randbedingungen aber nicht erfüllt werden, d.h. unsere Annahme war falsch und das RWP ist nicht lösbar.

Es stellt sich heraus, dass die Struktur des Randes im Beispiel zur Unlösbarkeit des Dirichlet-Problems führt und ebenjenes für beschränkte offene Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einem sogenannten **regulären Rand** $\partial\Omega$ immer lösbar ist. Wir wollen an dieser Stelle nicht erklären, was genau diese Regularität bedeutet (siehe Definition 2.31 unten). Es sei aber schon erwähnt, dass dies zum Beispiel der Fall ist, falls Ω konvex ist oder einen C^2 -Rand besitzt.

Satz 2.8 (von Perron). Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\partial\Omega$ sei regulär. Ferner sei $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Auf den (langen und nicht-konstruktiven) Beweis des Satzes von Perron³ wollen wir erst am Ende dieses Kapitels eingehen. Wir wollen den Satz aber schon benutzen, um etwas über die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für die allgemeine Poisson-Gleichung auszusagen. Das folgende Lemma, welches sofort aus der Linearität des Laplace-Operators folgt, ist dabei hilfreich.

Lemma 2.9. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$(*) \quad \Delta u = f \text{ auf } \Omega$$

und $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung des RWP

$$(**) \quad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{auf } \Omega \\ v = g - u & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist $w := u + v$ eine Lösung von

$$(***) \quad \begin{cases} \Delta w = f \text{ auf } \Omega \\ w = g \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

³Oskar Perron, 1880-1975

Finden wir also eine beliebige Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ der Poisson-Gleichung (\star) (die Randwerte von u spielen keine Rolle), so liefert der Satz von Perron, sofern Ω beschränkt und $\partial\Omega$ regulär ist, die eindeutige Lösung von $(\star\star)$ und wir erhalten somit eine (eindeutige) Lösung von $(\star\star\star)$.

Im Folgenden müssen wir also die Lösbarkeit der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ studieren. Dazu benötigen wir zunächst ein Hilfsmittel, die sogenannten Greenschen Formeln. Hierzu verwenden wir vortan die Notation

$$\partial_\nu f(z) := \langle \nabla f(z), \nu(z) \rangle$$

für die äußere **Normalenableitung** von f im Punkt $z \in \partial\Omega$. Diese existiert (siehe Anhang A.1), sofern $f \in C^1(\overline{\Omega})$ und Ω einen C^1 -Rand besitzt. Hierbei ist für $n \in \mathbb{N}$

$$C^n(\overline{\Omega}) := \{f \in C^n(\Omega) : \partial^\alpha f \text{ hat stetige Fortsetzung auf } \overline{\Omega}, |\alpha| \leq n\}$$

und wir notieren die stetigen Fortsetzungen von $\partial^\alpha f$ (und damit gebildeter Größen wie ∇f) auf $\overline{\Omega}$ wieder mit dem gleichen Symbol.

Satz 2.10. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit C^1 -Rand. Ferner sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$ und $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt die **1. Greensche Formel**^a

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + g(x)\Delta f(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu f(z)g(z) \, d\sigma(z).$$

Ist auch $g \in C^2(\overline{\Omega})$, gilt auch die **2. Greensche Formel**

$$\int_{\Omega} (g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} (g(z)\partial_\nu f(z) - f(z)\partial_\nu g(z)) \, d\sigma(z).$$

^aGeorge Green, 1793-1841. Man kann sich die 1. Formel als Verallgemeinerung der Regel der partiellen Integration merken: $\int_a^b f' \cdot g' \, dx + \int_a^b f'' \cdot g \, dx = (f'(b)g(b) - f'(a)g(a))$.

Beweis. Da

$$\operatorname{div}(g \cdot \nabla f) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f,$$

folgt die 1. Greensche Formel aus dem Divergenzsatz A.1 angewandt auf $F := g \cdot \nabla f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Die 2. Greensche Formel folgt, wenn wir in der originalen 1. Greenschen Formel die Rollen von f und g vertauschen und das Ergebnis von der originalen Formel subtrahieren. \square

In den Übungen haben wir uns mit den radialsymmetrischen harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beschäftigt und gesehen, dass diese von der Bauart

$$x \mapsto a + b \ln |x| \quad (n = 2) \quad \text{bzw.} \quad x \mapsto a + \frac{b}{|x|^{n-2}} \quad (n \geq 3)$$

für frei wählbare Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ sind. Für eine spezielle Wahl der Konstanten (die sich später erklären wird) geben wir diesen harmonischen Funktionen nun einen eigenen Namen.

Definition 2.11. Sei $n \geq 2$. Man nennt die harmonische Funktion $L : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{falls } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_{n-1}} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}$$

die **Fundamentallösung der Laplace-Gleichung** bzw. **des Laplace-Operators**.^a

^aSpäter werden wir Fundamentallösungen in einem allgemeineren Kontext betrachten, siehe Kapitel 5.

Wie wir sehen werden, lässt sich die Fundamentallösung verwenden, um Integraldarstellungen für die Lösungen der Poisson-Gleichung zu gewinnen. Bevor wir hierzu kommen, halten wir zwei einfache Eigenschaften der Fundamentallösung fest.

Lemma 2.12. (i) Für $y \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$, mit $|y| = r > 0$ gilt

$$\nabla L(y) = \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}} \cdot \frac{y}{r}.$$

Insbesondere folgt für die Normalenableitung von L auf $\partial B(0, r)$, dass

$$\partial_\nu L(y) = \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}}.$$

(ii) Es gilt $L \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_j L \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n), j = 1, \dots, n$. Hierbei können $L(0)$ und $\partial_j L(0)$ beliebig gewählt werden.^a

^aDie Wahl des Wertes von L bzw. $\partial_j L$ auf der Lebesgue-Nullmenge $\{0\}$ hat keinen Einfluss auf die Existenz oder Werte der zugehörigen Integrale.

Beweis. Übung. □

Übungsblatts 4

In der folgenden Integraldarstellung für C^2 -Funktionen verwenden wir für festes $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$ die Notation $\partial_{\nu(y)} L(x - y)$ für die Normalenableitung der Funktion $y \mapsto L(x - y)$. Aufgrund der radialen Symmetrie von L gilt dann

$$\partial_{\nu(y)} L(x - y) = \langle \nabla L(y - x), \nu(y) \rangle \quad \text{und} \quad \partial_{\nu(y)} L(0 - y) = \partial_\nu L(y).$$

Satz 2.13 (Greensche Darstellungsformel). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit C^1 -Rand. Ferner sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\Omega} L(x - y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} (L(x - y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_{\nu(y)} L(x - y)) d\sigma(y).$$

Man beachte, dass die auftretenden Integrale wegen Teil (ii) des vorherigen Lemmas existieren.

Beweis. Eine kurze Überlegung zeigt, dass es genügt, den Fall $0 \in \Omega$ zu betrachten und die Gleichung für $x = 0$ zu beweisen (anschließend betrachte $w : \{x\} - \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $w(z) := u(x - z)$). Wir müssen also zeigen, dass

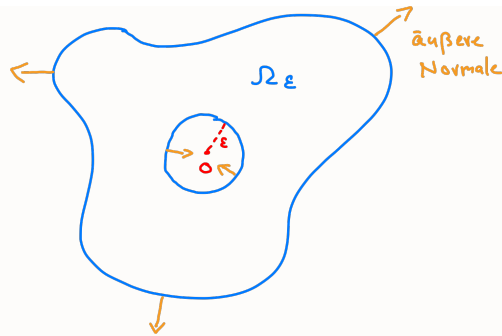
$$\begin{aligned} u(0) &= \int_{\Omega} L(0 - y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} (L(0 - y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_{\nu(y)} L(0 - y)) d\sigma(y) \\ &= \int_{\Omega} L(y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} (L(y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_\nu L(y)) d\sigma(y) \end{aligned}$$

oder kurz

$$u(0) = \int_{\Omega} L \Delta u dy - \int_{\partial\Omega} (L \partial_\nu u - u \partial_\nu L) d\sigma. \quad (\star)$$

Wir würden diese Formel gerne mit Hilfe der Greenschen Formeln beweisen. Leider besitzt L im Nullpunkt eine Singularität, so dass wir hierbei sehr vorsichtig vorgehen müssen.

Sei daher $\varepsilon > 0$, so dass $B[0, \varepsilon] \subseteq \Omega$ und sei $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus B[0, \varepsilon]$.



Auf dieser Menge können wir die zweite Greensche Formel nun mit $f = u, g = L$ anwenden und erhalten (da L außerhalb der 0 harmonisch ist)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} L \Delta u \, dy &= \int_{\Omega^\varepsilon} (L \Delta u - u \Delta L) \, dy = \int_{\partial \Omega^\varepsilon} (L \partial_\nu u - u \partial_\nu L) \, d\sigma \\ &= \int_{\partial \Omega} (L \partial_\nu u - u \partial_\nu L) \, d\sigma - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} (L \partial_\nu u - u \partial_\nu L) \, d\sigma, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung benutzen, dass ν immer die *äußere* Normale an den Rand des Integrationsgebietes bezeichnet (daher steht zwischen den Integralen ein Minus- und kein Pluszeichen). Wir erhalten also

$$- \int_{\partial B(0, \varepsilon)} L \partial_\nu u \, d\sigma + \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u \partial_\nu L \, d\sigma = \int_{\Omega^\varepsilon} L \Delta u \, dy - \int_{\partial \Omega} (L \partial_\nu u - u \partial_\nu L) \, d\sigma \quad (**)$$

und zeigen nun, dass wir aus dieser Gleichung durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ die Gleichung (*) erhalten.

Tatsächlich gilt für das erste Integral auf der rechten Seite von (**), dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} L \Delta u \, dy = \int_{\Omega} L \Delta u \, dy,$$

denn

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} L \Delta u \, dy - \int_{\Omega} L \Delta u \, dy \right| = \left| \int_{B(0, \varepsilon)} L \Delta u \, dy \right| \leq \|\Delta u\|_\infty \int_{B(0, \varepsilon)} |L| \, dy$$

und die rechte Seite geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0, da L lokal-integrierbar ist.

Nun untersuchen wir die linke Seite von (**). Im Folgenden betrachten wir nur den Fall $n \geq 3$, die Rechnungen für den Fall $n = 2$ sind analog und seien als Übung überlassen. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt zunächst wegen $|\nu(y)| = 1$, dass

$$|\partial_\nu u(y)| = |\langle \nabla u(y), \nu(y) \rangle| \leq |\nabla u(y)| \leq \max_{y \in \Omega} |\nabla u(y)| =: \|\nabla u\|_\infty$$

und damit wegen $L|_{\partial B(0, \varepsilon)} = \frac{1}{(2-n)\sigma_{n-1}\varepsilon^{n-2}}$, dass

$$\left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} L \partial_\nu u \, d\sigma \right| \leq \|\nabla u\|_\infty \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |L| \, d\sigma = \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\varepsilon}{(n-2)},$$

d.h.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} L \partial_\nu u \, d\sigma = 0.$$

Bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \partial_\nu L \, d\sigma = u(0). \quad (\star \star \star)$$

Hier nutzen wir, dass nach Lemma 2.12

$$\partial_\nu L = \frac{1}{\sigma_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \quad \text{und somit}^a \quad \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \partial_\nu L \, d\sigma = 1.$$

Daher können wir schließen

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \partial_\nu L \, d\sigma = u(0) + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u - u(0)) \partial_\nu L \, d\sigma.$$

Aber es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u - u(0)) \partial_\nu L \, d\sigma \right| &\leq \max_{|z|=\varepsilon} |u(z) - u(0)| \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\partial_\nu L| \, d\sigma}_{=1} \\ &= \max_{|z|=\varepsilon} |u(z) - u(0)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

da u stetig ist. Damit ist auch die Gültigkeit von $(\star \star \star)$ gezeigt und der Beweis komplett. \square

^aAn dieser Stelle wird die Wahl der Konstanten in der Fundamentallösung wichtig.

Bemerkung 2.14. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1 -Rand.

(i) Da L auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist, ist für $y \in \partial\Omega$ auch die Funktion

$$\Omega \ni x \mapsto k(x, y) := L(x - y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_{\nu(y)} L(x - y)$$

harmonisch.^a Da wir Ableitungen und Integral vertauschen dürfen (warum?), ist damit auch $\Omega \ni x \mapsto \int_{\partial\Omega} k(x, y) \, dy$ harmonisch.

(ii) Ist u eine Lösung von $\Delta u = f$ auf Ω , so impliziert die Greensche Darstellungsformel und Teil (i) also, dass

$$f(x) = \Delta u(x) = \Delta_x \left(\int_{\Omega} L(x - y) f(y) \, dy \right) - \Delta_x \left(\int_{\partial\Omega} k(x, y) \, dy \right) = \Delta_x \left(\int_{\Omega} L(x - y) f(y) \, dy \right)$$

für alle $x \in \Omega$. Dann muss also auch die Funktion $\Omega \ni x \mapsto \int_{\Omega} L(x - y) f(y) \, dy$ Lösung der Poisson-Gleichung sein.

^aFür den Term mit der Normalenableitung folgt dies daraus, dass die Operatoren $\partial_{\nu(y)}$ und Δ_x mit dem Satz von Schwarz vertauschen. Zum Beispiel gilt

$$\partial_{x_j} \partial_{\nu(y)} L(x - y) = \partial_{x_j} \langle \nabla_y L(x - y), \nu(y) \rangle = \partial_{x_j} \sum_{k=1}^n \nu_k(y) \partial_{y_k} L(x - y) = \sum_{k=1}^n \nu_k(y) \partial_{y_k} \partial_{x_j} L(x - y).$$

Die letzte Bemerkung liefert uns also einen möglichen Ansatz für eine Lösung der Poisson-Gleichung und führt zu folgender Definition.

Definition 2.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei messbar. Sofern die Abbildung

$$V := V_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) := \int_{\Omega} L(x-y)f(y) dy$$

definiert ist (d.h. $y \mapsto L(x-y)f(y)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ integrierbar), nennen wir sie das **Newton^a-Potential** zu f .

^aIsaac Newton, 1643-1727. Die Namenswahl wird durch Bemerkung 2.1 ein wenig erklärt.

Wir wollen nun zeigen, dass durch das Newton-Potential in der Tat eine Lösung der Poisson-Gleichung auf Ω definiert wird, sofern f hinreichend „schön“ ist. Zunächst betrachten wir den Fall, dass V kompakten Träger besitzt.

Lemma 2.16. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert das Newton-Potential $V = V_f$ und es gilt:

- (i) $V = f * L$ und V ist stetig auf \mathbb{R}^n .
- (ii) Ist $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $V \in C^k(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Ist $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\Delta V = f$ auf \mathbb{R}^n .^a

^aWir werden in Kapitel 5 sehen, dass V im allgemeineren Fall $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ zumindest noch eine sogenannte distributionelle Lösung von $\Delta V = f$ ist.

Beweis. (i-ii) Da $L \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, ist $f * L$ auf \mathbb{R}^n definiert (vergleiche Definition 1.13 und Bemerkung 1.14 (iii)). Ferner gilt

$$(f * L)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)L(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} L(x-z)f(z) dz = V(x).$$

Die Stetigkeit von V und Teil (ii) folgen damit sofort aus Satz 1.15.

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und wähle $\Omega := B(x, R)$ mit $R > 0$ so groß, dass $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$. Dann verschwinden f und $\partial_\nu f$ auf $\partial\Omega$ und die Greensche Darstellungsformel (mit $u = f$) zeigt:

$$f(x) = \int_{\Omega} L(x-y)\Delta f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} L(x-y)\Delta f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x-z)L(z) dz = (\Delta f * L)(x).$$

Aber aus Satz 1.15 folgt, dass $(\Delta f) * L = \Delta(f * L) = \Delta V$. □

Bemerkung 2.17. In der Übung werden Sie zeigen, dass das Newton-Potential V_f im Falle $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ die einzige Lösung von $\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^n ist, die im Unendlichen verschwindet (man vergleiche dazu auch Bemerkung 2.6 (iii)).

Übungsblatt 4

Schauen wir uns nun den Fall an, dass Ω eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Hierzu bezeichnen wir im nachfolgenden Satz die Einschränkung des Newton-Potentials auf eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ weiterhin mit V (statt dem korrekten aber umständlicheren $V|_U$).

Satz 2.18. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann gilt:

- (i) $V := V_f \in C(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) V ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ harmonisch.
- (iii) Ist $f \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so gilt $V \in C^k(\Omega)$.

(iv) Ist $f \in C^2(\Omega)$, so ist V eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta V = f$ auf Ω .^a

^aMit mehr Aufwand kann man sogar zeigen, dass man die Forderung $f \in C^2$ durch die Forderung $f \in C^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, (Hölder-stetig) ersetzen kann.

Beweis. Es sei $M := \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ existiert $R > 0$ mit $\Omega \subseteq B[x, R]$, da Ω beschränkt ist. Da L auf \mathbb{R}^n lokal-integrierbar ist, folgt

$$\int_{\Omega} |L(x-y)| |f(y)| dy \leq M \int_{B[x,r]} |L(x-y)| dy = M \int_{B[0,R]} |L(z)| dz < \infty,$$

d.h. das Newton-Potential ist auf \mathbb{R}^n definiert.

(i) Es seien $p \in \mathbb{R}^n$ und $x \in B(p, \delta)$ für $\delta > 0$. Dann gilt

$$|V(x) - V(p)| = \left| \int_{\Omega} [L(x-y) - L(p-y)] f(y) dy \right| \leq M \int_{\Omega} |L(x-y) - L(p-y)| dy.$$

Es genügt also zu zeigen, dass das Integral auf der rechten Seite für $x \rightarrow p$ gegen 0 geht. Dazu teilen wir auf: $\int_{\Omega} = \int_{\Omega \cap B(p, 2\delta)} + \int_{\Omega \setminus B(p, 2\delta)}$. Zunächst gilt wegen $B(p, 2\delta) \subseteq B(x, 3\delta)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B(p, 2\delta)} |L(x-y) - L(p-y)| dy &\leq \int_{B(x, 3\delta)} |L(x-y)| dy + \int_{B(p, 2\delta)} |L(p-y)| dy \\ &= \int_{B(0, 3\delta)} |L(z)| dz + \int_{B(0, 2\delta)} |L(z)| dy \end{aligned}$$

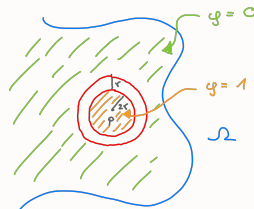
und hier geht die rechte Seite für $\delta \rightarrow 0$ gegen 0, da L lokal integrierbar ist. Schließlich gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow p} \int_{\Omega \setminus B(p, 2\delta)} |L(x-y) - L(p-y)| dy = 0,$$

denn die Funktion $(x, y) \mapsto L(x-y)$ ist gleichmäßig stetig auf $B[p, \delta] \times \overline{\Omega} \setminus B(p, 2\delta)$ (stetige Funktion auf kompaktem Definitionsbereich), d.h. $L(x-y) - L(p-y) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow p$ gleichmäßig in $y \in \overline{\Omega} \setminus B(p, 2\delta)$.

(ii) Da für jedes $y \in \Omega$ die Funktion $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \ni x \mapsto L(x-y)f(y)$ harmonisch ist, kann man genauso argumentieren wie in Bemerkung 2.14 (i).

(iii-iv) Wir nehmen an, dass $f \in C^k(\Omega), k \geq 1$. Sei $p \in \Omega$ beliebig und $r > 0$ mit $B(p, 4r) \subseteq \Omega$. Wir wollen zunächst zeigen, dass V auf $B(p, r)$ auch k -mal stetig differenzierbar ist. Zu diesem Zweck wählen wir $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \geq \varphi \geq 0$, $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in B(p, 2r)$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(p, 3r)$.^a



Wir schreiben nun $V = V_1 + V_2$ mit

$$V_1(x) := \int_{\Omega} L(x-y)(\varphi f)(y) dy, \quad V_2(x) := \int_{\Omega} L(x-y)((1-\varphi)f)(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Betrachten wir zunächst V_2 : Da $1 - \varphi$ in $B(p, 2r)$ verschwindet, gilt

$$V_2(x) = \int_{\Omega \setminus B(p, 2r)} L(x-y)((1-\varphi)f)(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir können V_2 also als das Newton-Potential zur Funktion $(1-\varphi)f|_{\Omega \setminus B(p, 2r)}$ betrachten. Nach Teil (ii) ist diese Funktion harmonisch, also glatt, in $B(p, r)$.

Betrachten wir nun V_1 : Da φf außerhalb von $B(p, 3r) \subseteq \Omega$ verschwindet, können wir diese Funktion durch 0 zu einer Funktion in $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Mit Lemma 2.16 folgt dann $V_1 \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und somit ist $V = V_1 + V_2$ damit k -mal stetig differenzierbar auf $B(p, r)$.

Ist schließlich $f \in C^2(\Omega)$, so zeigt Lemma 2.16 auch, dass $\Delta V_1 = \varphi f$, d.h.

$$(\Delta V)(p) = \Delta V_1(p) + \Delta V_2(p) = \Delta V_1(p) = (\varphi f)(p) = \varphi(p)f(p) = f(p).$$

□

^aIst $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein Glättungskern auf $B(0, \frac{r}{2})$, so erfüllt $\varphi = \eta * \mathbb{1}_{B(p, \frac{5r}{2})}$ die gewünschten Forderungen.

Übung

Bemerkung 2.19. (i) Das Newton-Potential $V = V_f$ hat als Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ also stets die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie die Funktion f . Tatsächlich gilt dies auch für jede andere Lösung u . Denn dann unterscheiden sich u und V um die harmonische (also glatte) Funktion $u - V$. Ist insbesondere $f \in C^\infty(\Omega)$, so gilt das gleiche für jede Lösung u von $\Delta u = f$. Dies ist eine spezielle Eigenschaft des Laplace-Operators, die man **Hypoelliptizität** nennt (dies werden wir in Kapitel 5 noch einmal in einem allgemeineren Kontext betrachten).

(ii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega$ regulär, so besitzt das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

mit Satz 2.18, Lemma 2.9 und dem Satz von Perron also für jedes $g \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C^2(\Omega)$ eine eindeutige klassische Lösung. Diese ist gegeben durch $u = V_f + w$, wobei w die Lösung des RWP

$$\Delta w = 0 \text{ auf } \Omega, \quad w = g - V_f \text{ auf } \partial\Omega$$

ist. Ist $f \in C^\infty(\Omega)$, so gilt auch in diesem Fall, dass auch $u \in C^\infty(\Omega)$. Denn sowohl das Newton-Potential V_f als auch die harmonische Funktion w sind glatt. Man beachte, dass dies selbst in dem Fall gilt, dass $g = u|_{\partial\Omega}$ nur stetig ist. Die Randdaten g werden also durch den Laplace-Operator in einem gewissen Sinne **geglättet**.

Unter Verwendung des (nicht-konstruktiven) Satzes von Perron haben wir das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung damit gelöst. Allerdings wissen wir wenig bis nichts darüber, wie man eine Lösung tatsächlich berechnen kann. Wir wollen nun versuchen, zumindest für gewisse Mengen Ω , hier noch Abhilfe zu schaffen.

Versuchen wir zunächst, eine dem Newton-Potential ähnliche Integrallösung

$$\bar{\Omega} \ni x \mapsto \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

des Dirichlet-Problems

$$\Delta u|_{\Omega} = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

zu finden. Schreiben wir dieses Integral als

$$\int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy = V_f(x) - \int_{\Omega} (L(x-y) - G(x, y)) f(y) dy,$$

so könnte der Ansatz aufgrund der Eigenschaften von V_f funktionieren, falls $x \mapsto L(x - y) - G(x, y)$ harmonisch ist und falls $G(x, \cdot) = 0$, sofern $x \in \partial\Omega$. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 2.20. Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt

$$G = G_\Omega : (\overline{\Omega} \times \Omega) \setminus \{(x, x) : x \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Greensche Funktion zu Ω , falls für alle $y \in \Omega$ gilt

- (i) $G(x, y) = 0$ falls $x \in \partial\Omega$,
- (ii) die Funktion

$$\overline{\Omega} \setminus \{y\} \ni x \mapsto L(x - y) - G(x, y)$$

lässt sich zu einer harmonischen Funktion $h_y \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ fortsetzen. Diese wird **Korrekturfunktion** bei y genannt.

Für später merken wir uns, dass wir die Greensche Funktion via

$$G(x, y) = L(x - y) - h_y(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \Omega, \quad x \neq y$$

aus den zugehörigen Korrekturfunktionen zurückgewinnen können.

Bemerkung 2.21. (i) Die Existenz der Greenschen Funktion ist äquivalent dazu, dass für jedes $y \in \Omega$ das Dirichlet-Problem

$$\Delta_x h_y(x) = 0 \text{ für } x \in \Omega, \quad h_y(x) = L(x - y) \text{ für } x \in \partial\Omega$$

eine Lösung $h_y \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ besitzt. Laut Proposition 2.5 besitzt dieses Dirichlet-Problem für **beschränktes** Ω höchstens eine klassische Lösung, d.h. in diesem Fall existiert auch höchstens eine Greensche Funktion zu Ω . Ist $\partial\Omega$ darüber hinaus regulär, so existiert die Greensche Funktion zu Ω nach dem Satz von Perron.

(ii) Für $y \in \Omega$ ist die Funktion $\Omega \ni x \mapsto G(x, y)$ lokal integrierbar, da dies für $\Omega \ni x \mapsto L(x - y)$ und $\Omega \ni x \mapsto h_y(x)$ gilt (hier kann wieder $G(y, y)$ beliebig gewählt werden).

(iii) Für alle $y \in \Omega$ ist die Funktion $x \mapsto L(x - y)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Daher hat $G(\cdot, y)$ stets die gleichen Glattheitseigenschaften wie h_y . Zum Beispiel gilt stets

$$G(\cdot, y) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{y\}) \cap h(\Omega \setminus \{y\}).$$

Ferner gilt

$$G(\cdot, y) \in C^k(\overline{\Omega} \setminus \{y\}) \Leftrightarrow h_y \in C^k(\overline{\Omega})$$

für $k \in \mathbb{N}$. Schließlich gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow y} (L(x - y) - G(x, y)) = h_y(y), \quad y \in \Omega,$$

d.h. G besitzt auf der Diagonalen die gleiche Art von Singularität wie L in der 0. Insbesondere gilt $\lim_{x \rightarrow y} G(x, y) = -\infty$.

Mit Hilfe des Greenschen Darstellungssatzes und der Greenschen Funktion können wir nun die Lösungen von $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = g$ tatsächlich mittels Integralen darstellen.

Satz 2.22. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1 -Rand. Ferner existiere die Greensche Funktion G zu Ω und für die zugehörigen Korrekturfunktionen gelte $h_y \in C^2(\overline{\Omega})$ für alle $y \in \Omega$. Sind $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ und ist $u \in C^2(\overline{\Omega})^a$ eine Lösung von

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

so gilt

$$(\diamond) \quad u(p) = \int_{\Omega} G(x, p) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} K(x, p) g(x) d\sigma(x), \quad p \in \Omega,$$

wobei

$$K(x, p) := K_{\Omega}(x, p) := \partial_{\nu(x)} G(x, p)$$

der sogenannte **Poisson-Kern** (des Laplace-Operators) in Ω ist.

^aHier fordern wir also, ähnlich wie zuvor bei der Korrekturfunktion, etwas mehr als das übliche $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Beweis. Sei $p \in \Omega$. Da $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = g$ folgt aus der Greenschen Darstellungsformel (Satz 2.13), dass

$$\begin{aligned} u(p) &= \int_{\Omega} L(p-x) f(x) dx - \int_{\partial\Omega} (L(p-x) \partial_{\nu} u(x) - g(x) \partial_{\nu(x)} L(p-x)) d\sigma(x) \\ (\star) \quad &= \int_{\Omega} L(x-p) f(x) dx - \int_{\partial\Omega} (L(x-p) \partial_{\nu} u(x) - g(x) \partial_{\nu(x)} L(x-p)) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Nun sei $h_p \in h(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ die zugehörige Korrekturfunktion in p . Dann folgt aus der 2. Greenschen Formel, dass

$$0 = \int_{\Omega} (h_p \Delta u - u \Delta h_p) dx - \int_{\partial\Omega} (h_p \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} h_p) d\sigma,$$

d.h. hier folgt wegen $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = g, h_p|_{\partial\Omega} = L(\cdot - p)$ und $\Delta h_p = 0$, dass

$$(\star\star) \quad 0 = \int_{\Omega} h_p(x) f(x) dx - \int_{\partial\Omega} (L(x-p) \partial_{\nu} u(x) - g(x) \partial_{\nu} h_p(x)) d\sigma(x).$$

Ziehen wir $(\star\star)$ von (\star) ab, so folgt

$$u(p) = \int_{\Omega} \underbrace{(L(x-p) - h_p(x))}_{=G(x,p)} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu(x)} \underbrace{(L(x-p) - h_p(x))}_{=G(x,p)} g(x) d\sigma(x).$$

□

Bemerkung 2.23. (a) Betrachten wir den Fall $g = 0$ mit dem wir gestartet waren, so folgt also für eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ von $\Delta u|_{\Omega} = f, u|_{\partial\Omega} = 0$, dass

$$u(p) = \int_{\Omega} G(x, p) f(x) dx.$$

Dies überrascht ein wenig, sind wir in unserem Ansatz doch von der Formel

$$u(p) = \int_{\Omega} G(p, x) f(x) dx$$

ausgegangen. Tatsächlich führt beides zum gleichen Ergebnis, da die Greensche Funktion symmetrisch in ihren beiden Argumenten ist (siehe unten).

(b) Durch die Formel (\diamond) muss unter den angegebenen Voraussetzungen leider umgekehrt nicht automatisch eine Lösung von $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = g$ gegeben sein. Weiß man jedoch a priori, dass eine (dann eindeutige) Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ existiert (z.B. wenn $\partial\Omega$ regulär ist), die sogar in $C^2(\bar{\Omega})$ liegt, so ist diese Lösung durch (\diamond) gegeben.

Zur Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung in Ω bietet sich nun aber stets Folgendes an:

- (i) Man bestimme die Greensche Funktion G zu Ω (falls existent).
- (ii) Man zeige direkt, dass durch (\diamond) tatsächlich eine Lösung gegeben ist.

Für geeignete Gebiete (mit vielen Symmetrien bzw. mit viel Struktur) lässt sich dieses Programm tatsächlich durchziehen. Weiter unten werden wir dies einmal für den Fall $\Omega = B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten. Zuvor schauen wir uns aber noch einige allgemeine Eigenschaften der Greenschen Funktion und des zugehörigen Poisson-Kerns an.

Proposition 2.24. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit C^1 -Rand. Ferner existiere die Greensche Funktion G zu Ω und für die zugehörigen Korrekturfunktionen gelte $h_y \in C^2(\bar{\Omega})$ für alle $y \in \Omega$. Dann gilt:

- (i) $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \Omega, x \neq y$.
- (ii) Ist Ω zusammenhängend,^a so gilt

$$G(x, y) < 0, \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y.$$

- (iii) Es gilt

$$K(x, y) \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega,$$

und

$$\int_{\partial\Omega} K(x, p) d\sigma(x) = 1, \quad p \in \Omega.$$

^aIn der Übung zeigen Sie, dass für allgemeines Ω stets $G(x, y) \leq 0$ gilt.

Beweis. (i) Wir fixieren $x, y \in \Omega, x \neq y$ und wählen $\varepsilon > 0$ mit $B[x, \varepsilon] \cup B[y, \varepsilon] \subseteq \Omega$ und $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. Nun definieren wir

$$u : \Omega \setminus B[x, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, u(z) := G(z, x) \quad \text{und} \quad v : \Omega \setminus B[y, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, v(z) := G(z, y).$$

Beide Funktionen sind dann insbesondere auf $\Omega' := \Omega \setminus (B[x, \varepsilon] \cup B[y, \varepsilon])$ definiert und harmonisch und es gilt $u, v \in C^2(\bar{\Omega}')$. Eine Anwendung der 2. Greenschen Formel liefert damit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega'} (u\Delta v - v\Delta u) dz = \int_{\partial\Omega'} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) d\sigma - \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) d\sigma - \int_{\partial B(y, \varepsilon)} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) d\sigma, \end{aligned}$$

wobei die Minuszeichen wieder durch die passende Wahl der äußeren Normalen begründet sind. Da $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$, folgt

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) d\sigma = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) d\sigma.$$

Wir werden nun zeigen, dass hier die linke Seite für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $v(x)$ konvergiert. Aus Symmetriegründen geht dann die rechte Seite entsprechend gegen $u(y)$, d.h. es folgt $G(x, y) =$

$v(x) = u(y) = G(y, x)$, was zu zeigen war.

Der folgende Rest des Beweises von Teil (i) wurde in der Vorlesung nicht besprochen.

Schauen wir also auf das Integral auf der linken Seite: Hier gilt zunächst $v, h_x \in C^2(B[x, \varepsilon])$, d.h. $\partial_v v$ und h_x sind auf $\partial B(x, \varepsilon)$ beschränkt. Mit

$$C_\varepsilon := \max_{0 < s \leq \varepsilon} \max_{z \in \partial B[x, s]} |\partial_v v(z)| \quad \text{und} \quad D_\varepsilon := \max_{z \in B[x, \varepsilon]} |h_x(z)|$$

folgt also wegen $u(z) = L(z - x) - h_x(z)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} |u(z) \partial_v v(z)| d\sigma(z) &\leq C_\varepsilon \int_{\partial B(x, \varepsilon)} |L(z - x) - h_x(z)| d\sigma(z) \\ &\leq C_\varepsilon \int_{\partial B(x, \varepsilon)} |L(z - x)| d\sigma(z) + C_\varepsilon D_\varepsilon \sigma(\partial B(x, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Aber hier geht der Term auf der rechten Seite gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$, denn

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} |L(z - x)| d\sigma(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} |\ln(\varepsilon)| \cdot \varepsilon, & \text{falls } n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}\varepsilon^{n-2}} \cdot \varepsilon^{n-1}, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Bleibt also zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} v(z) \partial_v u(z) d\sigma(z) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} v(z) \partial_{v(z)} L(z - x) d\sigma(z) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} v(z) \partial_{v(z)} h_x(z) d\sigma(z). \end{aligned}$$

Aber hier ist der zweite Grenzwert wegen der Beschränktheit der Integranden wieder 0 (analog argumentiert wie oben) und genau wie im Beweis der Formel (***) in der Greenschen Darstellungsformel sehen wir, dass in der Tat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} v(z) \partial_{v(z)} L(z - x) d\sigma(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} v(x + y) \partial_v L(y) d\sigma(y) = v(x + 0) = v(x).$$

(ii) Fixiere $y \in \Omega$. Dann ist $u(x) := G(x, y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{y\}$ und stetig auf $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$. Ferner gilt $\lim_{x \rightarrow y} u(x) = -\infty$. Wir können also $\varepsilon > 0$ genügend klein wählen, so dass $u < 0$ auf $B[y, \varepsilon] \setminus \{y\}$. Weiterhin gilt $u|_{\partial\Omega} = 0$ nach Definition von G , d.h. aus dem schwachen Maximumprinzip folgt $u \leq 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus B[y, \varepsilon]$. Wäre $u(x_0) = 0$ für ein x_0 aus der zusammenhängenden Menge $\Omega \setminus B[y, \varepsilon]$, so wäre bei x_0 ein globales Maximum von u auf dieser Menge und u müsste dort konstant sein. Dies ist nicht der Fall, d.h. es muss $u < 0$ auch auf $\Omega \setminus B[y, \varepsilon]$ gelten.

(iii) Übung. □

Wir wollen nun die Greensche Funktion für die Kugel $B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 3$, bestimmen. Dazu benötigen wir die zugehörigen Korrekturfunktionen $h_y \in C^2(B(0, R)) \cap C(B[0, R]), y \in B(0, R)$, mit

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta h_y(x) = 0, & \text{falls } |x| < R, \\ h_y(x) = L(x - y), & \text{falls } |x| = R. \end{cases}$$

Für $y \neq 0$ machen wir den Ansatz

$$h_y(x) = c(y)L(x - y^*)$$

mit noch zu wählenden $y^* \in B[0, R]^c$ und $c(y) \in \mathbb{R}$. Für jede solche Wahl gilt $h_y \in h(B(0, R)) \cap C^2(B[0, R])$. Damit auch die Randbedingung in (*) erfüllt ist, muss für alle $x \in \partial B(0, R)$ gelten,

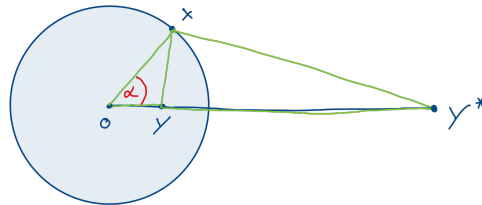
dass

$$c(y) = \frac{L(x-y)}{L(x-y^*)} = \left(\frac{|x-y^*|}{|x-y|} \right)^{n-2},$$

d.h. y^* muss so gewählt werden, dass die rechten Seiten jeweils unabhängig von $x \in \partial B(0, R)$ sind. Um dies zu gewährleisten, benutzen wir die sogenannte **Spiegelungsmethode** und setzen

$$y^* = r(y) \frac{y}{|y|}$$

mit einer noch zu wählenden Funktion $r > 1$.



Diese wählen wir so, dass die Dreiecke $0y^*x$ und $0xy$ ähnlich sind. Da die Dreiecke den Winkel α gemeinsam haben, ist dies der Fall, wenn

$$\frac{|y^*|}{|x|} = \frac{|x|}{|y|} \Leftrightarrow r(y) = |y^*| = \frac{|x|^2}{|y|} = \frac{R^2}{|y|} \Leftrightarrow y^* = \frac{R^2}{|y|} \frac{y}{|y|}.$$

Man nennt dies auch die **Inversion** von y am Kreis $\partial B(0, R)$. Man rechnet nun leicht nach (oder begründet mittels Ähnlichkeit von Dreiecken), dass für $x \in \partial B(0, R)$:

$$(\star\star) \quad \frac{|x-y^*|}{|x-y|} = \frac{|y^*|}{|x|} = \frac{R}{|y|}, \quad (y \in \partial B(0, R)).$$

Wir haben also unser Ziel erreicht und erhalten mit diesem y^* , dass

$$c(y) = \left(\frac{R}{|y|} \right)^{n-2} \quad \text{und} \quad h_y(x) = \left(\frac{R}{|y|} \right)^{n-2} L(x-y^*).$$

Wählen wir nun noch $h_0(x) := L(R)$ konstant, so haben wir den Teil (i) des folgenden Resultats gezeigt.

Proposition 2.25. Wir betrachten $B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 3$.

(i) Die Greensche Funktion für $B(0, R)$ existiert und die zugehörigen Korrekturfunktionen erfüllen $h_y \in C^2(B[0, R]), |y| < R$. Für alle $x \in B[0, R]$ und $y \in B(0, R)$ mit $y \neq 0$ und $y \neq x$ gilt

$$G(x, y) = L(x-y) - \left(\frac{R}{|y|} \right)^{n-2} L(x-y^*), \quad \text{wobei} \quad y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y.$$

(ii) Für den zugehörigen Poisson-Kern $K(x, y) := \partial_{\nu(x)} G(x, y)$ gilt

$$K(x, y) = \frac{1}{\sigma_{n-1} R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^n}, \quad x \in \partial B(0, R), y \in B(0, R).$$

Beweis. Nur Teil (ii) ist noch zu zeigen. Wir betrachten nur den Fall $y \neq 0$, d.h.

$$G(x, y) = L(x - y) - h_y(x) = L(x - y) - \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} L(x - y^*).$$

Wir betrachten zunächst die Normalenableitung von $L(x - y)$. Hier folgt unter Verwendung von Lemma 2.12, dass

$$\partial_{\nu(x)} L(x - y) = \langle \nabla_x L(x - y), \frac{x}{R} \rangle = \frac{1}{\sigma_{n-1} R |x - y|^n} \langle x - y, x \rangle = \frac{R^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{n-1} R |x - y|^n}.$$

Man beachte hierbei, dass $|x| = R$. Völlig analog erhalten wir

$$\partial_{\nu(x)} L(x - y^*) = \frac{R^2 - \langle x, y^* \rangle}{\sigma_{n-1} R |x - y^*|^n}.$$

Da wegen (***) gilt, dass

$$y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y \quad \text{und} \quad |x - y^*| = \frac{R}{|y|} |x - y|,$$

erhalten wir also

$$\partial_{\nu(x)} L(x - y^*) = \frac{R^2 - \frac{R^2}{|y|^2} \langle x, y \rangle}{\sigma_{n-1} R \left(\frac{R}{|y|} |x - y|\right)^n} = \frac{|y|^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{n-1} R |x - y|^n} \cdot \frac{|y|^{n-2}}{R^{n-2}}.$$

Setzen wir alles zusammen, folgt das Gewünschte:

$$\partial_{\nu(x)} G(x, y) = \frac{R^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{n-1} R |x - y|^n} - \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} \cdot \frac{|y|^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{n-1} R |x - y|^n} \cdot \frac{|y|^{n-2}}{R^{n-2}} = \frac{R^2 - |y|^2}{\sigma_{n-1} R |x - y|^n}.$$

□

Bemerkung 2.26. (i) Eine kurze Rechnung zeigt, dass im Falle $n \geq 3$

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\sigma_{n-1}} \left(\frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{1}{\left(\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x, y \rangle + R^2\right)^{\frac{n-2}{2}}} \right).$$

(ii) Ein analoges Argument zeigt auch die Existenz der Greenschen Funktion im Falle $n = 2$. Hier gilt

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right) - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x, y \rangle + R^2}} \right) \right).$$

Die obige Formel für den Poisson-Kern bleibt auch im Falle $n = 2$ gültig.

Nun können wir zeigen, dass durch die Darstellung (\diamond) aus Satz 2.22 tatsächlich eine Lösung des RWP $\Delta u|_{\Omega} = f, u|_{\Omega} = g$ gegeben ist. Wir betrachten aus Zeitgründen nur noch den Fall $f = 0$.

Satz 2.27 (Poisson-Formel für die Kugel). Sei $n \geq 2$. Für $g \in C(\partial B(0, R))$ setzen wir

$$u(p) := \int_{\partial B(0, R)} K(x, p) g(x) d\sigma(x), \quad |p| < R,$$

mit dem Poisson-Kern

$$K(x, p) = \frac{1}{\sigma_{n-1} R} \frac{R^2 - |p|^2}{|x - p|^n}.$$

Dann gilt:

- (i) $u \in C(\overline{B(0, R)}) \cap C^\infty(B(0, R))$,
- (ii) u ist die eindeutige klassische Lösung des RWP

$$-\Delta u = 0 \text{ auf } B(0, R), \quad u = g \text{ auf } \partial B(0, R).$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass

$$B(0, R) \ni p \mapsto K(x, p) = \partial_{\nu(x)} G(x, p)$$

für festes $x \in \partial B(0, R)$ harmonisch ist. Dies folgt entweder durch direktes nachrechnen oder unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaft für $p \mapsto G(x, p)$. Damit ist auch $u \in C^\infty(B(0, R))$ und weil wir (übliches Argument) Integral und Ableitungen vertauschen dürfen, folgt

$$\Delta u(p) = \int_{\partial B(0, R)} \Delta_p K(x, p) g(x) dx = 0, \quad p \in B(0, R).$$

Es bleibt zu zeigen, dass sich u durch $u|_{\partial\Omega} := g$ stetig auf $B[0, R]$ fortsetzen lässt, d.h.

$$\lim_{p \rightarrow z, |p| < R} |u(p) - g(z)| = 0, \quad z \in \partial B(0, R).$$

Sei also $z \in \partial B(0, R)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Da g in z stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in B(z, 2\delta) \cap \partial B(0, R) : |g(x) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

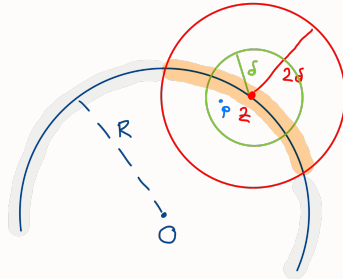
Unter Verwendung von Proposition 2.24 (iii) folgt damit für $p \in B(0, R) \cap B(z, \delta)$:

$$\begin{aligned} |u(p) - g(z)| &= \left| \int_{\partial B(0, R)} K(x, p) (g(x) - g(z)) d\sigma(x) \right| \leq \int_{\partial B(0, R)} K(x, p) |g(x) - g(z)| d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial B(0, R) \cap B(z, 2\delta)} K(x, p) |g(x) - g(z)| d\sigma(x) + \int_{\partial B(0, R) \setminus B(z, 2\delta)} K(x, p) |g(x) - g(z)| d\sigma(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g\|_\infty \int_{\partial B(0, R) \setminus B(z, 2\delta)} K(x, p) d\sigma(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sigma_{n-1} R^{n-1} \|g\|_\infty \sup_{x \in \partial B(0, R) \setminus B(z, 2\delta)} K(x, p) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \sigma_{n-1} R^{n-1} \|g\|_\infty \frac{1}{R \sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |p|^2}{\delta^n}. \end{aligned}$$

Da hier auch der zweite Term für $p \rightarrow z$ beliebig klein wird, folgt die Behauptung. Zur Rechtfertigung von (*) bemerken wir, dass im Falle $|z - p| \leq \delta$ und $|x - z| \geq 2\delta$ auch $|x - p| \geq$

$|x - z| - |z - p| \geq \delta$ und somit

$$K(x, p) = \frac{1}{R\sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |p|^2}{|x - p|^n} \leq \frac{1}{R\sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |p|^2}{\delta^n}.$$



□

— Nachtrag —

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch einmal auf den Satz von Perron (Satz 2.8) zurückblicken und zumindest skizzieren, wie er bewiesen werden kann. Es geht also darum, für eine beschränkte, offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit noch zu definierendem „regulärem“ Rand $\partial\Omega$ und vorgegebenes $g \in C(\partial\Omega)$ eine (dann eindeutige) Lösung $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ von

$$(\star) \quad \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

zu finden. Dazu beginnen wir mit einem kurzen Rückblick auf das Maximumprinzip.

Lemma 2.28 (Harmonisches Dominieren). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei $u \in C(\bar{\Omega})$ harmonisch auf Ω und $v \in C(\bar{\Omega})$ subharmonisch auf Ω . Dann gilt die Implikation

$$v \leq u \text{ auf } \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad v \leq u \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Beweis. Folgt sofort aus dem schwachen Maximumprinzip, Satz 1.24 (i), angewandt auf die subharmonische (warum?) Funktion $v - u$. □

Ist also u_0 die Lösung von (\star) und $v \in C(\bar{\Omega})$ subharmonisch mit $v|_{\partial\Omega} \leq g (= u_0|_{\partial\Omega})$, so muss

$$v \leq u_0 \text{ auf } \bar{\Omega}$$

gelten. Betrachten wir also die sogenannte **Perron-Familie**

$$S(g) := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ ist subharmonisch auf } \Omega \text{ und } v|_{\partial\Omega} \leq g\},$$

so gilt $v \leq u_0$ auf $\bar{\Omega}$ für alle $v \in S(g)$. Aber es gilt auch $u_0 \in S(g)$, d.h. es folgt

$$u_0(x) = \max_{v \in S(g)} v(x) = \sup_{v \in S(g)} v(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

falls die Lösung u_0 von (\star) existiert. Umgekehrt liefert uns damit der sogenannte **Perron-Kandidat** $P(g) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$P(g)(x) := \sup_{v \in S(g)} v(x), \quad x \in \bar{\Omega}$$

einen möglichen Lösungskandidaten. Man beachte hierbei:

- $S(g) \neq \emptyset$, denn die konstante Funktion mit Wert $\min_{\partial\Omega} g$ ist Element dieser Menge.
- Mit Lemma 2.28 folgt damit

$$\min_{\partial\Omega} g \leq P(g)(x) \leq \max_{\partial\Omega} g, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

- Ist u_0 Lösung von (\star) , so gilt $P(u_0|_{\partial\Omega}) = P(g) = u_0$.

Nun wollen wir zunächst zeigen, dass $P(g)$ tatsächlich harmonisch auf Ω ist. Dazu werden wir folgendes Resultat mehrfach nutzen.

Lemma 2.29. Sei v subharmonisch auf Ω und $B[x_0, R] \subseteq \Omega$. Ferner sei $B := B(x_0, r)$.

(i) **Perron-Lösung auf Kugeln:** Die Funktion $P(v|_{\partial B}) : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ist klassische Lösung von

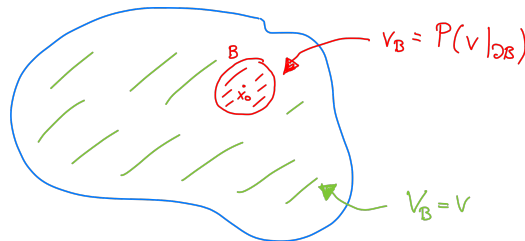
$$(\star\star) \quad \Delta u = 0 \text{ auf } B, \quad u|_{\partial B} = v|_{\partial B}.$$

(ii) **Harmonisches Anheben:** Es ist

$$v_B(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega \setminus \overline{B} \\ P(v|_{\partial B})(x), & \text{falls } x \in B \end{cases}$$

wieder subharmonisch auf Ω und $v \leq v_B$.

(iii) Ist w subharmonisch auf Ω und $w \leq v$, so gilt $w_B \leq v_B$.



Beweis. (i) Wir wissen aus Satz 2.27, dass das Poisson-Problem $(\star\star)$ auf der Kugel B eindeutig lösbar ist (denn ist u eine Lösung auf $B(0, R)$, so ist $x \mapsto u(x - x_0)$ eine Lösung auf $B(x_0, R)$). Nach unseren Vorüberlegungen gilt für die Lösung u_0 von $(\star\star)$, dass $u_0 = P(u_0|_{\partial B}) = P(v|_{\partial B})$.

(ii) Dass v_B stetig ist, ist klar. Dass $v \leq v_B$ folgt sofort aus Lemma 2.28, da v_B nach Teil (i) auf B harmonisch ist. Weiterhin ist v_B auf $\Omega \setminus \overline{B}$ subharmonisch. Schließlich gilt im Fall $x \in \partial B$ aufgrund der Subharmonizität von v , dass für $r > 0$ hinreichend klein

$$v_B(x) = v(x) \leq \frac{1}{\lambda^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} v(y) dy \leq \frac{1}{\lambda^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} v_B(y) dy,$$

d.h. auch in einer Umgebung von ∂B ist v_B subharmonisch.

(iii) Maximumprinzip und Teil (i). □

Satz 2.30. $P(g)$ ist harmonisch in Ω .

Beweis (Skizze). Es genügt zu zeigen, dass $P(g)$ auf jeder beliebigen Kugel $B := B(x_0, R) \subseteq \Omega$

harmonisch ist. Sei dazu (w_k) eine Folge in $S(g)$ mit $w_k(x_0) \rightarrow \sup_{w \in S(g)} w(x) =: P(g)(x_0)$. Setzen wir, unter Verwendung der Notation von Lemma 2.29,

$$v_k := (\max(w_1, \dots, w_k))_B, \quad k \in \mathbb{N},$$

so ist auch (v_k) eine Folge in $S(g)$, jedes der v_k ist harmonisch auf B und es gilt

$$\forall x \in \Omega: \quad v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \leq P(g)(x) \quad \text{und} \quad v_k(x_0) \nearrow P(g)(x_0).$$

Damit existiert $v(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \Omega$ und die Harnackschen Ungleichungen aus Aufgabe 21 (Übungsblatt 5) zeigen, dass diese Konvergenz auf kompakten Teilmengen von B gleichmäßig in x ist. Also ist $v|_B$ wegen Aufgabe 8 von Blatt 2 harmonisch. Es bleibt zu zeigen, dass $v|_B = P(g)|_B$ (im Punkt $x = x_0$ gilt diese Gleichung, wie zuvor schon gesehen). Zunächst ist klar, dass $v|_B \leq P(g)|_B$. Für die umgekehrte Richtung $P(g)|_B \leq v|_B$ genügt es zu zeigen, dass $w|_B \leq v|_B$ für jedes beliebige $w \in S(g)$. Dazu setzen wir

$$w_k := (\max(w, v_k))_B \in S(g).$$

Beachte wieder, dass $w_k(x_0) \leq P(g)(x_0) = v(x_0)$ und dass w_k auf $B = B(x_0, R)$ harmonisch ist. Da auch v dort harmonisch ist, folgt für $0 < r < R$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^n(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} v(y) \, dy &= v(x_0) \geq w_k(x_0) = \frac{1}{\lambda^n(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} w_k(y) \, dy \\ &\geq \frac{1}{\lambda^n(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} \max(w, v_k)(y) \, dy. \end{aligned}$$

Schicken wir $k \rightarrow \infty$, so folgt

$$\int_{B(x_0, r)} v(y) \, dy \geq \int_{B(x_0, r)} \max(w, v)(y) \, dy.$$

Da $v \leq \max(w, v)$ und die beteiligten Funktionen stetig sind, hat dies $v = \max(w, v)$, also $v \geq w$, auf $B(x_0, r)$ zur Folge. Da $0 < r < R$ beliebig war, folgt $w \leq v$ auf $B = B(x_0, R)$, was zu zeigen war. \square

Nun müssen wir uns noch um die Randwerte kümmern.

Definition 2.31. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $x_0 \in \partial\Omega$. Dann heißt eine Funktion $w \in C(\overline{\Omega})$ eine **Barriere für Ω in x_0** , falls

- (i) w auf Ω subharmonisch ist,
- (ii) $w < 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ und $w(x_0) = 0$.

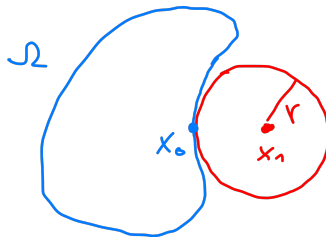
Der Randpunkt x_0 heißt **regulär**, falls eine zugehörige Barriere existiert. Sind alle Randpunkte von Ω regulär, so nennen wir $\partial\Omega$ selbst regulär.

Beispiel 2.32. Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung**, falls eine Kugel $B(x_1, r)$ existiert, die $\overline{\Omega}$ nur im Punkt x_0 berührt, d.h. $B[x_1, r] \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. In diesem Fall ist

$$w(x) := L(r) - L(x - x_1) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \left(\frac{1}{|x-x_1|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right), & \text{falls } n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} (\ln|r| - \ln|x-x_1|), & \text{falls } n = 2 \end{cases}$$

eine Barriere für Ω in x_0 .

Die äußere Kugelbedingung ist etwa für alle $x_0 \in \partial\Omega$ erfüllt, wenn Ω konvex ist oder wenn Ω einen C_2 -Rand besitzt. Im letzteren Fall können wir $\partial\Omega$ in der Nähe von x_0 als Graph einer quadratischen Funktion beschreiben (und in jede Parabel lässt sich eine Kugel einbetten).



Die äußere Kugelbedingung.

Nun können wir den Beweis des Satzes von Perron abschließen.

Satz 2.33. Falls $x_0 \in \partial\Omega$ regulär ist, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \bar{\Omega}} P(g)(x) = g(x_0).$$

Beweis. Sei w eine Barriere für Ω in x_0 und sei $\varepsilon > 0$. Da g in x_0 stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \cap \partial\Omega : |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Beachte nun, dass $w < 0$ auf $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, d.h.

$$\alpha := \frac{\max_{x \in \partial\Omega} |g(x) - g(x_0)|}{\min_{x \in \partial\Omega \setminus B(x_0, \delta)} (-w(x))} \geq 0.$$

Mit dieser Wahl von α gilt dann auch

$$\forall x \in \partial\Omega : |g(x) - g(x_0)| \leq \max(\varepsilon, -\alpha w(x)) \leq \varepsilon - \alpha w(x).$$

Nun behaupten wir:

$$(\star) \quad \forall x \in \bar{\Omega} : g(x_0) - \varepsilon + \alpha w(x) \leq P(g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon - \alpha w(x).$$

Wenn wir dies gezeigt haben, schicken wir zunächst $x \rightarrow x_0$. Da w in x_0 stetig ist und $w(x_0) = 0$ gilt, folgt

$$g(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} P(g)(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} P(g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} P(g)(x) = g(x_0)$.

Bleibt also nur noch, die Ungleichungskette (\star) zu zeigen. Die linke Ungleichung ist hierbei klar, denn nach Wahl von α ist $x \mapsto g(x_0) - \varepsilon + \alpha w(x) \in S(g)$. Für die rechte Ungleichung beachten wir, dass ebenfalls nach Wahl von α gilt, dass

$$g(x) + \alpha w(x) \leq g(x_0) + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega.$$

Ist also $v \in S(g)$, so gilt auch

$$v(x) + \alpha w(x) \leq g(x) + \alpha w(x) \leq g(x_0) + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega.$$

Aber dann folgt mit Lemma 2.28, dass

$$v(x) + \alpha w(x) \leq g(x_0) + \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad v(x) \leq g(x_0) + \varepsilon - \alpha w(x)$$

für alle $x \in \bar{\Omega}$, was $P(g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon - \alpha w(x)$ zur Folge hat. \square

3. Die Wärmeleitungsgleichung

Stichpunkte. Wärmeleitungsgleichung, Wärmeleitungsoperator, Cauchy-Problem, Beispiel von Tychonov, gemischtes Problem, parabolische Maximumprinzipien, Eindeutigkeit von Lösungen, Gauß-Kern, Dirac-Folgen, Duhamelsche Formel, Trennung der Variablen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nun schließlich mit der allgemeinen **Wärmeleitungsgleichung**

$$\partial_t u - \Delta_x u = f$$

für eine gegebene Funktion $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, mit $0 < T \leq \infty$, und eine gesuchte Funktion $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Im Prolog haben wir diskutiert, dass $u(x, t)$ zum Beispiel die Temperatur zur Zeit t an der Stelle $x \in \Omega$ beschreiben könnte. In diesem Fall wäre $f = f(x, t)$ als eine gegebene Wärmequelle zu interpretieren. Unter Verwendung des (linearen) **Wärmeleitungsoperators**

$$W := \partial_t - \Delta_x$$

können wir die Wärmeleitungsgleichung kurz in der Form $Wu = f$ schreiben.

Bemerkung 3.1. Der Wärmeleitungsoperator W ist ein sogenannter **parabolischer** Differentialoperator, im Gegensatz zum Laplace-Operator, der **elliptisch** ist. Wie genau diese Begriffe definiert sind, werden wir später erklären (siehe Kapitel 5). Der Begriff **parabolisch** wird in diesem Abschnitt aber schon ein paar Mal verwendet.

Definition 3.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 < T \leq \infty$ und $f \in C(\Omega \times (0, T))$.

(i) Eine **klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung** ist eine Funktion $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T))$, die für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ die Gleichung

$$Wu(x, t) := \partial_t u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t)$$

erfüllt. Hierbei ist $C^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ der Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen $v = v(x, t)$ auf $\Omega \times (0, T)$, die bezüglich x zweimal und bezüglich t einmal stetig differenzierbar sind.

(ii) Ist $u_0 \in C(\Omega)$, so besteht das zugehörige **Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung** im Auffinden einer klassischen Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T)) \cap C(\Omega \times [0, T])$, welche zur Zeit $t = 0$ mit u_0 übereinstimmt, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} Wu &= f \text{ in } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Hierbei nennt man die zweite geforderte Gleichung eine **Anfangsbedingung**.

(iii) Im Falle $f = 0$ heißt die Wärmeleitungsgleichung bzw. das zugehörige Cauchy-Problem **homogen**, sonst **inhomogen**.

Beim Cauchy-Problem können wir u_0 zum Beispiel als eine gegebene Anfangstemperatur interpretieren. Dessen Vorgabe legt die Lösungen im Allgemeinen jedoch noch nicht eindeutig fest.

Beispiel 3.3 (Tychonov). Wir betrachten das homogene Cauchy-Problem

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u(x, 0) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Es soll gezeigt werden, dass neben der Lösung $u = 0$ noch unendlich viele weitere Lösungen existieren. Für noch zu bestimmende Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ machen wir daher den formalen Lösungsansatz

$$u(x, t) = u(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t) x_1^k.$$

Dann ist die Anfangsbedingung erfüllt, falls $\varphi_k(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Nun wenden wir formal den Wärmeleitungsoperator an und vertauschen Reihe und Ableitung:

$$Wu(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(t) x_1^k - \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k(t) k(k-1) x_1^{k-2} = \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_l'(t) - \varphi_{l+2}(t)(l+2)(l+1)) x_1^l.$$

Dann gilt $Wu = 0$, falls

$$\forall l \in \mathbb{N}_0, t \geq 0: \quad \varphi_l'(t) = (l+2)(l+1)\varphi_{l+2}(t).$$

Dies können wir erreichen, wenn wir für eine noch zu wählende Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ folgendes festsetzen:

$$\varphi_{2l+1}(t) := 0, \quad \varphi_{2l}(t) := \frac{\varphi^{(l)}(t)}{(2l)!}$$

und damit

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{(2k)!} x_1^{2k}.$$

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen muss dann insbesondere auch $\varphi^{(k)}(0) = 0, k \in \mathbb{N}_0$, gelten. Man kann zeigen, dass für die Wahl

$$\varphi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^a}}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

mit $a > 1$ beliebig, die obige formale Rechnung tatsächlich gerechtfertigt werden kann (Übung). Insbesondere hat das Cauchy-Problem also unendlich viele Lösungen (verschiedene a führen zu verschiedenen Lösungen).

Übungsblatt 7

Wir werden sehen, dass man im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung des Cauchy-Problems erhalten kann, wenn man Anforderungen an das Verhalten der Lösungen bei ∞ stellt. Im Falle $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ müssen darüber hinaus die Randwerte der Lösungen vorgegeben werden (beides analog zu unserem Vorgehen bei der Poisson-Gleichung). Auch aus physikalischer Sicht macht es Sinn, neben der Anfangstemperatur auch die Temperaturverteilung auf dem Rand $\partial\Omega$ vorzugeben, also etwa zu fordern, dass

$$u(x, t) = u_R(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \in (0, T),$$

für eine gegebene Funktion $u_R : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Man nennt dies die Vorgabe von **Dirichlet-Randbedingungen** (man vergleiche Definition 2.2).¹

Um die Anfangs- und Randwerte im Folgenden gemeinsam handhaben zu können, führen wir nun ein paar Begriffe ein.

¹Auch die Vorgabe von anderen Typen von Randwerten wäre möglich. Auf den Übungsblättern betrachten wir einige Beispiele.

Definition 3.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $0 < T \leq \infty$.

(i) Wir setzen $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ und $\tilde{\Omega}_T := \overline{\Omega} \times [0, T)$. Ferner nennen wir

$$\partial^* \Omega_T := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$$

den **parabolischen Rand** von Ω_T .



(ii) Sei $f \in C(\Omega_T)$ und $g \in C(\partial^* \Omega_T)$. Dann besteht das zugehörige **gemischte Rand- und Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung** im Auffinden einer Funktion $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$ mit

$$\begin{aligned} Wu &= f \text{ in } \Omega_T \\ u &= g \text{ auf } \partial^* \Omega_T. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5. (i) Man beachte, dass

$$u = g \text{ auf } \partial^* \Omega_T \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, 0) = g(x, 0) (\hat{=} u_0(x)), & \text{falls } x \in \Omega \\ u(z, t) = g(z, t) (\hat{=} u_R(z, t)), & \text{falls } z \in \partial\Omega, t \in [0, T). \end{cases}$$

Insbesondere sichert die Stetigkeit von g die **Konsistenz** von Anfangs- und Randbedingung, d.h. es gilt

$$\forall z \in \partial\Omega : \lim_{x \rightarrow z} u_0(x) = \lim_{t \searrow 0} u_R(z, t).$$

(ii) Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$, so ist $\partial\Omega = \emptyset$ und damit gilt $\partial^* \Omega_T = \Omega \times \{0\}$ und

$$u = g \text{ auf } \partial^* \Omega_T \Leftrightarrow u(x, 0) = g(x, 0) \text{ falls } x \in \Omega.$$

In diesem Fall ist das gemischte Problem also einfach das Cauchy-Problem zum Anfangswert g .

(iii) Es gilt $\tilde{\Omega}_\infty = \overline{\Omega}_\infty$ und $\partial^* \Omega_\infty = \partial\Omega_\infty$. Im Falle $T < \infty$ ist jedoch

$$\tilde{\Omega}_T = \overline{\Omega}_T \setminus (\overline{\Omega} \times \{T\}) \quad \text{und} \quad \partial^* \Omega_T = \partial\Omega_T \setminus (\Omega \times \{T\}).$$

Wir wollen nun über die Eindeutigkeit von Lösungen des gemischten Problems sprechen. Wie im Falle der Poisson-Gleichung erhalten wir diese mit Hilfe von Maximumprinzipien.

Satz 3.6 (Parabolisches Maximumprinzip I). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und **beschränkt** und $0 < T \leq \infty$. Falls $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$ und

$$Wu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T,$$

so gilt

$$\sup_{(x,t) \in \tilde{\Omega}_T} u(x, t) = \sup_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x, t).$$

Dieser Satz ist das Analogon für das schwache Maximumprinzip für subharmonische Funktionen (Satz 1.24). Auch im vorliegenden Fall ließe sich ein starkes Maximumprinzip beweisen, wir verzichten

aber aus Zeitgründen darauf. Man mache sich klar, dass das parabolische Maximumprinzip auch aus physikalischer Sicht Sinn macht: Die Anfangstemperatur wird sich mit der Zeit gleichmäßig verteilen (also absinken), nur am Rand von Ω kann es wegen äußerer Wärmezufuhr weiter warm bleiben.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $0 < S < T$ gilt, dass

$$(\star) \quad \max_{(x,t) \in \overline{\Omega}_S} u(x,t) = \max_{(x,t) \in \partial\Omega_S \setminus (\Omega \times \{S\})} u(x,t).$$

Denn dann erhalten wir für $S \nearrow T$ die Behauptung.



Im Folgenden sei also ein solches S fixiert und wir betrachten u auf $\overline{\Omega}_S = \overline{\Omega} \times [0, S]$ (schreiben aber einfach u statt $u|_{\overline{\Omega}_S}$). Nach Voraussetzung gilt

$$Wu = \partial_t u - \Delta_x u \leq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, S] \subseteq \Omega_T.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: Es gilt $Wu < 0$ in $\Omega \times (0, S]$.

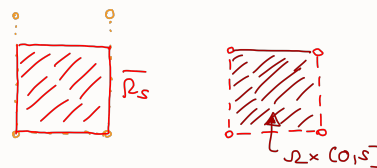
Sei (x_0, t_0) eine Maximalstelle von u in der kompakten Menge $\overline{\Omega}_S$. Nehmen wir zunächst an, dass $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, S]$. Dann nimmt die Funktion $\overline{\Omega} \ni x \mapsto u(x, t_0)$ bei $x = x_0 \in \Omega$ ein Maximum an, d.h. unter Beachtung der zugehörigen Richtungsfunktionen folgern wir, dass

$$\partial_{x_j}^2 u(x_0, t_0) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

und somit $\Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0$. Andererseits nimmt auch $(0, S] \ni t \mapsto u(x_0, t)$ in $t_0 \in (0, S]$ ein Maximum an, d.h. es gilt $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$ (nur im Falle $t_0 = S$ kann hier „>“ gelten). Insgesamt folgt also

$$Wu(x_0, t_0) = (\partial_t u - \Delta_x u)(x_0, t_0) \geq 0,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme. Also muss $(x_0, t_0) \in \partial\Omega_S \setminus (\Omega \times \{S\}) = \overline{\Omega}_S \setminus (\Omega \times (0, S])$ gelten und (\star) ist gezeigt.



2. Fall: Im allgemeinen Fall sei $u_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$Wu_\varepsilon = \partial_t u_\varepsilon - \Delta_x u_\varepsilon = (\partial_t u - \Delta_x u) - \varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, S].$$

Der 1. Fall zeigt also, dass

$$\max_{(x,t) \in \overline{\Omega}_S} u_\varepsilon(x,t) = \max_{(x,t) \in \partial\Omega_S \setminus (\Omega \times \{S\})} u_\varepsilon(x,t).$$

Da u_ε auf den beteiligten Mengen für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen u konvergiert, folgt die Gültigkeit von (\star) .

□

Korollar 3.7. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $0 < T \leq \infty$. Ferner sei $f \in C(\Omega_T)$ und $g \in C(\partial^* \Omega_T)$. Dann hat das gemischte Problem

$$\begin{aligned} Wu &= f \text{ in } \Omega_T \\ u &= g \text{ auf } \partial^* \Omega_T \end{aligned}$$

höchstens eine klassische Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$.

Beweis. Sind u_1, u_2 zwei Lösungen, so können wir das parabolische Maximumprinzip I auf $\pm u$ mit $u := u_1 - u_2$ anwenden. Da u auf $\partial^* \Omega_T$ verschwindet, folgt $\pm u \leq 0$ auf $\tilde{\Omega}_T$, d.h. dort gilt $u = 0$. \square

Wie im Falle der Poisson-Gleichung folgt aus dem parabolischen Maximumprinzip auch die Stabilität des gemischten Problems für die Wärmeleitungsgleichung (vergleiche Proposition 2.5 und die darauf folgende Bemerkung). Wir werden hierauf aus Zeitgründen aber nur in der Übung eingehen.

Übungsblatt 7

Stattdessen wollen wir noch über die Eindeutigkeit von **beschränkten Lösungen** des Cauchy-Problems für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ sprechen. Auch hier hilft uns eine Variante des Maximumprinzips. Wir schreiben hier $C_b(\Omega)$ für die beschränkten stetigen reellwertigen Funktionen auf Ω .

Satz 3.8 (Parabolisches Maximumprinzip II). Sei $0 < T \leq \infty$. Ferner sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C_b(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ und es gelte

$$Wu \leq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

Dann gilt

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]} u(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0).$$

Beweis. Nur die Ungleichung \leq ist zu zeigen. Dazu betrachten wir für gegebenes $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$v_\varepsilon : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon (|x|^2 + 2nt).$$

Dann gilt $Wv_\varepsilon \leq 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, T)$. Nun betrachten wir diese Funktion auf $B(0, R)_T = B(0, R) \times (0, T)$ für ein noch zu wählendes $R > 0$ und wenden das parabolische Maximumprinzip I an. Es folgt

$$\forall (x_0, t_0) \in B[0, R] \times [0, T] : \quad v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq \sup_{(x,t) \in \partial^* B(0,R)_T} v_\varepsilon(x, t).$$

Wir wollen die rechte Seite nach oben abschätzen und betrachten dazu die beiden Teile des parabolischen Randes:

$$1. \text{ Fall: } t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\varepsilon(x, 0) = u(x, 0) - \varepsilon |x|^2 \leq \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} u(x', 0).$$

Nun beachten wir, dass nach Voraussetzung $\|u\|_\infty := \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]} |u(x, t)| < \infty$. Also folgt weiter:

$$2. \text{ Fall: } |x| = R \quad \Rightarrow \quad v_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon (R^2 + 2nt) \leq \|u\|_\infty - \varepsilon R^2.$$

Jetzt fixieren wir unser $R > 0$. Wir wählen es so groß, dass $R^2 \geq \varepsilon^{-1} (\|u\|_\infty - \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} u(x', 0))$. Dann folgt also auch für $|x| = R$, dass $v_\varepsilon(x, t) \leq \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} u(x', 0)$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes $R > 0$ gilt, dass

$$v_\varepsilon \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) \quad \text{auf} \quad B[0, R] \times [0, T].$$

Schicken wir also $R \rightarrow \infty$, so sehen wir, dass

$$v_\varepsilon \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die behauptete Abschätzung. \square

Bemerkung 3.9. Wir werden vermutlich später in einer Übung sehen, dass das vorherige Resultat auch gültig bleibt, falls $|u(x, t)| \leq Me^{\lambda|x|^2}$ für gewisse $M, \lambda \geq 0$ und alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$. Ohne Wachstumsbeschränkungen gilt das Maximumprinzip in diesem Fall allerdings nicht, wie das Beispiel von Tychonov zeigt.

Als unmittelbare Folgerung aus dem parabolischen Maximumprinzip II erhalten wir folgendes Eindeigkeitsresultat für das Cauchy-Problem auf \mathbb{R}^n .

Korollar 3.10. Sei $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T))$, $0 < T \leq \infty$. Dann existiert höchstens eine beschränkte Lösung $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C_b(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ von

$$Wu = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

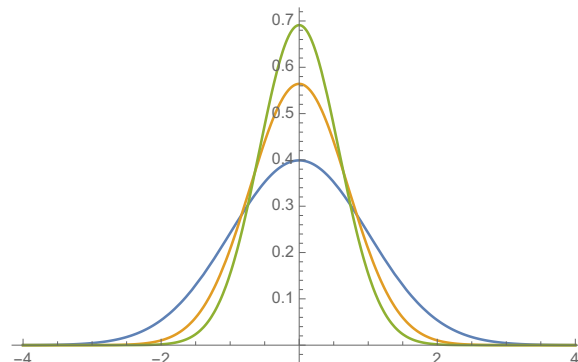
Unser nächstes Ziel ist es, auch die Existenz von Lösungen des Cauchy-Problems zur Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^n zu zeigen. Hierzu benötigen wir die folgende Funktion, die im gegenwärtigen Kontext die gleiche Rolle spielen wird, wie es die Fundamentallösung L im Falle der Laplace-Gleichung getan hat.

Definition 3.11. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

wird **Gauß-Kern** oder **Wärmeleitungskern** oder auch **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung** auf \mathbb{R}^n genannt. Weiterhin definieren wir

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty), \quad \Phi_t(x) := \Phi(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$



Der Graph von Φ_t im Falle $n = 1$ für verschiedene Werte von t .

Schauen wir uns einige einfache Eigenschaften des Gauß-Kerns an.

Lemma 3.12. Es gilt:

- (i) $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und $W\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.
(ii) Für alle $t > 0$ ist $\Phi_t \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\Phi_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \|\Phi_t\|_\infty = (4\pi t)^{-n/2}.$$

Beweis. (i) Das Φ glatt ist, ist klar. Weiterhin gilt

$$\partial_t \Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left(-\frac{n}{2} \frac{1}{t^{n/2+1}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{t^{n/2}} \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) = \Phi(x, t) \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right).$$

Andererseits erhalten wir $\partial_i \Phi(x, t) = -\frac{x_i}{2t} \Phi(x, t)$, also

$$\partial_i^2 \Phi(x, t) = -\frac{1}{2t} \Phi(x, t) - \frac{x_i}{2t} \left(-\frac{x_i}{2t} \Phi(x, t) \right) = \Phi(x, t) \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2} \right).$$

Also folgt $(\Delta_x \Phi)(x, t) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \Phi(x, t) = \partial_t \Phi(x, t)$.

(ii) Unter Verwendung des Gauß-Integrals $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} dz = 1$ und des Satzes von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) dx = \left(\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) dy \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right)^n = 1. \end{aligned}$$

Also ist die positive Funktion $\Phi_t \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\Phi_t\|_1 = 1$. Dass $\|\Phi_t\|_\infty = (4\pi t)^{-n/2}$ ist klar. \square

Bemerkung 3.13. Es ist $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$ für jedes $1 \leq q \leq \infty$. Für $q = \infty$ ist dies klar und für $q < \infty$ folgt es aus der Abschätzung

$$\int |f|^q dx \leq \|f\|_\infty^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \|f\|_\infty^{q-1} \|f\|_1.$$

Insbesondere gilt also $\Phi_t \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq q \leq \infty$.

Wir wollen nun unser Vorgehen bei der Poisson-Gleichung imitieren und zeigen, dass durch

$$u(x, t) := (\Phi_t * u_0)(x) := \int \Phi_t(x - y) u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

eine Lösung des homogenen Cauchy-Problems

$$Wu = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad \text{und} \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gegeben ist. Dazu müssen wir erst klären, für welche u_0 obige Faltung überhaupt definiert ist.

Lemma 3.14. Sei $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u_0 \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann ist die Faltung

$$(\varphi * u_0)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) u_0(y) dy$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert.

Beweis. Sei $q \in [1, \infty]$ der zu p konjugierte Exponent, d.h. $1/p + 1/q = 1$. Nach Bemerkung 3.13 gilt $\varphi \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$, d.h. aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)u_0(y)| dy \leq \|\varphi\|_q \|u_0\|_p < \infty.$$

□

Damit ist also $\Phi_t * u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Falle $u_0 \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $t > 0$ definiert und wir können nun zeigen, dass $u(x, t) = (\Phi_t * u_0)(x)$ in diesem Fall die homogene Wärmeleitungsgleichung löst.

Proposition 3.15. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $u_0 \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, t) := (\Phi_t * u_0)(x)$$

glatt (d.h. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$) und $Wu = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Beweis. Da

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy$$

und $(x, t) \mapsto \Phi(x-y, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, folgt die Aussage, sofern wir Differentiation und Integration vertauschen dürfen. Es genügt hierbei $(x, t) \in B(0, R) \times (\gamma, \infty)$, mit $R, \gamma > 0$ beliebig, zu betrachten.

Zunächst zeigt man leicht per Induktion, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $\beta \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom $p = p_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \Phi(x-y, t) = p(x-y, \frac{1}{\sqrt{t}}) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) = p(x-y, \frac{1}{\sqrt{t}}) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{8t}\right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{8t}\right).$$

Da $t > \gamma > 0$ finden wir damit eine Konstante $C = C_{\alpha, \beta, \gamma}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \Phi(x-y, t) \right| \leq C \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{8t}\right).$$

Betrachten wir nun nur noch $x \in B(0, R)$, so folgt wegen

$$|x-y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \geq -2R|y| + |y|^2,$$

dass schließlich für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \Phi(x-y, t) \cdot u_0(y) \right| \leq C \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{|y|^2 - 2R|y|}{8t}\right)}_{\in \mathcal{L}_q \text{ für alle } q \geq 1} \cdot \underbrace{|u_0(y)|}_{\in \mathcal{L}_p}.$$

Aber mit der Hölder-Ungleichung sehen wir sofort, dass die rechte Seite als Funktion von y integrierbar ist. Damit rechtfertigt sich die gewünschte Vertauschung von Differentiation und Integration also mit dem Satz über Parameterintegrale (siehe Satz A.2).

□

Um zu zeigen, dass durch $\Phi_t * u_0$ für $t \searrow 0$ auch die Anfangsbedingung realisiert wird, müssen wir zunächst mehr über Faltungen lernen.

Definition 3.16. Eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ heißt eine **Dirac^a-Folge** auf \mathbb{R}^n , falls

- (i) $\varphi_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und
- (iii) für alle $r > 0$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \varphi_k(x) dx = 0.$$

Die Dirac-Folge heißt **beschränkt**, falls darüber hinaus $\varphi_k \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

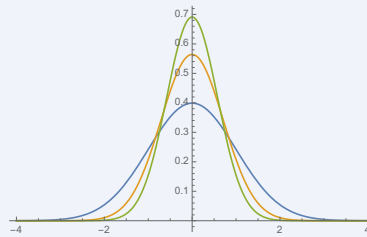
^aPaul Dirac, 1902-1984

Die beiden Integralbedingungen sorgen also dafür, dass sich eine Dirac-Folge für $k \rightarrow \infty$ mehr und mehr in der Nähe von 0 konzentriert. Das folgende Beispiel überrascht daher nicht.

Beispiel 3.17. (i) Sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen und

$$\varphi_k(x) := \Phi_{t_k}(x) = \frac{1}{(4\pi t_k)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t_k}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Dirac-Folge (Übung).



(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ sei φ_k ein Glättungskern auf $B(0, \frac{1}{k})$ (siehe Definition 1.16), d.h.

$$\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \varphi_k \geq 0, \quad \text{supp}(\varphi_k) \subseteq B[0, 1/k], \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = 1.$$

Dann ist $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Dirac-Folge. In diesem Fall nennt man diese Folge auch eine **glatte Approximation der Eins** (warum, sehen wir unten).

Für eine beschränkte Dirac-Folge (φ_k) und $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $\varphi_k * f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nach Lemma 3.14 definiert. Der Wert dieser Faltung an der Stelle x ist nach Definition das mittels $\varphi_k(x - \cdot)$ gewichtete Integralmittel von f , vergleiche Bemerkung 1.14 (i). Da sich $\varphi_k(x - \cdot)$ für $k \rightarrow \infty$ immer mehr beim Punkt x konzentriert, erwarten wir, dass $(\varphi_k * f)(x)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wenn wir diese Konvergenz geeignet verstehen, ist dies genau das Resultat des folgenden Lemmas.

Lemma 3.18. Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Dirac-Folge und $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann gilt:

- (i) $\varphi_k * f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und $\|\varphi_k * f\|_p \leq \|f\|_p$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- (ii) Ist $1 \leq p < \infty$, so gilt $\|\varphi_k * f - f\|_p \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.
- (iii) Ist $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert $\varphi_k * f \rightarrow f$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n .

Bemerkung 3.19. Ist $\varphi_k \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$, so folgt nach Satz 1.15, dass $\varphi_k * f \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Wählen wir etwa eine glatte Approximation der Eins wie in Beispiel 3.17 (ii), so zeigt damit Teil (ii) des Lemmas, dass jedes $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, in der \mathcal{L}_p -Norm durch glatte Funktionen approximiert werden kann. Für $p = \infty$ kann dies im Allgemeinen nicht gelten, denn dann wäre die Grenzfunktion f automatisch stetig (warum?).

Beweis. Wir beweisen erst Teil (i), dann Teil (iii) und dann Teil (ii).

(i) Die Behauptung folgt unter Verwendung der 2. Eigenschaft einer Dirac-Folge sofort aus folgendem Spezialfall der sogenannten **Youngschen Ungleichung**: Ist $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\varphi * f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \|\varphi * f\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p \quad (\star).$$

Für den Beweis von (\star) im Fall $p = \infty$ rechnen wir

$$\|\varphi * f\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)f(y)| \, dy \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

Im Falle $1 \leq p < \infty$ sei $q \in (1, \infty]$ der zu p konjugierte Exponent ($1/p + 1/q = 1$). Dann rechnen wir unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung zunächst für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(\varphi * f)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |f(y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{q}} \cdot |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| \, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| \, dy \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \\ &= \|\varphi\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

und damit mit dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \|\varphi * f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi * f)(x)|^p \, dx \leq \|\varphi\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |f(y)|^p \, dy \right) \, dx \\ &= \|\varphi\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| \, dx \right) \, dy = \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \, dy = \|\varphi\|_1^p \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

(iii) Es sei $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f auf der kompakten Menge $K_1 := K + B[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, y \in K_1: \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wählen wir $0 < r < \max(1, \delta)$ folgt insbesondere

$$\forall x \in K \forall y \in B(x, r): \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Unter Verwendung der 1. und 2. Eigenschaft der Dirac-Folge folgt damit für alle $x \in K$:

$$\begin{aligned} |f(x) - (\varphi_k * f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x-y)f(x) \, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x-y)f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x-y) |f(x) - f(y)| \, dy = \int_{B(x,r)} (\dots) \, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} (\dots) \, dy \\ &\leq \varepsilon \int_{B(x,r)} \varphi_k(x-y) \, dy + 2 \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} \varphi_k(x-y) \, dy \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \varphi_k(z) \, dz. \end{aligned}$$

Mit der 3. Eigenschaft der Dirac-Folge folgt also

$$0 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f(x) - (\varphi_k * f)(x)| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\sup_{x \in K} |f(x) - (\varphi_k * f)(x)| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

(ii) Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und alle φ_k haben kompakten Träger mit $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq B[0, 1], k \in \mathbb{N}$.

Ist nun x **kein** Element der kompakten Menge

$$K := B[0, 1] + \text{supp}(f)$$

so gilt $f(x) = 0$ und

$$(\varphi_k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x - y) f(y) dy = \int_{\text{supp}(f)} \varphi_k(x - y) f(y) dy = 0.$$

Also erhalten wir

$$\|f - \varphi_k * f\|_p^p = \int_K |(f - \varphi_k * f)(x)|^p dx \leq \sup_{x \in K} |(f - \varphi_k * f)(x)|^p \cdot \lambda^n(K).$$

Aufgrund des schon bewiesenen Teil (iii) folgt also $\|f - \varphi_k * f\|_p \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

2. Fall: Im allgemeinen Fall ist $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und (φ_k) eine Dirac-Folge ohne weitere Eigenschaften. Wir versuchen, das Problem auf den 1. Fall zu reduzieren.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Dies ist ein Standardresultat aus ihrer Maßtheorie-Vorlesung. Nun setzen wir

$$c_k := \int_{B(0,1)} \varphi_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\dots) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} (\dots) \quad .$$

Dann folgt aufgrund der 2. und 3. Eigenschaft einer Dirac-Folge, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 1$. Wir können also insbesondere o.B.d.A. annehmen (sonst betrachte $\tilde{\varphi}_k := \varphi_{k+k_0}$ für k_0 groß genug), dass $c_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für

$$\psi_k := \frac{1}{c_k} \mathbf{1}_{B(0,1)} \varphi_k$$

gilt dann $\text{supp}(\psi_k) \subseteq B[0, 1]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und auch $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Dirac-Folge. Die 1. und 2. Eigenschaft sind offensichtlich erfüllt und die 3. folgt aus der Abschätzung

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \psi_k(x) dx \leq \frac{1}{c_k} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \varphi_k(x) dx,$$

da hier die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Schließlich sehen wir auch noch, dass

$$\begin{aligned} \|\psi_k - \varphi_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| (c_k^{-1} \mathbf{1}_{B(0,1)}(x) - 1) \varphi_k(x) \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \varphi_k(x) dx + \left| c_k^{-1} - 1 \right| \int_{B(0,1)} \varphi_k dx, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_k - \varphi_k\|_1 = 0$. Mit all diesen Vorüberlegungen sehen wir nun, dass unter Verwen-

dung von Teil (i) bzw. der Youngschen Ungleichung (*) folgt, dass

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_k * f\|_p &= \|(f - g) + (g - \psi_k * g) + (\psi_k - \varphi_k) * g + \varphi_k * (g - f)\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|g - \psi_k * g\|_p + \|(\psi_k - \varphi_k) * g\|_p + \|\varphi_k * (g - f)\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|g - \psi_k * g\|_p + \|\psi_k - \varphi_k\|_1 \|g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \underbrace{\|g - \psi_k * g\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ wegen 1. Fall}} + \underbrace{\|\psi_k - \varphi_k\|_1}_{\rightarrow 0} \|g\|_p. \end{aligned}$$

Also folgt $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k * f\|_p \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, was die Behauptung impliziert. \square

Wenden wir das vorherige Lemma mit der Dirac-Folge (Φ_{t_k}) für beliebige positive Nullfolgen (t_k) an, erhalten wir unter Miteinbeziehung von Proposition 3.15 und Korollar 3.10 das folgende Resultat.

Satz 3.20. Sei $u_0 \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$ und

$$u(x, t) := (\Phi_t * u_0)(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Dann gilt:

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und $Wu = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.
- (ii) $u(\cdot, t) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und $\|u(\cdot, t)\|_p \leq \|u_0\|_p$ für alle $t > 0$.
- (iii) Im Falle $1 \leq p < \infty$ gilt $\lim_{t \searrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_p = 0$, d.h. die Anfangsdaten u_0 werden von u im \mathcal{L}_p -Mittel angenommen.
- (iv) Ist $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, so lässt sich u mittels $u(x, 0) := u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, stetig nach $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ fortsetzen und ist damit die eindeutige beschränkte klassische Lösung des Cauchy-Problems

$$Wu = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad \text{und} \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt $\|u\|_\infty := \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)} |u(x, t)| = \|u_0\|_\infty$.

Bemerkung 3.21. (i) Man beachte, dass durch die Wärmeleitungsgleichung beliebig „rauhe“ Anfangsdaten u_0 in infinitesimaler Zeit **geglättet** werden. Man vergleiche dies mit Bemerkung 2.19 im Kontext der Poisson-Gleichung.

(ii) Wir können auch danach fragen, wie schnell und weit sich Störungen ausbreiten. Gilt etwa $v_0 = u_0 + \varepsilon\varphi$ für eine stetige Funktion $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$, mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq B(0, r)$, so gilt für die zugehörigen Lösungen $v(x, t) > u(x, t)$ in ganz $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, d.h. beliebig kleine Störungen wirken sich auf jeden Punkt des \mathbb{R}^n schon nach infinitesimaler Zeit aus (**unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit**). Beweis:

$$v(x, t) - u(x, t) \geq \varepsilon \int_{B(0, r)} \Phi_t(x - y) \varphi(y) dy > 0.$$

(iii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u_0 \in C_b(\overline{\Omega})$, so gibt es nach dem Fortsetzungssatz von Tietze ein $F \in C_b(\mathbb{R}^n)$ mit $F|_{\overline{\Omega}} = u_0$. Aus dem vorherigen Satz folgt also, dass durch $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, t) := \begin{cases} (\Phi_t * F)(x), & \text{falls } t > 0, \\ u_0(x), & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

eine glatte Lösung des Cauchy-Problems $Wu = 0$ in $\Omega \times (0, \infty)$ und $u(x, 0) = u_0(x)$ für $x \in \Omega$ gegeben ist. Natürlich werden hierbei mögliche Randwerte der Lösung noch völlig außer Acht gelassen.

(iv) Man kann allgemein zeigen, dass jede Lösung von $Wu = 0$ in $\Omega \times (0, \infty)$ glatt ist. Wir werden dies in einem etwas allgemeineren Kontext in Kapitel 5 beweisen.^a

^aWie im Falle der harmonischen Funktionen folgt die Glattheit von Lösungen von $Wu = 0$ auch daraus, dass solche Lösungen eine Mittelwerteseigenschaft erfüllen (man siehe etwa [10] für Details hierzu)

Wir wollen nun noch kurz das inhomogene Cauchy-Problem auf \mathbb{R}^n betrachten, also

$$(\star) \quad \begin{cases} Wu &= f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

mit $f \in C_b(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Hierzu erinnern wir zunächst an ein Resultat über lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.

Erinnerung 3.22. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Lösung des homogenen AWP $y'(t) = Ay(t)$ und $y(0) = y_0$ gegeben durch $y_h(t; y_0) = e^{tA}y_0$. Mittels Variation der Konstanten erhält man die Lösung des inhomogenen AWP

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad y(0) = y_0$$

damit als

$$(\star\star) \quad y(t; y_0) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s) ds = y_h(t; y_0) + \int_0^t y_h(t-s; b(s)) ds.$$

Ist nun u die beschränkte Lösung des Cauchy-Problems (\star) , so definieren wir die drei funktionswertigen Abbildungen $y, \Delta y, b : (0, \infty) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$ via

$$y(t)(x) = u(x, t), \quad [(\Delta y)(t)](x) = (\Delta u)(x, t), \quad b(t)(x) = f(x, t)$$

für $t \in (0, \infty)$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Damit können wir (\star) als AWP für y (im ∞ -dimensionalen Raum $(C_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$) auffassen:

$$(\star\star\star) \quad y'(t) = \Delta y(t) + b(t), \quad y(0) = u_0.$$

Für den homogenen Fall $b = 0$ (d.h. $f = 0$) kennen wir die Lösung von $(\star\star\star)$ bereits: $y_h(t; u_0) = \Phi_t * u_0$. Im Hinblick auf $(\star\star)$ vermuten wir also, dass

$$y(t, u_0) = y_h(t; u_0) + \int_0^t y_h(t-s; b(s)) ds = \Phi_t * u_0 + \int_0^t \Phi_{t-s} * b(s) ds$$

die allgemeine Lösung von $(\star\star\star)$ ist und wir auf diesem Wege auch eine Lösung von (\star) erhalten. Man nennt diese Gleichung auch **Duhamelsche Formel** und das zu ihrer Konstruktion verwendete Vorgehen das **Duhamelsche Verfahren**.² Für hinreichend schönes f erhalten wir auf diese Weise tatsächlich eine Lösung.

Satz 3.23. Sei $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^{2,0}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C_b(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ und

$$u(x, t) = \begin{cases} (\Phi_t * u_0)(x) + \int_0^t (\Phi_{t-s} * f_s)(x) ds & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u_0(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n, t = 0, \end{cases}$$

²Jean Marie Duhamel, 1797-1872

wobei $f_s(y) := f(y, s)$. Dann ist $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ und

$$\begin{cases} Wu &= f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Beweis. Einen Beweis finden Sie z.B. in [10]. □

Wir wollen uns im letzten Teil dieses Kapitels nun mit der Existenz von Lösungen von gemischten Problemen auf einer beschränkten, offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschäftigen. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den homogenen Fall mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen, d.h. das gemischte Problem

$$(\heartsuit) \quad \begin{cases} Wu &= 0 & \text{in } \Omega_T, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Man beachte, dass Anfangs- und Randbedingung nur dann konsistent sind, wenn $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ gilt.

Als Lösungsansatz verwenden wir nun die sogenannte Methode der **Trennung der Variablen**, versuchen also Lösungen der Form

$$u(x, t) = v(t) \cdot w(x)$$

zu finden.

Lemma 3.24. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $0 < T \leq \infty$. Ferner sei $v \in C^1(0, T)$, $w \in C^2(\Omega)$ und

$$u(x, t) := v(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega_T$$

sei nicht die Nullfunktion. Dann sind äquivalent:

- (a) $Wu = 0$ in Ω_T .
- (b) Es existieren $C, \lambda \in \mathbb{R}, C \neq 0$, mit

$$\forall t \in (0, T) : \quad v(t) = Ce^{\lambda t}$$

und

$$\forall x \in \Omega : \quad \Delta w(x) = \lambda w(x),$$

d.h. w ist **Eigenfunktion** des Laplace-Operators Δ zum **Eigenwert** λ .

Beweis. (b) \Rightarrow (a): Es gilt für alle $(x, t) \in \Omega_T$

$$Wu(x, t) = v'(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = \lambda v(t)w(x) - \lambda v(t)w(x) = 0.$$

(a) \Rightarrow (b): Aus $Wu = 0$ folgt

$$v'(t)w(x) = v(t)\Delta w(x)$$

für alle $(x, t) \in \Omega_T$. Nach Annahme existiert nun ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit $u(x_0, t_0) = v(t_0)w(x_0) \neq 0$. Damit folgt insbesondere

$$v'(t) = \underbrace{\left(\frac{\Delta w(x_0)}{w(x_0)} \right)}_{=: \lambda} v(t), \quad t \in (0, T),$$

also $v(t) = Ce^{\lambda t}$, $t \in (0, T)$, für ein $C \neq 0$ (denn $v(t_0) \neq 0$). Weiterhin folgt dann auch

$$\Delta w(x) = \frac{v'(t_0)}{v(t_0)} w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \Omega.$$

□

Die Funktion $u(x, t) = v(t)w(x)$ kann also nur dann eine Lösung von (♥) sein, wenn w eine Eigenfunktion des Laplace-Operators Δ ist. Um auch die homogene Dirichlet-Randbedingung zu erfüllen, ist es hierbei sinnvoll, nur solche Eigenfunktionen w zu betrachten, die auf dem Rand von Ω verschwinden. Im Folgenden machen wir daher die Annahme, dass

$$w \in C_0^2(\overline{\Omega}) := \{f \in C^2(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Man beachte, dass wir hierbei zunächst leicht über die Eigenschaften einer klassischen Lösung hinausgehen (dies würde der Forderung $w \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ entsprechen), damit wir im Folgenden die Greenschen Formeln anwenden können.

Das nächste Lemma zeigt zwei Eigenschaften von solchen Eigenfunktionen von Δ .

Lemma 3.25. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand.

(i) Ist $w \in C_0^2(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, so gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Implikation

$$\Delta w = \lambda w \text{ auf } \Omega \quad \Rightarrow \quad \lambda < 0.$$

(ii) Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, und $w, \tilde{w} \in C_0^2(\overline{\Omega})$ mit $\Delta w = \lambda w$, $\Delta \tilde{w} = \mu \tilde{w}$, so gilt

$$\langle w, \tilde{w} \rangle := \int_{\Omega} w(x) \tilde{w}(x) \, dx = 0.$$

Beweis. (i) Aus der 1. Greenschen Formel (siehe Satz 2.10) mit $f = g = w$ folgt wegen $w|_{\partial\Omega} = 0$, dass

$$0 = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu w(z) w(z) \, d\sigma(z) = \int_{\Omega} (|\nabla w(x)|^2 + w(x) \Delta w(x)) \, dx = \int_{\Omega} (|\nabla w(x)|^2 + \lambda (w(x))^2) \, dx,$$

also

$$\lambda = - \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 \, dx}{\|w\|_2^2} \leq 0.$$

Wäre $\lambda = 0$, so würde der Gradient von w identisch verschwinden, d.h. w wäre auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω konstant, müsste also wegen $w|_{\partial\Omega} = 0$ identisch verschwinden, im Gegensatz zur Voraussetzung.

(ii) Aus der 2. Greenschen Formel folgt wegen $w|_{\partial\Omega} = \tilde{w}|_{\partial\Omega} = 0$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} (w(z) \partial_\nu \tilde{w}(z) - \tilde{w}(z) \partial_\nu w(z)) \, d\sigma(z) = \int_{\Omega} (w(x) \Delta \tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) \Delta w(x)) \, dx \\ &= (\mu - \lambda) \int_{\Omega} w(x) \tilde{w}(x) \, dx. \end{aligned}$$

□

Das Lemma zeigt uns also, dass die Eigenwerte des Laplace-Operators Δ auf $C_0^2(\overline{\Omega})$ strikt negativ und Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal bezüglich des L_2 -Skalarproduktes sind.

Beispiel 3.26. Es seien $w_1, \dots, w_n \in C_0^2(\overline{\Omega})$ Eigenfunktionen von Δ zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (-\infty, 0)$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\|w_k\|_2 = 1$ für alle $1 \leq k \leq n$. Gilt dann für die Anfangsdaten

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^n c_k w_k(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

so ist

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^n c_k e^{t\lambda_k} w_k(x), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$$

eine Lösung des gemischten Problems

$$\begin{cases} Wu &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Beachte: In diesem Fall gilt $c_l = \langle u_0, w_l \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) w_l(y) dy$ für $1 \leq l \leq n$, denn aus der Linearität des Skalarproduktes folgt

$$\langle u_0, w_l \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle w_k, w_l \rangle = c_l,$$

da die w_k paarweise orthogonal sind und $\langle w_k, w_k \rangle = \|w_k\|_2^2 = 1$ gilt.

Leider ist es eher selten der Fall, dass u_0 als endliche Linearkombination von Eigenfunktionen von Δ darstellbar ist. Lassen wir jedoch auch unendliche Linearkombinationen zu (falls so viele Eigenfunktionen existieren), sieht die Lage unter Umständen schon besser aus.

Erinnerung 3.27. (i) Ist $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum, so heißt eine Familie $(e_n)_{n \in I}$ in \mathcal{H} ein **Orthonormalsystem (ONS)**, falls

- $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ für alle $n \neq m$, d.h. die e_n sind paarweise orthogonal, und
- $\|e_n\| = 1$ für alle n .

In diesem Fall gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\underbrace{\sum_{n \in I} |\langle f, e_n \rangle|^2}_{=:\sup_{F \subseteq I \text{ endl.}} \sum_{n \in F} |\langle f, e_n \rangle|^2} \leq \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

(ii) Ist das ONS $(e_n)_{n \in I}$ **total**, d.h. die lineare Hülle der e_n ist dicht in \mathcal{H} , so nennen wir es eine **Orthonormalbasis (ONB)** von \mathcal{H} . In diesem Fall gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$ die **Parsevalsche Identität**

$$\sum_{n \in I} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2$$

und die **Fourier-Entwicklung**

$$f = \sum_{k \in I} \langle f, e_k \rangle e_k \quad \left(\text{d.h. } \inf_{F \subseteq I \text{ endlich}} \left\| f - \sum_{k \in F} \langle f, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \right).$$

(iii) Für den Spezialfall $\mathcal{H} = L_2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ bilden beispielsweise die Funktionen $e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikt)$, $k \in \mathbb{Z}$, eine ONB.

Bildet die Familie der Eigenfunktionen von Δ also sogar eine ONB von $L_2(\Omega)$, so erhalten wir mit dem Ansatz aus Beispiel 3.26 einen Lösungskandidaten für das gemischte Problem.

Proposition 3.28. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $u_0 \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Ferner sei $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^2(\overline{\Omega})$ bestehend aus Eigenfunktionen von Δ und $\lambda_k < 0$ sei der zu w_k zugehörige Eigenwert. Ist dann $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$, wobei wir wie üblich Funktion und zugehörige Äquivalenzklasse identifizieren, so ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k$$

für jedes $t \geq 0$ in $L_2(\Omega)$ konvergent und es gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2 = 0.$$

Beweis. (i) Wir zeigen für $t \geq 0$, dass $s_n := \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k$ eine Cauchy-Folge im Hilbert-Raum $L_2(\Omega)$ ist. Tatsächlich gilt für $n > m$ mit der Parsevalschen Identität (Satz von Pythagoras):

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^n e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=m+1}^n e^{2t\lambda_k} |\langle u_0, w_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=m+1}^n |\langle u_0, w_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Besselschen Ungleichung konvergiert die rechte Seite hier für $m, n \rightarrow \infty$ gegen 0.

(ii) Es gilt $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle w_k$ und daher mit der Parsevalschen Identität

$$\begin{aligned} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{t\lambda_k}) \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |1 - e^{t\lambda_k}|^2 |\langle u_0, w_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Da $|1 - e^{t\lambda_k}|^2 \rightarrow 0$ für $t \searrow 0$ folgt die Behauptung dann mit dominierter Konvergenz. \square

Fassen wir zusammen: Ist $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Eigenfunktionen von Δ aus $C_0^2(\overline{\Omega})$, die eine ONB von $L_2(\Omega)$ bildet, und sind $\lambda_k < 0$ die zugehörigen Eigenwerte, so erhalten wir mit dem Ansatz

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k(x), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, \infty)$$

einen **Kandidaten** für eine Lösung des gemischten Problems

$$\begin{cases} Wu &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Vorsicht: Hierbei ist a priori noch nicht einmal klar, ob die obige Reihe überhaupt punktweise konvergiert, geschweige denn, dass es sich um eine Lösung von $Wu = 0$ handelt.

Jedoch: Was gesagt werden kann, ist, dass die Reihe für festes $t \geq 0$ im L_2 -Sinne konvergiert und, ebenfalls im L_2 -Sinne, für $t \searrow 0$ die Anfangsdaten $u_0 \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ annimmt.

Wir sehen uns nun ein einfaches Beispiel an, wo dieses Vorgehen tatsächlich zum Erfolg führt.

Proposition 3.29. Sei $\Omega = (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$.

- (i) Der Operator $\Delta = \partial_x^2$ besitzt auf $C_0^2([0, \pi])$ die negativen Eigenwerte $\lambda_k = -k^2, k \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen Eigenfunktionen $x \mapsto \sin(kx)$.
- (ii) Die Funktionen

$$w_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad x \in (0, \pi), \quad k \in \mathbb{N},$$

bilden eine ONB von $\mathcal{L}_2((0, \pi))$.

Beweis. (i) Für $k > 0$ gilt

$$-k^2 = \partial_x^2 w = w'' \quad \Leftrightarrow \quad w(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad x \in (0, \pi),$$

für Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Da $w(0) = w(\pi) = 0$ gelten müssen, folgt

$$0 = w(0) = B \quad \text{und damit} \quad 0 = w(\pi) = A \sin(k\pi),$$

also $A \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Dass $\|w_n\|_2 = 1$ und $\langle w_n, w_m \rangle = 0, n \neq m$, verifiziert man sofort. Weiterhin ist aus den Grundvorlesungen bekannt, dass die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$, eine ONB von $L_2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ bilden. Durch Übergang zu Real- und Imaginärteil zeigt dies, dass durch

$$f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \quad g_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}$$

eine ONB von $L_2^* := L_2(-\pi, \pi)$ gebildet wird. Ist nun $\varphi \in \mathcal{L}_2((0, \pi))$, so können wir die Funktion durch $\varphi(-x) := -\varphi(x), x \in (-\pi, 0)$, ungerade auf $(-\pi, \pi)$ fortsetzen und erhalten für die fortgesetzte Funktion die Fourier-Darstellung

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, f_k \rangle_{L_2^*} f_k + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k,$$

wobei die Reihen im L_2^* -Sinne konvergieren. Für die letzte Gleichheit benutzen wir, dass $\langle \varphi, f_k \rangle_{L_2^*} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, da $\varphi \cdot f_k$ ungerade ist. Ferner ist

$$\langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(kx) dx = \sqrt{2} \langle \varphi, w_k \rangle_{L_2(0, \pi)}$$

und somit folgt (da $g_k = w_k / \sqrt{2}$ auf $(0, \pi)$)

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi, w_k \rangle_{L_2(0, \pi)} w_k \right\|_{L_2(0, \pi)}^2 = \left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k \right\|_{L_2(0, \pi)}^2 = \frac{1}{2} \left\| \varphi - \sum_{k=1}^N \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k \right\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2.$$

Hier konvergiert die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$ gegen 0.

□

Um zu zeigen, dass der Ansatz aus Proposition 3.28 für $\Omega = (0, \pi)$ zum Erfolg führt, benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 3.30. (i) Sei $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_\infty(\mathbb{N})$. Dann konvergiert die Reihe

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

für jedes $t_0 > 0$ (samt aller Ableitungen) absolut und gleichmäßig auf $[0, \pi] \times [t_0, \infty)$. Insbesondere ist $u \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$ und die Ableitungen von u können durch Vertauschen von Ableitung und Summe berechnet werden.

(ii) Ist $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{N})$, so konvergiert die Reihe auch absolut und gleichmäßig auf $[0, \pi] \times [0, \infty)$. Insbesondere ist $u \in C([0, \pi] \times [0, \infty))$.

Vorsicht: In Teil (ii) behaupten wir nicht, dass auch die Reihe der Ableitungen konvergiert.

Beweis. (i) Man beachte, dass die Ableitungen der Summanden von der Form

$$k^m e^{-k^2 t} b_k f(kx)$$

mit $m \in \mathbb{N}_0, f \in \{\sin, \cos\}$ sind. Zunächst gilt hier

$$\sup_{x \in [0, \pi], k \in \mathbb{N}, f \in \{\sin, \cos\}} |b_k f(kx)| < \infty.$$

Ferner gilt für alle $t \geq t_0 > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$, dass

$$0 < k^m e^{-k^2 t} \leq k^m e^{-k^2 t_0} = \frac{1}{k^2} \underbrace{k^{m+2} e^{-k^2 t_0}}_{\rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty}.$$

Also existiert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ ein $C = C(t_0, m) > 0$, so dass

$$\sup_{x \in [0, \pi], t \geq t_0, f \in \{\sin, \cos\}} \left| k^m e^{-k^2 t} b_k f(kx) \right| \leq \frac{C}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da $\sum_k \frac{1}{k^2} < \infty$, folgt hieraus die Behauptung.

(ii) Im Falle $(b_k) \in l_1(\mathbb{N})$ argumentieren wir wie in Teil (i) unter Verwendung der Abschätzung

$$\left| e^{-k^2 t} b_k \sin(kx) \right| \leq |b_k|, \quad x \in [0, \pi], t \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 3.31. Sei $u_0 \in \mathcal{L}_2((0, \pi))$ und

$$b_k := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) \sin(ky) dy, \quad k \in \mathbb{N},$$

die Folge der **Fourier-Sinus-Koeffizienten** von u_0 . Ferner sei

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times (0, \infty).$$

(i) Es ist $u \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$ und

$$\begin{aligned} Wu &= 0 \text{ auf } [0, \pi] \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ für alle } t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = 0.$$

(ii) Ist $u_0 \in C_0^2([0, \pi])$, so lässt sich u durch $u(x, 0) := u_0(x)$, $x \in [0, \pi]$ stetig auf $C([0, \pi] \times [0, \infty))$ fortsetzen und ist damit die eindeutige klassische Lösung von

$$\begin{aligned} Wu &= 0 \text{ auf } [0, \pi] \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ für alle } t \in (0, \infty). \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ für alle } x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Beweis. (i) Es gilt

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \langle u_0, w_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

so dass aus der Parsevalschen Gleichung und Proposition 3.29 folgt, dass $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N}) \subseteq l_\infty(\mathbb{N})$. Nach Lemma 3.30 ist also

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-tk^2} \langle u_0, w_k \rangle w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-tk^2} \sin(kx)$$

für alle $(x, t) \in [0, \pi] \times (0, \infty)$ definiert und es gilt $u \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$ und $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für alle $t > 0$. Da jeder Summand der Reihe die homogene Wärmeleitungsgleichung löst, folgt aus Lemma 3.30 ferner, dass $Wu = 0$ auf $[0, \pi] \times (0, \infty)$ gilt. Schließlich zeigt Proposition 3.28, dass

$$\lim_{t \searrow 0} \int_0^\pi |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = 0.$$

(ii) Aus der Forderung $u_0 \in C_0^2([0, \pi])$ folgt zunächst, dass die Fourier-Sinus-Reihe von u_0 punktweise gegen u_0 konvergiert, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

Einen Beweis hierzu findet man etwa in [8]. Ferner zeigt zweifache partielle Integration, dass eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass

$$|b_k| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi u_0(y) \sin(ky) dy \right| \leq \frac{C}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Also gilt auch $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{N})$. Aus Lemma 3.30 (ii) folgt damit die Behauptung. \square

Beispiel 3.32. Sei $u_0(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$, d.h. $u_0 \in C_0^2([0, \pi])$. Die Fourier-Sinus-Koeffizienten von u_0 bestimmen sich zu

$$d_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin(kx) dx = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade,} \\ \frac{8}{\pi k^3}, & k \text{ ungerade,} \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

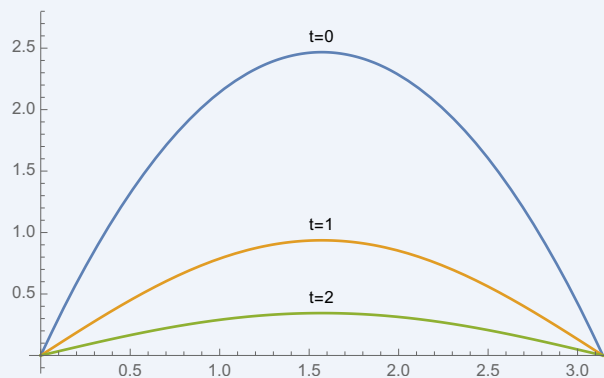
Wir erhalten also aus dem vorherigen Beispiel, dass

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k^3} e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

das gemischte Problem

$$\begin{aligned} Wu &= 0 \text{ auf } [0, \pi] \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ für alle } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ für alle } x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

löst. Man beachte, dass aus dem parabolischen Maximumprinzip (angewandt auf u und $-u$) sofort folgt, dass $u \geq 0$ und $u \leq \frac{\pi^2}{4}$, obwohl dies aus obiger Formel nicht so ohne weiteres klar ist.



Für den Gesamtwärmeinhalt zur Zeit t erhalten wir schließlich noch

$$W(t) := \int_0^\pi u(x, t) dx = \frac{8}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k^3} e^{-k^2 t} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{16}{\pi} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k^4} e^{-k^2 t},$$

d.h. $W(t) \sim \frac{16}{\pi} e^{-t}$ für $t \rightarrow \infty$. Die „Kühlung“ am Rand des Intervalls sorgt dafür, dass $W(t)$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell abfällt.

Bemerkung 3.33. Damit die Methode der Trennung der Variablen auch für allgemeine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ zum Erfolg führt, müssen wir zeigen, dass zum Laplace-Operator Δ stets eine Folge von Eigenfunktionen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $C_0^2(\overline{\Omega})$ existiert, so dass

- $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$ bildet, und
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = -\infty$ für die zugehörige Folge der Eigenwerte gilt (das wurde auch in Lemma 3.30 verwendet).

Hierauf werden wir in Kapitel 7 näher eingehen.

4. Die Wellengleichung

Stichpunkte. Wellengleichung, d'Alembert-Operator, klassische Lösungen, Cauchy- und gemischtes Problem, Energiemethoden, Abhängigkeitskegel, endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, d'Alembertsche Lösung, Methode der sphärischen Mittel, Trennung der Variablen, schwache Lösungen

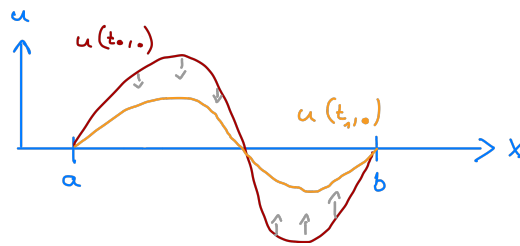
In diesem kurzen Abschnitt geht es um die sogenannte **Wellengleichung**

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = f$$

für eine gegebene Funktion $f : \Omega_T = \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ und eine gesuchte Funktion $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$. Unter Verwendung des (linearen) **d'Alembert-Operators**¹

$$\square := \partial_t^2 - \Delta_x$$

können wir die Wellengleichung kurz in der Form $\square u = f$ schreiben. Die Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen (z.B. mechanische, elektromagnetische oder Schallwellen) in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Für $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ können wir etwa an eine schwingende Saite denken. Hierbei würde $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite zur Zeit t an der Stelle x beschreiben und f wäre eine zusätzliche externe auf die Saite wirkende Kraft.²



Um die Bewegung einer schwingenden Saite zu beschreiben, müssen wir die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit der Saite festlegen. Diese Beobachtung spiegelt sich in nachfolgender Definition wieder.

Definition 4.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 < T \leq \infty$ und $f \in C(\Omega_T)$.

(i) Eine **(klassische) Lösung der Wellengleichung** ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega_T)$ die

$$\square u(x, t) = f(x, t)$$

für alle $(x, t) \in \Omega_T$ erfüllt.

(ii) Sind $u_0, v_0 \in C(\Omega)$, so besteht das zugehörige **Cauchy-Problem für die Wellengleichung** im Auffinden einer klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega \times [0, T])$ mit

$$(*) \quad \begin{cases} \square u = f & \text{in } \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases}$$

¹Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783

²In Anhang A.3 wird die Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung kurz beschrieben.

Im Falle $f = 0$ heißt das Cauchy-Problem **homogen**, sonst **inhomogen**.

(iii) Ist $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ und $u_R \in C(\partial\Omega \times [0, T])$, so besteht das **gemischte Rand- und Anfangswertproblem** für die Wellengleichung im Auffinden einer Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega \times [0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ von (\star) , die die **Dirichlet-Randbedingung**

$$u = u_R \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T]$$

erfüllt.

Bemerkung 4.2. (i) Damit das gemischte Problem lösbar ist, müssen Anfangs- und Randbedingung wieder konsistent sein, d.h. es muss gelten

$$\forall z \in \partial\Omega : u_R(z, 0) = \lim_{\Omega \ni x \rightarrow z} u_0(x).$$

(ii) Unter Verwendung des parabolischen Randes $\partial^*\Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$ und mit

$$g : \partial^*\Omega_T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g(x, 0) := u_0(x), & \text{falls } x \in \Omega \\ g(z, t) := u_R(z, t), & \text{falls } z \in \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases}$$

können wir das gemischte Problem wieder etwas kürzer schreiben als

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \square u = f \text{ in } \Omega_T \\ u = g \text{ auf } \partial^*\Omega_T \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \Omega. \end{cases}$$

Wir schauen nun wieder zunächst auf die Eindeutigkeit von Lösungen. Dies hatten wir bei der elliptischen Poisson-Gleichung und bei der parabolischen Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe von Maximumprinzipien gewonnen. Leider existieren solche für die **hyperbolische**³ Wellengleichung nicht mehr, wie wir unten sehen werden. Stattdessen verwendet man sogenannte **Energiemethoden**. Dazu sei

$$E(t) := E(u, t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx$$

das sogenannte **Energiefunktional** für u . Dieses beschreibt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des durch u beschriebenen Systems, also dessen Gesamtenergie, zur Zeit t . Aus physikalischer Sicht sollte diese für ein geschlossenes System zeitlich konstant sein. Dies machen wir uns im Beweis des nachfolgenden Resultates zunutze.

Satz 4.3. Sei $0 < T \leq \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt und besitze einen C^1 -Rand. Ferner sei $f \in C(\Omega_T)$, $g \in C(\partial^*\Omega_T)$ und $v_0 \in C(\Omega)$. Dann besitzt das gemischte Problem (\diamond) höchstens eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$.^a

^aHier fordern wir wieder etwas mehr, als für eine klassische Lösung nötig wäre, damit wir die Greenschen Formeln anwenden können.

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ zwei Lösungen und $u := u_1 - u_2$, d.h. u erfüllt (\diamond) mit $f = 0, g = 0$ und $v_0 = 0$. Da auch $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ ist dann $E(t) = E(u, t)$ in $[0, T]$

³Die Terminologie werden wir im nächsten Kapitel erklären.

differenzierbar mit

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t ((\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} ((\partial_t^2 u) \partial_t u + \langle \nabla_x u, \nabla_x (\partial_t u) \rangle) dx \\ &= \int_{\Omega} ((\Delta_x u) \partial_t u + \langle \nabla_x u, \nabla_x (\partial_t u) \rangle) dx, \end{aligned}$$

wobei wir nutzten, dass $\partial_t^2 u = \Delta_x u$. Nun wenden wir die erste Greensche Formel (siehe Satz 2.10) mit $f(\cdot) := u(\cdot, t) \in C^2(\bar{\Omega})$ und $g(\cdot) := \partial_t u(\cdot, t) \in C^1(\bar{\Omega})$ an. Da $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [0, T)$ und damit auch $\partial_t u(x, t) = 0$ für $x \in \partial\Omega, t \in [0, T)$, folgt hieraus

$$E'(t) = \int_{\partial\Omega} (\partial_t u) \partial_{\nu(x)} u d\sigma(x) = 0.$$

Also ist E konstant auf $[0, T)$. Da $E(0) = 0$ aufgrund der Anfangsbedingungen, gilt also

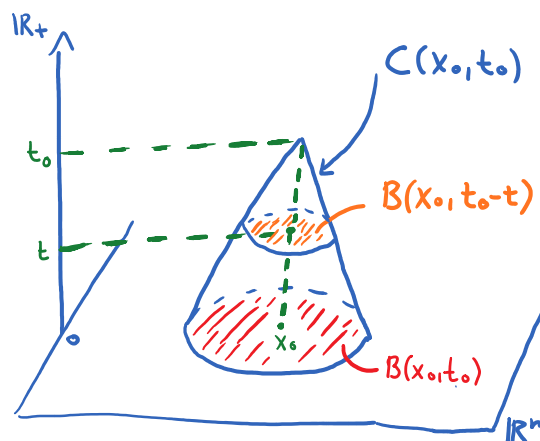
$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx = 0$$

für alle $t \in [0, T)$. Aber dies impliziert $\partial_t u = |\nabla_x u| = 0$ auf $\Omega \times [0, T)$, d.h. u ist auf jeder Zusammenhangskomponente dieser Menge konstant. Da $u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$, folgt schließlich $u = 0$ auf ganz $\Omega \times [0, T)$. Also ist $u_1 = u_2$. \square

Auch das Cauchy-Problem für die Wellengleichung in \mathbb{R}^n ist eindeutig lösbar. Als Vorbereitung für dieses Resultat zeigen wir zunächst, dass die Lösung $u(x_0, t_0)$ zur Zeit $t_0 > 0$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nur von den Anfangswerten in der Kugel $B(x_0, t_0)$ abhängt. Zu diesem Zweck betrachten wir den sogenannten **Abhängigkeitskegel**

$$C(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < t_0, x \in B(x_0, t_0 - t)\}.$$

Wir setzen $C[x_0, t_0] := \overline{C(x_0, t_0)}$.



Abhängigkeitskegel von (x_0, t_0) .

Satz 4.4. Sei $u \in C^2(C[x_0, t_0])$ und es gelte $\square u = 0$ in $C(x_0, t_0)$. Gilt $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ für alle $x \in B(x_0, t_0)$, so gilt $u = 0$ auf $C[x_0, t_0]$.

Beweis. Wir betrachten das Energiefunktional von u in $B_{t_0-t} := B(x_0, t_0 - t)$ zur Zeit $t \in [0, t_0)$:

$$F(t) := \frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx.$$

Diese Funktion ist stetig, differenzierbar (siehe unten) und nichtnegativ mit $F(0) = 0$ (aufgrund der verschwindenden Anfangswerte). Wir wollen nun zeigen, dass $F'(t) \leq 0$ für $t \in [0, t_0)$. Dies hätte zur Folge, dass $F = 0$ in ganz $[0, t_0)$, d.h. $\partial_t u = 0$ und $\nabla_x u = 0$ in $C(x_0, t_0)$. Also wäre u konstant in $C(x_0, t_0)$ und somit, aufgrund der Anfangswerte, identisch 0.

Um zu sehen, dass F differenzierbar ist und um die Ableitung zu berechnen, betrachten wir die Funktion

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2} \int_{B_r} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx,$$

definiert für $0 \leq t < t_0$ und $0 \leq r \leq t_0 - t$. Diese Funktion ist nach t differenzierbar und wie im Beweis von Satz 4.3 sehen wir, dass

$$\partial_t \varphi(r, t) = \int_{B_r} ((\partial_t^2 u)(\partial_t u) + \langle \nabla_x u, \nabla_x \partial_t u \rangle) dx = \int_{\partial B_r} (\partial_t u)(\partial_{\nu(x)} u) d\sigma(x).$$

Insbesondere ist $\partial_t \varphi$ auch stetig. Da

$$(\partial_t u)(\partial_{\nu(x)} u) \leq |\partial_t u| |\nabla_x u| \leq \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2),$$

erhalten wir ferner

$$(*) \quad \partial_t \varphi(r, t) \leq \frac{1}{2} \int_{\partial B_r} ((\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2) d\sigma(x).$$

Stellen wir andererseits φ mittels Zwiebelintegration (vgl. Erinnerung 1.7) dar als

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) d\sigma(x) \right) ds,$$

so sehen wir, dass φ auch nach r stetig differenzierbar ist und dass

$$\partial_r \varphi(r, t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_r} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) d\sigma(x) \stackrel{(*)}{\geq} \partial_t \varphi(r, t).$$

Insgesamt folgt, dass auch die Funktion $F(t) = \varphi(t_0 - t, t)$ differenzierbar ist und mit der Kettenregel erhalten wir

$$F'(t) = -\partial_r \varphi(t_0 - t, t) + \partial_t \varphi(t_0 - t, t) \leq 0.$$

Dies komplettiert den Beweis. □

Als Korollar erhalten wir nicht nur die Eindeutigkeit des Cauchy-Problems für die Wellengleichung auf \mathbb{R}^n sondern auch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen.

Korollar 4.5. Sei $0 < T \leq \infty$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ und $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^n)$.

(i) **Eindeutigkeit auf \mathbb{R}^n** : Das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \square u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T))$.

(ii) **Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit**: Gilt

$$\text{supp}(u_0) \subseteq B[0, R] \quad \text{und} \quad \text{supp}(v_0) \subseteq B[0, R],$$

so folgt für jede Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ des Cauchy-Problems, dass

$$\forall t \in (0, T) : \quad \text{supp}(u) \subseteq B[0, R + t].$$

Beweis. (i) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ zwei Lösungen und $u := u_1 - u_2$. Wähle beliebige $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in (0, T)$. Da $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, erhalten wir aus Satz 4.4, dass $u = 0$ im Abhängigkeitskegel $C(x_0, t_0)$, d.h. insbesondere gilt $u(x_0, t_0) = 0$. Also ist $u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times [0, T)$ und die Behauptung folgt.

(ii) Sei $t_0 \in (0, T)$ und $x_0 \notin B[0, R + t_0]$. Dann sind die Kugeln $B[0, R]$ und $B[x_0, t_0]$ disjunkt, d.h. u_0, v_0 verschwinden in $B(x_0, t_0)$. Aus Satz 4.4 folgt also, dass u im Abhängigkeitskegel $C(x_0, t_0)$ verschwindet. Es folgt $u(x_0, t_0) = 0$ und daher $\text{supp}(u(\cdot, t_0)) \subseteq B[0, R + t_0]$. \square

Man beachte die **Unterschiede zur Wärmeleitungsgleichung**:

- (i) Die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-Problems zur Wellengleichung auf \mathbb{R}^n erhalten wir, ohne Wachstums- oder Beschränktheitsanforderungen an die Lösung stellen zu müssen.
- (ii) Bei der Wärmeleitungsgleichung hatten wir es mit einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit zu tun, vergleiche Bemerkung 3.21.

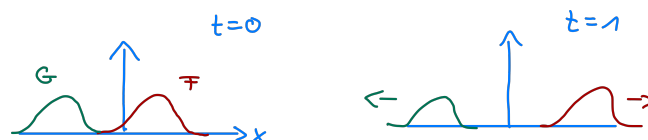
Im restlichen Teil dieses Kapitels wollen wir nun noch kurz auf die Existenz von Lösungen eingehen. Hierbei behandeln wir nur den eindimensionalen Fall noch etwas ausführlicher. Außerdem beschränken wir uns auf den homogenen Fall ($f = 0$). Die inhomogene Wellengleichung kann, analog zur Wärmeleitungsgleichung, dann mit einer Version der Duhamelschen Formel gelöst werden (vergleiche Satz 3.23 und dessen Motivation).

Lemma 4.6. Für $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ sind äquivalent:

- (i) $\square u(x, t) = 0$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.
- (ii) Es existieren $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, so dass $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, d.h. u ist eine Überlagerung von nach rechts bzw. links laufenden Wellen.

Insbesondere lässt sich jede Lösung von $\square u = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ zu einer Lösung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fortsetzen.

Beweis. Übung. \square



Wir verwenden Lemma 4.6 nun, um eine klassische Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ der eindimensionalen homogenen Wellengleichung zu gewinnen, die für $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Nach dem Lemma ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ genau dann eine Lösung von $\square u = 0$, wenn $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ existieren, so dass

$$u(x, t) = F(x - t) + G(x + t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Insbesondere ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ und die Anfangsbedingungen werden genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{cases} u_0(x) &= F(x) + G(x) \\ v_0(x) &= -F'(x) + G'(x). \end{cases}$$

Nun integrieren wir die zweite Gleichung und erhalten, dass dieses System genau dann erfüllt wird, wenn

$$\begin{cases} u_0(x) &= F(x) + G(x) \\ \int_0^x v_0(y) dy &= -F(x) + G(x) + (F(0) - G(0)). \end{cases}$$

Dieses lineare System für F, G hat die Lösungen

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \int_0^x v_0(y) dy \right) + \frac{1}{2} (F(0) - G(0))$$

und

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \int_0^x v_0(y) dy \right) - \frac{1}{2} (F(0) - G(0)).$$

Hiermit erhalten wir dann auch sofort eine Formel für $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$. Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt.

Satz 4.7 (D'Alembert). Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R}), v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - t) + u_0(x + t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und es gilt $\square u = 0$ auf \mathbb{R}^2 . Ferner ist $u|_{\mathbb{R} \times [0, \infty)}$ die eindeutige klassische Lösung des Cauchy-Problems $\square u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ und

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung 4.8. (a) Im Vergleich zum Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung fallen wieder ein paar Unterschiede auf:

- (i) Wir erhalten sogar eine Lösung auf ganz \mathbb{R}^2 . Bei **zeitumkehr** $(x, t) \mapsto (x, -t)$ bleibt dies eine Lösung. Bei der Wärmeleitungsgleichung ist dies nicht der Fall, denn gilt $(\partial_t - \partial_x^2)u = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, so löst $v(x, t) := u(x, -t)$ zwar die Gleichung $(\partial_t + \partial_x^2)v = 0$ aber **nicht** die Gleichung $(\partial_t - \partial_x^2)v = 0$.
- (ii) Die Lösung u ist nicht glatter als der Anfangswert u_0 (**keine Glättung**).
- (iii) Die Lösung erfüllt **kein Maximumprinzip**. Zum Beispiel ist u im Falle $v_0 \equiv 0$ und u_0 periodisch sowohl zeit- als auch ortsperiodisch.

(b) Das Cauchy-Problem ist auch im Falle $n \geq 2$ stets lösbar und kann mittels der sogenannten **Methode der sphärischen Mittel** auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden: Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ eine Lösung von $\square u = 0$, so setzt man

$$U(t, r, x) := S_{u(\cdot, t)}(x, r) = \frac{1}{\sigma(\partial B(x, r))} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dy$$

und zeigt, dass U die **Euler-Poisson-Darboux Differentialgleichung**

$$\partial_t^2 U = \partial_r^2 U + \frac{n-1}{r} \partial_r U$$

löst (man vergleiche Lemma 1.9). Im Falle $n = 3$ liefert dann die Substitution $\tilde{U}(t, r, x) := rU(t, r, x)$ direkt, dass \tilde{U} die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 \tilde{U} = \partial_r^2 \tilde{U}$$

löst, d.h. mittels des d'Alembertschen Satzes kann eine Formel für \tilde{U} und somit U erhalten werden und damit auch für $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(t, r, x)$. In anderen Dimensionen wird ähnlich argumentiert, siehe z.B. [10].

Wir werfen auch noch einen Blick auf die Existenz von Lösungen für gemischte Probleme auf beschränkten Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Exemplarisch soll das folgende homogene Problem mit homogenen Dirichlet-Randwerten betrachtet werden:

$$\begin{cases} \square u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases}$$

Beachte: Die Konsistenz der Rand- und Anfangsbedingungen erfordert, dass $u_0|_{\partial\Omega} = v_0|_{\partial\Omega} = 0$.

Unsere Methode der Wahl ist hier, wie bei der Wärmeleitungsgleichung, die **Trennung der Variablen**, d.h. wir machen den Ansatz $u(x, t) = v(t)w(x)$. Um die Randbedingung zu erfüllen, fordern wir hier wieder, dass $w \in C_0^2(\bar{\Omega})$.

Lemma 4.9. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Ferner seien $v \in C^2(0, \infty)$, $w \in C_0^2(\bar{\Omega})$ und

$$u(x, t) := v(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

sei nicht die Nullfunktion. Dann sind äquivalent:

- (i) $\square u = 0$ in $\Omega \times (0, \infty)$.
- (ii) Es existieren $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1^2 + C_2^2 > 0$, und $\lambda > 0$, so dass

$$\forall x \in \Omega : \Delta w(x) = -\lambda w(x),$$

d.h. $-\lambda$ ist negativer Eigenwert von Δ zur Eigenfunktion w , und

$$\forall t > 0 : v(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Beweis. (ii) \Rightarrow (i): Beachten wir, dass obiges v die allgemeine Lösung von $v'' = -\lambda v$ ist, folgt sofort für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$, dass

$$\square u(x, t) = v''(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = -\lambda v(t)w(x) + \lambda v(t)w(x) = 0.$$

(i) \Rightarrow (ii): Aus $\square u = 0$ folgt

$$v''(t)w(x) = v(t)\Delta w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

Ist nun $u(x_0, t_0) \neq 0$, so folgt

$$\Delta w(x) = \underbrace{\left(\frac{v''(t_0)}{v(t_0)}\right)}_{=:-\lambda} w(x), \quad x \in \Omega,$$

und

$$v''(t) = \left(\frac{\Delta w(x_0)}{w(x_0)}\right) v(t) = -\lambda v(t), \quad t > 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung unter Beachtung der Tatsache, dass die Eigenwerte von Δ in $C_0^2(\overline{\Omega})$ nach Lemma 3.25 negativ sind. \square

Mittels Fourierentwicklung erhalten wir nun wie im Falle der Wärmeleitungsgleichung einen Lösungsansatz für unser gemischtes Problem, sofern wir eine ONB von Eigenfunktionen des Laplace-Operators kennen.

Proposition 4.10. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Weiterhin seien $u_0 \in C_0^2(\overline{\Omega})$ und $v_0 \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Schließlich sei $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^2(\overline{\Omega})$ bestehend aus Eigenfunktionen von Δ zum Eigenwert $-\lambda_k$ mit $\lambda_k > 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$. Ist dann $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$, so konvergieren die Reihen

$$(\heartsuit) \quad u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right) w_k(x)$$

und (dessen formale Zeitableitung)

$$v(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_k} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right) w_k(x)$$

für jedes $t \geq 0$ in $L_2(\Omega)$ und es gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \searrow 0} \|v(\cdot, t) - v_0\|_2 = 0.$$

Beweis. Im L_2 -Sinne gilt

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle w_k \quad \text{und} \quad v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_0, w_k \rangle w_k.$$

Insbesondere (Parsevalsche Identität) sind die Folgen $(\langle u_0, w_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\langle v_0, w_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ in $l_2(\mathbb{N})$. Wie im Beweis von Proposition 3.28 folgt die Konvergenz von $u(x, t)$, sobald wir gezeigt haben, dass auch die Koeffizientenfolge $\left(\cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right)_{k \in \mathbb{N}}$ in $l_2(\mathbb{N})$ liegt. Aber dies folgt wegen $|\sin(x)/x| \leq 1$ aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right|^2 &\leq (|\langle u_0, w_k \rangle| + t |\langle v_0, w_k \rangle|)^2 \\ &\leq 2 \left(|\langle u_0, w_k \rangle|^2 + t^2 |\langle v_0, w_k \rangle|^2 \right). \end{aligned}$$

Analog wird die Konvergenz von $v(x, t)$ gezeigt: Hierbei wird jedoch noch verwendet, dass ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\lambda_k \geq 1$ für $k \geq k_0$ und dass aufgrund der 2. Greenschen Formel (da w_k und u_0 auf $\partial\Omega$ verschwinden) gilt, dass

$$\left| \sqrt{\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle \right| \leq |\lambda_k \langle u_0, w_k \rangle| = |\langle u_0, \Delta w_k \rangle| = |\langle \Delta u_0, w_k \rangle|, \quad k \geq k_0.$$

Die noch zu zeigenden Konvergenzaussagen folgen nun wie im Beweis von Proposition 3.28 mit dominierter Konvergenz. \square

Unter den Voraussetzungen der Proposition haben wir also mittels (\heartsuit) wieder einen **Kandidaten für eine Lösung** unseres gemischten Problems erhalten. Für konkretere Situationen muss dann gezeigt werden, dass es sich tatsächlich um eine klassische Lösung handelt. Wie im Falle der Wärmeleitungsgleichung hängt das Verfahren auch hier davon ab, dass man Informationen über die Eigenwerte des Laplace-Operators auf $C_0^2(\overline{\Omega})$ erhalten kann. Dies wird später wieder thematisiert.

Wir betrachten exemplarisch noch den einfachen eindimensionalen Fall $\Omega = (0, \pi)$, d.h.

$$(\star) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u & \text{in } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{für } t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0, \pi], \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Aus Proposition 3.29 wissen wir schon, dass $\Delta_x = \partial_x^2$ in diesem Fall die Eigenwerte $-k^2, k \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen L_2 -normierten Eigenfunktionen $w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ besitzt. Der Ansatz (\heartsuit) hat in diesem Fall also die Form

$$(\star\star) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + \frac{b_k}{k} \sin(kt) \right) \sin(kx),$$

mit den Fourier-Sinus-Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v_0(x) \sin(kx) dx.$$

Satz 4.11. Es sei $u_0 \in C_0^3([0, \pi])$ und $v_0 \in C_0^2([0, \pi])$. Dann ist die durch ($\star\star$) definiert Funktion $u \in C^2([0, \pi] \times [0, \infty))$ und u ist die eindeutige klassische Lösung des gemischten Problems (\star).

Beweis (Skizze). Wie im Beweis von Satz 3.31 zeigt partielle Integration, dass

$$b_k = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} v_0''(x) \sin(kx) dx = -\frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \langle v_0'', w_k \rangle,$$

d.h. aus der Cauchy-Schwarz und Besselschen Ungleichung folgern wir, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |b_k| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |\langle v_0'', w_k \rangle| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v_0'', w_k \rangle|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Analog zeigt man

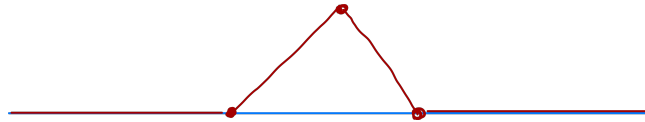
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k| < \infty.$$

Mit einer analogen Argumentation wie in Lemma 3.30 folgt hieraus die Behauptung. \square

Zum Abschluss dieses Kapitels schauen wir noch einmal auf die d'Alembertsche Lösung des Cauchy-Problems zur Wellengleichung auf \mathbb{R} , die die Schwingungen einer (unendlich langen) Saite beschreibt. Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so wird die Schwingung der Saite beschrieben durch

$$(\star) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x-t) + u_0(x+t)),$$

wobei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ die Anfangsauslenkung der Saite beschreibt. Denken wir an eine gezupfte Saite, so ist es physikalisch durchaus sinnvoll, eine Anfangsauslenkung der folgenden Form zu betrachten:



Hierbei handelt es sich jedoch nur um eine stetige Funktion, die nicht auf ganz \mathbb{R} (zweimal stetig) differenzierbar ist. Insbesondere erhalten wir dann durch (\star) keine Lösung im klassischen Sinne. Wollen wir also solche Anfangsprofile zulassen, müssen wir unseren Lösungsbegriff abschwächen. Hierzu benötigen wir zunächst ein technisches Resultat.

Lemma 4.12 (partielle Integration). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega)$ und $g \in C_c^k(\Omega)$. Dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$, dass

$$\int_{\Omega} f(x) \partial^{\alpha} g(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f(x) g(x) \, dx.$$

Beweis. Sei $h \in C_c^1(\Omega)$ und H die Nullfortsetzung von h auf \mathbb{R}^n . Dann gilt $H \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Nun wähle $R > 0$ so groß, dass $\text{supp}(H) \subseteq (-R, R)^n$. Dann zeigt der Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_1 h(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 H(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-R}^R \partial_1 H(x_1, x') \, dx_1 \right) dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\underbrace{H(R, x')}_{=0} - \underbrace{H(-R, x')}_{=0} \right) dx' = 0. \end{aligned}$$

Analog folgt $\int_{\Omega} \partial_j h(x) \, dx = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$. Angewandt auf $h = f \cdot g$ liefert dies mit der Produktregel, dass

$$\int_{\Omega} f(x) \partial_j g(x) \, dx = - \int_{\Omega} \partial_j f(x) g(x) \, dx$$

Induktion über $|\alpha|$ liefert dann die allgemeine Behauptung. \square

Mittels partieller Integration können wir nun eine Funktion u als Lösung der homogenen Wellengleichung identifizieren, ohne die Ableitungen von u zu nutzen.

Proposition 4.13. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sind äquivalent:

(i) $\square u = 0$ auf \mathbb{R}^2 .

(ii) Für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) \, d(x, t) = 0.$$

Beweis. Aus Lemma 4.12 folgt, dass

$$(\diamond) \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \square \varphi(x,t) d(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \square u(x,t) \varphi(x,t) d(x,t).$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(i) \Rightarrow (ii): Folgt nun sofort aus (\diamond) .

(ii) \Rightarrow (i): Nehmen wir an, $\square u(x_0, t_0) \neq 0$ für ein $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $u_0 := \square u(x_0, t_0) > 0$. Da $\square u$ nach Annahme stetig ist, existiert dann eine Kugel $B := B((x_0, t_0), \varepsilon)$ so dass $\square u > \frac{u_0}{2}$ auf B . Nun sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ein Glättungskern auf B (siehe Definition 1.16). Dann folgt unter Verwendung der Annahme und von (\diamond) , dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \square \varphi(x,t) d(x,t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \square u(x,t) \varphi(x,t) d(x,t) \\ &= \int_B \square u(x,t) \varphi(x,t) d(x,t) \\ &\geq \frac{u_0}{2} \int_B \varphi(x,t) d(x,t) = \frac{u_0}{2} > 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch. Dies zeigt, dass $\square u = 0$ auf \mathbb{R}^2 . \square

Mit dieser Proposition haben wir also einen Weg gefunden, klassische Lösungen der homogenen Wellengleichung ohne Ableitungen zu charakterisieren. Dies verwenden wir nun, um den Lösungsbegriff abzuschwächen.

Definition 4.14. Sei $u \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$. Dann heißt u eine **schwache** oder **distributionelle Lösung** der homogenen Wellengleichung, falls Folgendes gilt:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) : \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) \square \varphi(x,t) dx dt = 0 \quad (\star).$$

Man sagt in diesem Fall auch, es gilt $\square u = 0$ im **schwachen** oder **distributionellen Sinne**.

Bemerkung 4.15. (i) Da $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$, sind die Integrale in (\star) definiert:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,t) \square \varphi(x,t)| d(x,t) \leq \|\square \varphi\|_\infty \int_{\text{supp}(\varphi)} |u(x,t)| d(x,t) < \infty.$$

(ii) Ist $v \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ und gilt $v = u$ λ^2 -fast sicher, so ist mit u auch v eine schwache Lösung, denn die entsprechenden Integrale stimmen überein. Es würde daher Sinn machen, zu den Äquivalenzklassen überzugehen und ein Element $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ als schwache Lösung zu bezeichnen, falls (\star) für einen und damit jeden Repräsentanten der Äquivalenzklasse erfüllt ist (dies werden wir später in einem allgemeineren Kontext so handhaben).

(iii) Nach Proposition 4.13 gilt die Äquivalenz

$$u \text{ ist schwache Lsg. und } u \in C^2 \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ ist eine klassische Lösung.}$$

(iv) Die schwachen Lösungen der Wellengl. bilden einen Unterraum von $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ (bzw. $L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass es schwache (nicht klassische) Lösungen überhaupt gibt.

Proposition 4.16. (i) Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge schwacher Lösungen der Wellengleichung auf \mathbb{R}^2 . Ferner sei $u \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion, so dass $u_k \rightarrow u$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^2 . Dann ist auch u eine schwache Lösung der Wellengleichung.

(ii) Seien $F, G \in C_b(\mathbb{R})$. Dann wird durch

$$u(x, t) := F(x - t) + G(x + t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

eine schwache Lösung der Wellengleichung auf \mathbb{R}^2 definiert.

Diese Lösungen sind im Falle $F, G \notin C^2(\mathbb{R})$ insbesondere keine klassischen Lösungen der Wellengleichung. Ein Beispiel wäre die oben angesprochene angezupfte Saite.

Beweis. (i) Es gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t) &= \int_{\text{supp}(\varphi)} u(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\text{supp}(\varphi)} u_k(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

(ii) Nach Bemerkung 4.15 (iv) genügt es zu zeigen, dass $(x, t) \mapsto f(x, t) := F(x - t)$ eine schwache Lösung ist. Hierbei ist klar, dass $f \in C_b(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$. Nun sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}^2} F(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = \int_{\text{supp}(\varphi)} F(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t).$$

Dazu sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R} (vergleiche Beispiel 3.17 (ii)) und $F_n := \varphi_n * F$. Dann folgt aus Satz 1.15, dass $F_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ und aus Lemma 3.18 folgt, dass $F_n \rightarrow F$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R} . Nun wählen wir $R > 0$ so groß, dass $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]^2$. Dann folgt, dass

$$\sup_{(x, t) \in \text{supp}(\varphi)} |F_n(x - t) - F(x - t)| \leq \sup_{y \in [-2R, 2R]} |F_n(y) - F(y)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dies zeigt, dass

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(\varphi)} F(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\text{supp}(\varphi)} F_n(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} F_n(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung ausgenutzt haben, dass die Funktionen $(x, t) \mapsto F_n(x - t)$ nach Lemma 4.6 klassische (und damit schwache) Lösungen der Wellengleichung sind. \square

Bemerkung 4.17. Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass die Aussage von Teil (ii) gültig bleibt, wenn $F, G \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$. Tatsächlich gilt sogar eine Verallgemeinerung von Lemma 4.6: $u \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ ist genau dann eine schwache Lösung der homogenen Wellengleichung, falls $F, G \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$ existieren, so dass $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$.

Teil II.

**Distributionen, Sobolev-Räume und
funktionalanalytische Methoden**

5. Distributionen

Stichpunkte. Testfunktionen, Distributionen, Fundamentallema der Variationsrechnung, reguläre Distributionen, Delta-Distribution, distributionelle Ableitung, schwache Ableitung, Konvergenz von Distributionen, Dirac-Folgen vs. Delta-Distribution, lineare Differentialoperatoren, klassische/distributionelle/schwache Lösungen, Fundamentallösungen, Hypoelliptizität, Weylsches Lemma, Klassifizierung von Operatoren 2. Ordnung

Bei der Diskussion schwacher Lösungen der Wellengleichung haben wir gesehen, dass es Sinn machen kann, einen Differentialoperator auf eine nicht-differenzierbare Funktion (in dem Fall aus \mathcal{L}_1^{loc}) anzuwenden. In diesem Abschnitt wollen wir uns diesem Thema nun etwas systematischer widmen. Dazu müssen wir zunächst die Klasse der sogenannten **verallgemeinerten Funktionen** bzw. **Distributionen** einführen. Diese sind genau die Objekte, auf denen wir unsere Differentialoperatoren später wirken lassen wollen.

Zunächst benötigen wir dazu allerdings einen Konvergenzbegriff auf dem \mathbb{R} -Vektorraum C_c^∞ .

Definition 5.1. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.^a

(a) Wir setzen

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$$

und sprechen von nun an vom Raum der **Testfunktionen auf Ω** .^b Auf diesem führen wir wie folgt eine Folgenkonvergenz ein: Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert gegen $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, geschrieben

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0,$$

falls die folgenden beiden Punkte erfüllt sind:

(i) Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \text{supp}(\varphi_n) \subseteq K.$$

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt

$$\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi_0 \text{ gleichmäßig auf } \Omega.$$

Man beachte, dass dann auch $\text{supp}(\varphi_0) \subseteq K$.

(b) Eine *lineare* Abbildung $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Distribution** oder **verallgemeinerte Funktion** auf Ω , falls sie folgenstetig ist, d.h. für jede Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und jedes $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad u(\varphi_n) \rightarrow u(\varphi_0).$$

Der \mathbb{R} -Vektorraum aller Distributionen auf Ω wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

^aDa wir in diesem Abschnitt viel über Folgen sprechen werden, schreiben wir \mathbb{R}^d statt \mathbb{R}^n , damit wir „ n “ als Folgenindex verwenden können.

^bDie Terminologie wird unten etwas klarer werden.

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass wir jede lokal-integrierbare Funktion (bzw. die zugehörige Äquivalenzklasse) als Distribution auffassen können.

Satz 5.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in L_1^{loc}(\Omega)$. Ferner sei

$$u_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_f(\varphi) := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx.$$

Dann gilt:

(i) $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, d.h. u_f ist eine Distribution.

(ii) Die Abbildung

$$I : L_1^{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad f \mapsto u_f$$

ist linear und injektiv.

Bemerkung 5.3. (a) Man nennt eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ **regulär**, falls $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ existiert, so dass $u = u_f$. Nach Satz 5.2 ist dieses f dann eindeutig bestimmt. Wir werden unten sehen, dass nicht jede Distribution regulär ist.

(b) Um zu sehen, ob die Distribution u mit der regulären Distribution u_f übereinstimmt (d.h. $u = u_f$ gilt), **testen** wir, ob $u(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ erfüllt ist. Dies ist zumindest eine kleine Motivation für den Namen **Testfunktionen**.

(c) Aufgrund von Teil (ii) des Satzes ist es üblich, die zu $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ zugehörige Distribution u_f auch einfach mit f zu bezeichnen und so $L_1^{loc}(\Omega)$ als Unterraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$ zu betrachten. Dann macht es also etwa Sinn zu fragen, ob $u = f$ für eine Distribution u und ein $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ (und meint einfach, ob $u = u_f$ gilt).

Beweis (von Satz 5.2). (i) Es ist klar, dass u_f korrekt definiert und linear ist. Aufgrund der Linearität genügt es, die Folgenstetigkeit von u_f in der 0 zu zeigen. Sei also $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$. Es ist zu zeigen, dass $u(\varphi_n) \rightarrow 0$. Nach Definition existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt, so dass $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_n \rightarrow 0$ gleichmäßig auf Ω . Es folgt

$$|u_f(\varphi_n)| \leq \int_K |f(x)\varphi_n(x)| dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \int_K |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also gilt $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(ii) Die Linearität von I folgt wieder aus der Linearität des Integrals. Für die Injektivität genügt es daher zu zeigen, dass für $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ die folgende Implikation gilt

$$I(f) = u_f \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Dies wiederum folgt, wenn wir zeigen können

$$\left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0 \right) \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Aber dies folgt aus dem sogenannten Fundamentallemma der Variationsrechnung. \square

Lemma 5.4 (Fundamentallemma der Variationsrechnung). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in L_1^{loc}(\Omega)$. Ferner gelte

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0.$$

Dann gilt $f = 0$ (d.h. jeder Repräsentant der Äquivalenzklasse f ist fast sicher gleich 0).

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ und es gelte

$$(*) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0.$$

Es ist zu zeigen, dass $f = 0$ λ^d -fast sicher.^a

1. Schritt: Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $f \cdot \varphi = 0$ λ^d -fast sicher.

Dazu setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} f(x)\varphi(x), & \text{falls } x \in \Omega \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dann ist $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\|g\|_1 \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_{\text{supp}(\varphi)} |f(x)| dx.$$

Sei nun $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R}^d (vergleiche Beispiel 3.17 (ii)). Dann gilt $\|\varphi_n * g - g\|_1 \rightarrow 0$ nach Lemma 3.18. Aber für $x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$, gilt auch

$$(\varphi_n * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x-y)g(y) dy = \int_{\Omega} f(y) \cdot (\varphi_n(y) \cdot \varphi_n(x-y)) dy = 0,$$

wobei wir $(*)$ mit der Testfunktion $y \mapsto \varphi_n(y)\varphi_n(x-y) \in \mathcal{D}(\Omega)$ angewendet haben. Also ist $\varphi_n * g = 0$ auf \mathbb{R}^d und es folgt

$$\|g\|_1 = \|g - \varphi_n * g\|_1 \rightarrow 0.$$

Damit ist $\|g\|_1 = 0$, d.h. auch $f \cdot \varphi = 0$ λ^d -fast sicher.

2. Schritt: Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ gilt $f \cdot \mathbf{1}_K = 0$ λ^d -fast sicher.

In den Übungen zeigen Sie, dass eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi|_K = 1$ existiert. Mit Schritt 1 folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} |f \cdot \mathbf{1}_K| dx = \int_K |f \cdot \varphi| dx \leq \int_{\Omega} |f \cdot \varphi| dx = 0,$$

was die Behauptung impliziert.

3. und letzter Schritt: Sei $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω , d.h. die K_m sind kompakte Teilmengen von Ω mit

$$K_m \subseteq K_{m+1} \subseteq \Omega \quad \text{und} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \Omega$$

(die Existenz solcher Ausschöpfungen wird in den Übungen bewiesen). Dann gilt

$$0 \leq |f| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} |f| \cdot \mathbf{1}_{K_m},$$

d.h. aus monotoner Konvergenz und Schritt 2 folgt

$$\int_{\Omega} |f| dx \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{K_m} |f| dx = 0.$$

□

^aWäre f stetig, könnte man einfach wie im Beweis von (ii) \Rightarrow (i) von Proposition 4.13 argumentieren. Für den allgemeinen Fall muss man genauer hinschauen.

Schauen wir uns nun ein Beispiel einer nicht-regulären (sogenannten **singulären**) Distribution an.

Beispiel 5.5. Sei $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ ein lokal-endliches Borel-Maß, d.h. $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist

$$u_\mu : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_\mu(\varphi) := \int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)$$

korrekt definiert und linear. Ist $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq K$ mit $K \subseteq \Omega$ kompakt und gilt $\varphi_n \rightarrow 0$ gleichmäßig auf Ω , so folgt

$$|u_\mu(\varphi_n)| \leq \int_K |\varphi_n(x)| d\mu(x) \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \cdot \mu(K) \rightarrow 0.$$

Also gilt auch hier $u_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- Auch hier kann gezeigt werden, dass die lineare Abbildung $\mu \mapsto u_\mu$ injektiv ist, weswegen man oft einfach μ statt u_μ schreibt.
- Ist μ nicht absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes, so ist die Distribution u_μ nicht regulär. Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir mit dem Dirac-Maß $\mu = \delta_{x_0}$ auf $\Omega = \mathbb{R}^d$ und für $x_0 \in \mathbb{R}^d$, also

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_0 \notin A, \\ 1, & \text{falls } x_0 \in A. \end{cases}$$

In diesem Fall gilt

$$\delta_{x_0}(\varphi) := u_{\delta_{x_0}}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

und man spricht auch von der **Dirac- oder Delta-Distribution** δ_{x_0} .

Wir wollen nun zeigen, dass sich jeder Distribution auf sinnvolle Art eine Ableitung zuordnen lässt. Dieser, noch zu definierende, Ableitungsbegriff sollte natürlich im Falle einer differenzierbaren Funktion mit dem „normalen“ Ableitungsbegriff zusammenfallen, d.h. ist $f \in C^k(\Omega) \subseteq L_1^{loc}(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$, so sollte gelten

$$(\star) \quad \partial^\alpha f = g \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\alpha u_f = u_g.$$

Um zu sehen, wie dies erreicht werden kann, rechnen wir mit partieller Integration (Lemma 4.12) für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$u_{\partial^\alpha f}(\varphi) = \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} u_f(\partial^\alpha \varphi).$$

Um (\star) zu erhalten, müssen wir also definieren $\partial^\alpha u_f(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u_f(\partial^\alpha \varphi)$. Dies verallgemeinern wir nun auf allgemeine Distributionen.

Proposition 5.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und

$$\partial^\alpha u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi).$$

Dann gilt:

- $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und wird **distributionelle (α -)Ableitung** von u genannt.
- Für $f \in C^k(\Omega), g \in C(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\partial^\alpha f = g \text{ (im klassischen Sinne)} \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\alpha u_f = u_g$$

Insbesondere ist also jede Distribution (im distributionellen) Sinne unendlich oft differenzierbar. Identifizieren wir eine reguläre Distribution u_f mit $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$, und ist f hinreichend glatt, so

stimmen ferner die klassischen und die distributionellen Ableitungen überein.

Beweis. (i) Da mit φ auch $\partial^\alpha \varphi$ eine Testfunktion ist, ist $\partial^\alpha u(\varphi)$ korrekt definiert. Die Linearität von $\partial^\alpha u$ folgt sofort aus der Linearität von u bzw. ∂^α . Ist schließlich $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_0$, so gilt auch $\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \partial^\alpha \varphi_0$ und aus der Folgenstetigkeit von u folgt

$$\partial^\alpha u(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi_n) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi_0) = \partial^\alpha u(\varphi_0).$$

(ii) Wie oben sehen wir mittels partieller Integration und dem Fundamentallemma

$$\begin{aligned} \partial^\alpha u_f = u_g &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} (\partial^\alpha f(x) - g(x)) \varphi(x) \, dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \Omega : \quad \partial^\alpha f(x) - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir auch genutzt, dass stetige Funktionen, die fast sicher übereinstimmen, sogar überall übereinstimmen müssen (warum?). \square

Teil (ii) der Proposition führt uns noch zu folgender Definition.

Definition 5.7. Sei $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(i) Wir schreiben die distributionelle Ableitung von f auch als

$$\partial^\alpha f := \partial^\alpha u_f.$$

(ii) Existiert $g \in L_1^{loc}(\Omega)$, so dass

$$\partial^\alpha f = g \quad \text{d.h.} \quad \partial^\alpha u_f = u_g,$$

so heißt f **schwach (α -)differenzierbar** und g die **schwache (α -)Ableitung** von f . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx.$$

Bemerkung 5.8. (a) Mit Teil (ii) von Proposition 5.6 ist also jede (klassisch) differenzierbare Funktion $f \in C^k(\Omega)$ für $|\alpha| \leq k$ auch schwach α -differenzierbar und klassische und schwache Ableitung stimmen überein.

(b) Aus dem Fundamentallemma folgt wieder, dass die schwache Ableitung eindeutig ist.

(c) Jedes $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ ist im distributionellen Sinne (beliebig oft) differenzierbar, muss aber nicht schwach differenzierbar sein (siehe die folgenden Beispiele).

Bevor wir uns Beispiele ansehen, ist es hilfreich, noch eine Schreibweise einzuführen.

Definition 5.9. Für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ setzen wir

$$\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi).$$

Insbesondere können wir dann für $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ schreiben

$$\langle f, \varphi \rangle := u_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{und} \quad \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Beispiel 5.10. (i) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $H = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ die sogenannte **Heaviside-Funktion**.^a Wir berechnen die distributionelle Ableitung H' dieser nicht-differenzierbaren Funktion (genauer, aber auch umständlicher: die Ableitung der zu H zugehörigen Äquivalenzklasse von Funktionen). Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x) dx \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_{x=0}^{\infty} = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\delta_0 = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Die distributionelle Ableitung der Heaviside-Funktion H ist also die Delta-Distribution (das Maß) δ_0 , d.h. $H' = \delta_0$. Insbesondere ist H **nicht** schwach differenzierbar.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ die Betragsfunktion. Setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

so gilt für die distributionelle Ableitung f' , dass $f' = g$ im schwachen Sinne, denn für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\left(\int_{-\infty}^0 (-x)\varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} x\varphi'(x) dx \right) \\ &= -\left(\underbrace{-x\varphi(x)|_{x=-\infty}^0}_{=0} + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \underbrace{x\varphi(x)|_{x=0}^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 -\varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

^aOliver Heaviside, 1850-1925

Nicht nur dürfen Distributionen stets beliebig oft differenziert werden, man darf auch konvergente Folgen von Distributionen stets mit Ableitungen vertauschen (bei Ableitungen von Funktionenfolgen ist dies bekanntlich nicht so ohne weiteres möglich). Hierzu müssen wir den Konvergenzbegriff für Distributionen allerdings zunächst noch einführen.

Definition 5.11. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann nennen wir u_n **konvergent gegen** u und schreiben $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} u$ oder $\mathcal{D}'(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \langle u_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle.$$

Betrachten wir zunächst ein paar Beispiele. Das zweite wirft ein neues Licht auf die von uns schon benutzten Dirac-Folgen, siehe Definition 3.16.

Beispiel 5.12. (i) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L_1^{loc}(\Omega)$ und $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, so dass $\|(f_n - f)\mathbb{1}_K\|_1 \rightarrow 0$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} f$.

Beweis: Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $K_0 := \text{supp}(\varphi)$, so gilt

$$|\langle f_n, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{K_0} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_\infty \|f_n - f\|_{K_0} \rightarrow 0.$$

(ii) Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$, siehe Definition 3.16. Dann gilt $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \delta_0$. Jede Dirac-Folge konvergiert also als Distribution gegen die Delta-Distribution δ_0 .

Beweis: Seien $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da φ gleichmäßig stetig ist, existiert $r > 0$, so dass

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d: |x - y| \leq r \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Wir können daher wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_n, \varphi \rangle - \varphi(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \\ &\leq \int_{B(0,r)} \varphi_n(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \varphi_n(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) dx}_{=1} + 2 \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \varphi_n(x) dx}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt also $\langle \varphi_n, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$.

Die Vertauschbarkeit von Ableitung und Grenzwert folgt nun unmittelbar aus der Definition.

Lemma 5.13. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} u$. Dann gilt $\partial^\alpha u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \partial^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $\langle \partial^\alpha u_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle$. \square

Wir wollen als nächstes erklären, wie ein Differentialoperator $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ auf einer Distribution wirken soll. Dazu müssen wir zunächst noch Produkte von glatten Funktionen und Distributionen betrachten. Ist $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ und $g \in C^\infty(\Omega)$, so ist auch $gf \in L_1^{loc}(\Omega)$ und definiert damit eine reguläre Distribution für die

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g(x) f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

erfüllt ist. Andererseits ist auch $g\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, d.h. durch vertauschen der Integranden erhalten wir auch

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) \varphi(x) dx = \langle f, g\varphi \rangle.$$

Diese Gleichung verwenden wir für allgemeine Distributionen nun als Definition.

Lemma 5.14. Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $g \in C^\infty(\Omega)$. Dann wird durch

$$gu : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle gu, \varphi \rangle := \langle u, g\varphi \rangle$$

eine Distribution definiert. Ferner ist die Abbildung

$$C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad (g, u) \mapsto gu$$

bilinear und es gilt die verallgemeinerte Leibnizregel

$$\partial^\alpha(gu) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta g \partial^{\alpha-\beta} u,$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ und $\beta \leq \alpha$ bedeutet, dass $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \dots, d$.

Beweis. Übung. □

Übungsblatt 11

Damit ist die Wirkung eines Differentialoperators festgelegt: Für glatte Funktionen $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ erhalten wir schrittweise

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \right\rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, a_\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle = \langle u, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle. \end{aligned}$$

Dies halten wir nun noch einmal in einer Definition fest und führen den Begriff des linearen Differentialoperators dabei auch noch einmal formal ein.

Definition 5.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ seien $a_\alpha \in C(\Omega)$ gegebene stetige Funktionen.

(i) Wir nennen den formalen Ausdruck

$$T := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

einen **linearen Differentialoperator (DOP) mit stetigen Koeffizienten** auf Ω . Sind alle a_α glatt bzw. konstant, so heißt T entsprechend ein DOP mit **glatten** bzw. **konstanten Koeffizienten**. Ferner heißt T von **der Ordnung** m , falls ein $x_0 \in \Omega$ existiert, so dass

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x_0)| \neq 0,$$

d.h. mindestens eine Ableitung höchster Ordnung trägt zum Operator bei.

(ii) T kann einerseits als lineare Abbildung $T : C^m(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ aufgefasst werden, indem wir definieren

$$(Tu)(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x), \quad u \in C^m(\Omega), \quad x \in \Omega.$$

Sind die Koeffizienten a_α glatt, kann T andererseits auch als lineare Abbildung $T : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ betrachtet werden. In diesem Fall setzt man

$$\langle Tu, \varphi \rangle := \langle u, T^* \varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

wobei $T^* : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ durch

$$T^* \varphi := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi)$$

definiert ist und der zu T (**formal**) **adjungierte Operator** genannt wird.

(iii) Die zu T und gegebenem f zugehörige **lineare partielle Differentialgleichung (PDG)**

besteht im Auffinden einer Lösung u von $Tu = f$. Diese Gleichung heißt **homogen**, falls $f = 0$, sonst **inhomogen**. Hierbei werden unterschiedliche Lösungsbegriffe verwendet:

(a) Ist $f \in C(\Omega)$, so heißt eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ eine **klassische Lösung**, sofern

$$(Tu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

(b) Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und hat T glatte Koeffizienten, so heißt eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine **distributionelle Lösung**, sofern $Tu = f$ im distributionellen Sinne, d.h.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \langle Tu, \varphi \rangle = \langle u, T^* \varphi \rangle \stackrel{!}{=} \langle f, \varphi \rangle.$$

(c) Ist in Fall (b) sogar $f \in L_1^{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, so heißt u eine **schwache Lösung**. In diesem Fall muss also gelten

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} u(x)(T^* \varphi)(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx.$$

Bemerkung 5.16. (i) Mit dem Laplace-Operator Δ , dem Wärmeleitungsoperator W und dem d'Alembert-Operator \square haben wir bislang drei Beispiele von linearen DOP 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kennengelernt. Hierbei wirkten W und \square auf Teilmengen von $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, deren Elemente man als (x, t) mit $t \in \mathbb{R}$ notierte. In diesen Fällen gilt

$$\Delta^* = \Delta, \quad W^* = -\partial_t - \Delta_x \quad \text{und} \quad \square^* = \square.$$

Insbesondere stimmt der oben definierte schwache Lösungsbegriff für die homogene Wellengleichung mit der in Definition 4.14 gegebenen überein.

(ii) Identifizieren wir wie üblich eine Funktion mit der zugehörigen Äquivalenzklasse und diese mit der zugehörigen regulären Distribution, so ist jede klassische Lösung eine schwache Lösung und jede schwache Lösung eine distributionelle Lösung (aber im Allgemeinen nicht umgekehrt). Natürlich hat man die Hoffnung, dass distributionelle Lösungen von PDG leichter gefunden/konstruiert werden können, als klassische oder schwache. Wir werden unten sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

(iii) Wegen der Linearität von T bilden die klassischen/schwachen/distributionellen Lösungen der homogenen Gleichung einen Unterraum von $C^m(\Omega)/L_1^{loc}(\Omega)/\mathcal{D}'(\Omega)$. Zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung unterscheiden sich stets nur um eine Lösung der homogenen Gleichung.

(iv) Natürlich gibt es auch nichtlineare DOP und PDG, etwa die Eikonalgleichung

$$(\partial_1 u)^2 + \dots + (\partial_d u)^2 = 1$$

aus der geometrischen Optik. In dieser Vorlesung betrachten wir jedoch nur lineare DOP und PDG.

Beispiel 5.17. (i) Sei $\Omega = \mathbb{R}^d, d \geq 2$ und

$$L : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{falls } d = 2 \\ \frac{1}{(2-d)\sigma_{d-1}} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & \text{falls } d \geq 3 \end{cases}$$

sei die Fundamentallösung des Laplace-Operators (bzw. der Laplace-Gleichung), vergleiche Definition 2.11. Insbesondere gilt nach Lemma 2.12, dass $L \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$, d.h. ΔL ist im distribu-

tionellen Sinne definiert.

Behauptung: Es gilt $\Delta L = \delta_0$ im distributionellen Sinne.

Beweis: Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und $R > 0$ so groß gewählt, dass $\text{supp}(\varphi) \subseteq B(0, R)$. Dann verschwinden in der Greenschen Darstellungsformel (Satz 2.13), angewandt auf $u = \varphi$, die Randintegrale und man erhält

$$\varphi(x) = \int_{B(0,R)} L(x-y)\Delta\varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} L(y-x)\Delta\varphi(y) dy.$$

Für $x = 0$ folgt insbesondere, dass

$$\langle \Delta L, \varphi \rangle := \langle L, \Delta^* \varphi \rangle = \langle L, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} L(y)\Delta\varphi(y) dy = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}^{d+1}$ und schreibe dessen Elemente als (x, t) mit $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$. Ferner sei $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\Phi}(x, t) := \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) \cdot \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

d.h. $\tilde{\Phi}$ ist die Nullerweiterung der zunächst auf $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ definierten Fundamentallösung Φ des Wärmeleitungsoperators $W = \partial_t - \Delta_x$ (vergleiche Definition 3.11).

Behauptung: Es ist $\tilde{\Phi} \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^{d+1})$ und es gilt $W\tilde{\Phi} = \delta_0$ im distributionellen Sinne.

Beweisskizze: Die lokale Integrierbarkeit ist leicht zu sehen. Weiterhin gilt für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$ mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle &= \langle \tilde{\Phi}, W^* \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \tilde{\Phi}(x, t)(-\partial_t - \Delta_x)\psi(x, t) d(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \Phi(x, t)(-\partial_t - \Delta_x)\psi(x, t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Ist nun $(t_k) \subseteq (0, \infty)$ eine Nullfolge, so folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz und dem Satz von Fubini

$$\langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\int_{t_k}^\infty \Phi(x, t)(-\partial_t \psi(x, t)) dt \right)}_{=\Phi(x, t_k)\psi(x, t_k) + \int_{t_k}^\infty \partial_t \Phi(x, t)\psi(x, t) dt} dx - \int_{t_k}^\infty \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t)\Delta_x \psi(x, t) dx \right)}_{\substack{\psi(\cdot, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \\ \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_x \Phi(x, t)\psi(x, t) dx}} dt \right),$$

also

$$\begin{aligned} \langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t_k)\psi(x, t_k) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{t_k}^\infty \underbrace{(\partial_t - \Delta_x)\Phi(x, t)\psi(x, t)}_{=W\Phi(x, t)=0} dt \right) dx \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t_k)\psi(x, t_k) dx. \end{aligned}$$

Nun beachten wir, dass $(\Phi(\cdot, t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ nach Beispiel 3.17 eine beschränkte Dirac-Folge ist. Daher

erhalten wir mit Beispiel 5.12 (ii), dass

$$\begin{aligned}\langle W\Phi, \psi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t_k) \psi(x, 0) dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t_k) (\psi(x, t_k) - \psi(x, 0)) dx \\ &= \psi(0, 0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t_k) (\psi(x, t_k) - \psi(x, 0)) dx\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Eigenschaften der Dirac-Folge und der gleichmäßigen Stetigkeit von ψ sieht man schließlich noch, dass der verbliebene Grenzwert gleich 0 ist, vergleiche den Beweis von Beispiel 5.12 (ii).

Wärmeleitungs- und Laplace-Operator sind Beispiele von linearen Differentialoperatoren mit **konstanten Koeffizienten**. Definieren wir die Polynome

$$P_\Delta(x) := x_1^2 + \dots + x_d^2 \quad \text{und} \quad P_W(y) := y_{d+1} - (y_1^2 + \dots + y_d^2),$$

so können wir formal schreiben

$$\Delta = P_\Delta(\partial) = P_\Delta(\partial_1, \dots, \partial_d) \quad \text{und} \quad W = P_W(\partial_1, \dots, \partial_d, \partial_t).$$

Allgemein lässt sich jeder lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$, also $T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, schreiben als $T = P(\partial)$ mit dem Polynom

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha.$$

In diesem Fall gilt $T^* = \check{P}(\partial)$ mit

$$\check{P}(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha.$$

Für solche Operatoren wollen wir nun den Begriff einer Fundamentallösung allgemein definieren.

Definition 5.18. Es sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$. Dann heißt $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ eine **Fundamentallösung** für $P(\partial)$, falls $P(\partial)F = \delta_0$.

Bemerkung 5.19. (i) Fundamentallösungen sind nicht eindeutig, denn mit F ist auch $F + u$ für jedes $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mit $P(\partial)u = 0$ eine solche.

(ii) Wir kennen aus den Beispielen 5.17 und 5.10 die Fundamentallösungen L von Δ auf \mathbb{R}^d , $\tilde{\Phi}$ von W auf \mathbb{R}^{d+1} und H von $\frac{d}{dx}$ auf \mathbb{R} (denn $H' = \delta_0$). Man beachte, dass wir in den ersten beiden Fällen stets von „der“ Fundamentallösung des Operators gesprochen haben, obwohl es sich nach (i) jeweils nur um eine spezielle handelt.

(iii) Nach Lemma 2.16 ist $u = L * f = f * L$ für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ eine klassische Lösung von $\Delta u = f$.

(iv) Betrachten wir $\tilde{\Phi}$ aus Beispiel 5.17 (ii). Sei $f : \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir erweitern sie auf \mathbb{R}^{d+1} mittels $f(x, t) := 0$ für $t \leq 0$. Dann können wir formal rechnen

$$\begin{aligned}u(x, t) &:= (\tilde{\Phi} * f)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) f(y, s) d(y, s) \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Phi(x - y, t - s)}_{=: \Phi_{t-s}(x-y)} \underbrace{f(y, s)}_{=: f_s(y)} dy \right) ds = \int_0^\infty (\Phi_{t-s} * f_s)(x) ds.\end{aligned}$$

Laut Duhamelscher Formel (Satz 3.23) ist dies unter geeigneten Voraussetzungen an f eine klassische Lösung von $Wu = f$

Die Beispiele in Teil (iii) und (iv) der Bemerkung stehen exemplarisch für die Rolle, die Fundamentallösungen spielen: man kann mittels Faltung aus einer Fundamentallösung von $P(\partial)$ stets eine Lösung der zugehörigen inhomogenen PDG erhalten.

Proposition 5.20. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ und $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ sei eine Fundamentallösung von $P(\partial)$. Dann ist $u := f * F$ für jedes $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ eine distributionelle Lösung von $P(\partial)u = f$.

Beweis. Nach Satz 1.15 ist u korrekt definiert und $u \in C(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$. Ferner gilt $u = f * F = F * f$. Damit folgt für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \langle P(\partial)u, \varphi \rangle &= \langle u, \check{P}(\partial)\varphi \rangle = \langle F * f, \check{P}(\partial)\varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (F * f)(x) (\check{P}(\partial)\varphi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x-y) f(y) dy \right) (\check{P}(\partial)\varphi)(x) dx. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = x - y$, dem Satz von Fubini und der Setzung $\varphi_y := \varphi(\cdot + y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ folgt also wegen $(\check{P}(\partial)\varphi_y)(z) = (\check{P}(\partial)\varphi)(z + y)$, dass

$$\begin{aligned} \langle P(\partial)u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\check{P}(\partial)\varphi)(x) F(x-y) dx \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\check{P}(\partial)\varphi)(z+y) F(z) dz \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(z) (\check{P}(\partial)\varphi_y)(z) dz \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \langle F, \check{P}(\partial)\varphi_y \rangle f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle P(\partial)F, \varphi_y \rangle f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \delta_0, \varphi_y \rangle f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_y(0) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) f(y) dy = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Also ist u eine distributionelle (sogar schwache) Lösung von $\check{P}(\partial)u = f$. □

Bemerkung 5.21. (i) Die Voraussetzungen der Proposition lassen sich abschwächen: Sie bleibt auch für allgemeine Fundamentallösungen $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und „kompakt getragene“ Distributionen $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gültig. Um dies zu zeigen, müssten wir den Faltungsbegriff auf Distributionen ausweiten, was hier zu weit führen würde.

(ii) Die Proposition sichert also eine distributionelle Lösung von $P(\partial)u = f$, sofern eine Fundamentallösung von $P(\partial)$ existiert. Nun sagt der **Satz von Malgrange-Ehrenpreis**^a, dass für jeden linearen partiellen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(\partial)$, mit $P \neq 0$, stets eine Fundamentallösung existiert. Die PDG $P(\partial)u = f$ ist also für jede kompakt getragene Distribution f im distributionellen Sinne stets lösbar.

^aBernard Malgrange, 1928-2024, Leon Ehrenpreis, 1930-2010

Hat man erst einmal eine distributionelle Lösung von $P(\partial)u = f$ gefunden, kann man versuchen zu zeigen, dass es sich tatsächlich um eine klassische Lösung handelt. Eine wichtige Klasse von Operatoren, für die dies der Fall ist nennt man hypoelliptisch.

Definition 5.22. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$. Dann nennt man $P(\partial)$ **hypoelliptisch**, falls für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und alle $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ die folgende Implikation gilt:

$$P(\partial)u \in C^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in C^\infty(\Omega)$$

Hierbei bedeutet die Annahme natürlich, dass die Distribution $P(\partial)u$ regulär ist und durch eine glatte Funktion dargestellt werden kann und die Folgerung, dass u einen glatten Repräsentanten besitzt.

Bemerkung 5.23. (i) Ist also $f \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ eine distributionelle (d.h. schwache) Lösung von $P(\partial)u = f$, so besitzt u einen glatten Repräsentanten $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ und aus dem Fundamentallemma folgt sofort, dass $P(\partial)u_0 = f$ im klassischen Sinne erfüllt ist. Man sagt in diesem Fall auch einfach, dass $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ selbst eine klassische Lösung ist. Dieser Terminologie werden wir uns im Folgenden anschließen.

(ii) Insbesondere folgt für hypoelliptisches $P(\partial)$ also

$$P(\partial)u = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in C^\infty(\Omega),$$

denn die Nullfunktion auf Ω ist glatt.

(iii) In der Literatur wird in der Definition hypoelliptischer Operatoren die Gültigkeit der Implikation in der Regel sogar für beliebige $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gefordert. Wir haben dies hier etwas abgeschwächt.

Wie können wir feststellen, ob ein gegebenes $P(\partial)$ hypoelliptisch ist? Nehmen wir einmal an, dies sei der Fall. Nehmen wir ferner an, dass $P(\partial)$ eine Fundamentallösung $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ besitzt. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, dass

$$\langle P(\partial)F, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0,$$

d.h. es gilt $P(\partial)F = 0$ auf $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Aus der Hypoelliptizität folgt damit, dass $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Der nächste Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 5.24. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ und zu $P(\partial)$ existiere eine Fundamentallösung

$$F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}).$$

Dann ist $P(\partial)$ **hypoelliptisch**.

Bevor wir zum Beweis kommen, betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 5.25. (i) Die Fundamentallösung L des Laplace-Operators Δ auf \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, erfüllt die Voraussetzungen des Satzes, d.h. Δ ist hypoelliptisch (vergleiche Bemerkung 2.19). Insbesondere folgt: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ im distributiven Sinne, d.h.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0, \quad (\star)$$

so gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ im klassischen Sinne. Man nennt Funktionen, die (\star) erfüllen auch **schwach harmonisch**. Damit sind schwach harmonische Funktionen also (genau wie harmonische Funktionen) automatisch glatt und damit selbst harmonisch. Dies nennt man auch das **Weylsche Lemma**.

(ii) Es lässt sich leicht zeigen, dass auch die Fundamentallösung $\tilde{\Phi}$ des Wärmeleitungsoperators W die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, d.h. auch W ist hypoelliptisch.

Teil (ii) hat noch eine interessante Verallgemeinerung des Weylschen Lemmas zur Folge.

Korollar 5.26 (Eigenfunktionen von Δ in $L_1^{loc}(\Omega)$ sind glatt). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ eine distributionelle (d.h. schwache) Lösung von $\Delta u = \lambda u$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = \lambda u$ im klassischen Sinne.

Beweis. Die Funktion

$$\tilde{u} : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{u}(x, t) := e^{-\lambda t} u(x)$$

ist in $L_1^{loc}(\Omega \times (0, \infty))$ und erfüllt $W\tilde{u} = 0$ im schwachen Sinne, wie man leicht nachrechnet. Da W hypoelliptisch ist, folgt $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega \times (0, \infty))$, d.h. auch die Funktion

$$(x, t) \mapsto e^{\lambda t} \tilde{u}(x, t) = u(x)$$

ist glatt auf $\Omega \times (0, \infty)$ und damit auch u auf Ω . □

Für den Beweis von Satz 5.24 müssen wir noch einmal über Faltungen sprechen. Hierzu sei

$$L_{1,c}(\mathbb{R}^d) := \{h \in L_1(\mathbb{R}^d) : \exists K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt mit } h\mathbb{1}_{K^c} = 0\},$$

d.h. $h \in L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$ ist integrierbar und verschwindet außerhalb einer kompakten Menge. Es gilt $C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L_{1,c}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 5.27. Es sei $h \in L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$ und $f \in C(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

- (i) Die Faltungen $h * f$ und $f * h$ sind auf ganz \mathbb{R}^d definiert und $h * f = f * h$. Ferner ist $h * f$ stetig und hat f kompakten Träger, so auch $h * f$. Genauer: Gilt $h\mathbb{1}_{K^c} = 0$, so ist

$$\text{supp}(h * f) \subseteq K + \text{supp}(f).$$

- (ii) Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, so gilt auch $h * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$\partial^\alpha (h * f) = h * \partial^\alpha f, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Insbesondere ist $h * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, falls $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

- (iii) Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\langle h * f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi * \check{h} \rangle \stackrel{\text{falls } f \in C_c}{=} \langle h, \varphi * \check{f} \rangle,$$

wobei $\check{h}(x) := h(-x)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Paarung zwischen Distribution und Testfunktion bezeichnet.

- (iv) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C(\mathbb{R}^d)$ mit $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} f$, so gilt auch

$$h * f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} h * f.$$

- (v) Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$ mit $h_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} h$. Dann gilt auch

$$h_n * f \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} h * f.$$

Beweis. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt mit $h\mathbb{1}_{K^c} = 0$.

(i) Für $x \in \mathbb{R}^d$ folgt mit der Stetigkeit von $z \mapsto f_x(z) := f(x - z)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |h(x - y)f(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - z)h(z)| dz \\ &= \int_K |f(x - z)h(z)| dz \leq \max_{z \in K} |f_x(z)| \int_K |h(z)| dz < \infty, \end{aligned}$$

d.h. $h * f$ und $f * h$ sind auf \mathbb{R}^d definiert. Dass $h * f = f * h$ folgt per Substitution im Integral. Sind $x_0 \in \mathbb{R}^d, r > 0$ beliebig, so ist die Abbildung

$$B := B[x_0, r] \ni x \mapsto f(x - z)h(z)$$

für jedes $z \in K$ stetig und da $B - K = \{b - k : b \in B, k \in K\}$ kompakt ist, gilt auch

$$\forall z \in K: \sup_{x \in B} |h(z)f(x - z)| \leq \max_{t \in B - K} |f(t)| \cdot |h(z)|.$$

Da $h \in L_1(K)$, folgt die Stetigkeit von

$$B[x_0, r] \ni x \mapsto (h * f)(x) = (f * h)(x) = \int_K f(x - z)h(z) dz$$

nun mit dem Satz über Parameterintegrale (siehe Satz A.2). Ist schließlich $x \notin K + \text{supp}(f)$, so ist $f(x - z) = 0$ für alle $z \in K$, woraus die letzte Aussage folgt.

(ii) Folgt analog wie (i) aus dem Satz über Parameterintegrale und Induktion über $|\alpha|$.

(iii) Zunächst ist $h * f \in C(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ nach (i), $\varphi * \check{h} = \check{h} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nach (ii) und, im Falle $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, auch $\varphi * \check{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alle drei Ausdrücke unter (iii) sind also definiert. Ferner gilt mit dem Satz von Tonelli, dass mit $K_0 := \text{supp}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |h(x - y)f(y)\varphi(x)| d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |h(z)f(x - z)\varphi(x)| d(x, z) \\ &= \int_{K_0 \times K} |h(z)f(x - z)\varphi(x)| d(x, z) \leq \max_{t \in K_0 - K} |f(t)| \|\mathbf{1}_{K_0}\varphi\|_1 \|1_K h\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

d.h. im Folgenden dürfen wir die Integrationsreihenfolgen beliebig vertauschen:

$$\begin{aligned} \langle h * f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x - y)f(y) dy \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x - y)\varphi(x) dx \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} (\check{h} * \varphi)(y)f(y) dy = \langle f, \check{h} * \varphi \rangle \end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned} \langle h * f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(z)f(x - z) dz \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)f(x - z) dx \right) h(z) dz \\ &= \langle h, \check{f} * \varphi \rangle = \langle h, \varphi * \check{f} \rangle. \end{aligned}$$

(iv) und (v): Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt mit Teil (iii) und (ii):

$$\langle h * f_n, \varphi \rangle = \langle f_n, \varphi * \check{h} \rangle \rightarrow \langle f, \varphi * \check{h} \rangle = \langle h * f, \varphi \rangle$$

und

$$\langle h_n * f, \varphi \rangle = \langle h_n, \varphi * \check{f} \rangle \rightarrow \langle h, \varphi * \check{f} \rangle = \langle h * f, \varphi \rangle.$$

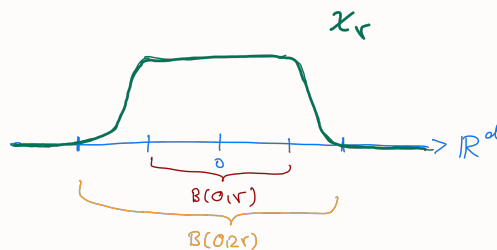
□

Damit können wir den Beweis von Satz 5.24 angehen. Im Beweis ist es zweckmäßig für offene Mengen $B \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ auch $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ als Teilmengen zu betrachten, indem wir etwa $f \in \mathcal{D}(B)$ durch 0 zu einer Funktion auf Ω und $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ durch 0 zu einer Funktion auf \mathbb{R}^d fortsetzen (tatsächlich haben wir das oben im Text vor Satz 5.24 auch schon einmal so gehandhabt).

Beweis (von Satz 5.24). Sei $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit $P(\partial)F = \delta_0$. Ferner sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ und es gelte $P(\partial)u =: f \in C^\infty(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass $u \in C^\infty(\Omega)$. Wir unterteilen den Beweis in zwei Teile und diese wiederum in mehrere Schritte.

Teil a) Wir zeigen, dass die Aussage lokal gilt, d.h. ist $x_0 \in \Omega$ beliebig, so existiert eine offene Kugel um x_0 auf der u glatt ist.

1. Wir wählen $\chi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \chi_r \leq 1$, $\chi_r = 1$ auf $B(0, r)$ und $\text{supp}(\chi_r) \subseteq B[0, 2r]$ (siehe Übungsaufgabe 40).



2. Wir setzen $F_r := F\chi_r$ und $G_r := F(1 - \chi_r)$. Dann gilt

$$F = F_r + G_r.$$

Ferner ist $F_r = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus B[0, 2r]$ und somit

$$F_r \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap L_{1,c}(\mathbb{R}^d).$$

Weiterhin ist $G_r = 0$ auf $B(0, r)$, d.h. die Singularität von f in 0 spielt keine Rolle und

$$G_r \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Schließlich gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus B[0, 2r])$:

$$\begin{aligned} \langle P(\partial)G_r, \varphi \rangle &= \langle G_r, \check{P}(\partial)\varphi \rangle = \langle (1 - \chi_r)F, \check{P}(\partial)\varphi \rangle \stackrel{\chi_r|_{B[0,2r]^c} = 0}{=} \langle F, \check{P}(\partial)\varphi \rangle \\ &= \langle P(\partial)F, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $\text{supp}(P(\partial)G_r) \subseteq B[0, 2r]$, d.h. $P(\partial)G_r$ hat kompakten Träger.

3. Die **Idee des Beweises** ist nun wie folgt: Wir möchten u lokal darstellen als

$$u = f * F_r + u * P(\partial)G_r.^a$$

Da hier f und $P(\partial)G_r$ glatt sind, wäre dann auch u glatt. Natürlich muss dies alles rechtfertigt werden.

4. Es sei $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so gewählt, dass

$$B := B(x_0, 3r) \subseteq B(x_0, 4r) \subseteq \Omega.$$

Wir setzen

$$u_B(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in B \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt $u_B \in L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$. Ist ferner $\varphi \in \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, so folgt

$$\langle P(\partial)u_B, \varphi \rangle = \langle u_B, \check{P}(\partial)\varphi \rangle = \langle u, \check{P}(\partial)\varphi \rangle = \langle P(\partial)u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

5. Es sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R}^d (vergleiche Beispiel 3.17 (ii)) und

$$u_n := \varphi_n * u_B \stackrel{\text{Lem. 5.27(ii)}}{\in} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Dann gilt mit Lemma 3.18, dass $u_n \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^d)} u_B$, also mit Beispiel 5.12 (ii) auch

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} u_B.$$

Mit Lemma 5.13 gilt dann ferner

$$P(\partial)u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} P(\partial)u_B.$$

6. Nach Proposition 5.20 gilt $u_n = P(\partial)(u_n * F)$ und damit wegen $F = F_r + G_r$ auch

$$u_n = P(\partial)(u_n * F_r) + P(\partial)(u_n * G_r) \stackrel{\text{Lem. 5.27(ii)}}{=} (P(\partial)u_n * F_r) + (u_n * P(\partial)G_r).$$

7. Nach 2. gilt $P(\partial)G_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. aus 5. und Lemma 5.27 (v) folgt

$$u_n * P(\partial)G_r \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} u_B * P(\partial)G_r.$$

8. Wir betrachten $B(x_0, r) \subseteq B = B(x_0, 3r)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, r)) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\text{supp}(\varphi * \check{F}_r) \subseteq B(x_0, r) + B[0, 2r] \subseteq B(x_0, 3r) = B,$$

also wegen 5. und Lemma 5.27 (iii) auch

$$\langle P(\partial)u_n * F_r, \varphi \rangle = \langle P(\partial)u_n, \varphi * \check{F}_r \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle P(\partial)u_B, \varphi * \check{F}_r \rangle \stackrel{4.}{=} \langle f, \varphi * \check{F}_r \rangle = \langle f * F_r, \varphi \rangle.$$

9. Aus 5. bis 8. folgt damit für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, r))$:

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u_B, \varphi \rangle = \mathcal{D}' - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \langle f * F_r, \varphi \rangle + \langle u_B * P(\partial)G_r, \varphi \rangle$$

Aus dem Fundamentallemma folgt also, dass

$$u|_{B(x_0, r)} = (f * F_r + u_B * P(\partial)G_r)|_{B(x_0, r)}.$$

Da f und $P(\partial)G_r$ glatt sind, ist nach Lemma 5.27 die rechte Seite eine glatte Funktion und damit ein glatter Repräsentant von $u|_{B(x_0, r)}$.

Teil b): u ist glatt auf Ω .

Seien $x_0, x_1 \in \Omega, x_0 \neq x_1$. Nach Teil a) existieren offene Kugeln $x_0 \in B_0, x_1 \in B_1$, so dass $u|_{B_0}$ und $u|_{B_1}$ glatt sind. Sind v_0, v_1 entsprechende glatte Repräsentanten und ist $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$, so stimmen v_0 und v_1 auf $B_0 \cap B_1$ fast sicher überein, denn beide repräsentieren $u|_{B_0 \cap B_1}$. Da die Funktionen stetig sind, folgt sogar $v_0|_{B_0 \cap B_1} = v_1|_{B_0 \cap B_1}$. Wir können also v_0 und v_1 mittels

$$v(x) := \begin{cases} v_0(x), & \text{falls } x \in B_0 \\ v_1(x), & \text{falls } x \in B_1 \end{cases}$$

zu einer glatten Funktion auf $B_0 \cup B_1$ zusammensetzen. Stellen wir nun Ω als abzählbare Vereinigung von solchen offenen Kugeln dar $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, so können wir die zugehörigen v_n genauso zu einer Funktion $v \in C^\infty(\Omega)$ zusammensetzen. Diese ist ein glatter Repräsentant von u . \square

^aAuf diese Formel kann man mit einer formalen Rechnung kommen:

$$u = P(\partial)(u * F) = P(\partial)(u * F_r) + P(\partial)(u * G_r) = (P(\partial)u * F_r) + (u * P(\partial)G_r) = (f * F_r) + (u * P(\partial)G_r),$$

wobei wir in der ersten Gleichung formal Proposition 5.20 genutzt haben.

— Nachtrag —

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch einmal auf die weitere **Klassifizierung von linearen Differentialoperatoren 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** eingehen. Ein solcher Operator

$$T : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

hat die Gestalt

$$(Tu)(x) = \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \partial_{jk} u(x) + \sum_{j=1}^d b_j \partial_j u(x) + cu(x), \quad x \in \Omega,$$

mit $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d} \setminus \{0\}$, $b = (b_1, \dots, b_d)^t \in \mathbb{R}^d$ und $c \in \mathbb{R}$. Hierbei kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass die Matrix A **symmetrisch** ist (sonst setze $\tilde{a}_{jk} := \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$ und verwende den Satz von Schwarz, d.h. $\partial_{jk} = \partial_{kj}$).

Nun sei $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertierbar. Wir betrachten M als lineare Koordinatentransformation

$$M : \Omega \rightarrow M(\Omega) =: \tilde{\Omega}$$

und versuchen M nun so zu wählen, dass T in den neuen Koordinaten $y := Mx$ eine möglichst einfache Gestalt hat. Dazu sei

$$j_M : C^2(\Omega) \rightarrow C^2(\tilde{\Omega}), \quad (j_M u)(y) := u(M^{-1}y) = u(x).$$

Stellen wir T in den neuen Koordinaten dar, d.h. betrachten wir $T_M : C^2(\tilde{\Omega}) \rightarrow C(\tilde{\Omega})$ definiert durch

$$T_M := j_M \circ T \circ j_M^{-1} = j_M \circ T \circ j_{M^{-1}},$$

so zeigt eine kurze Rechnung, dass

$$(T_M v)(y) = \sum_{j,k=1}^d (MAM^t)_{jk} \partial_{jk} v(y) + \sum_{j=1}^d (Mb)_j \partial_j v(y) + cv(y).$$

Aus der linearen Algebra wissen Sie, dass wir die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch eine

orthogonale Matrix M in **Diagonalgestalt** überführen können, d.h. wir können erreichen, dass

$$MAM^t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass dies genau die Eigenwerte von A sind (mit ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt). Mit dieser Wahl von M gilt dann also

$$T_M = \sum_{k=1}^d \lambda_k \partial_k^2 + \sum_{j=1}^d (Mb)_j \partial_j + c.$$

Diese Darstellung führt nun zu folgender Klassifizierung: Wir ignorieren die Terme niedrigerer Ordnung und nennen T

- (i) **elliptisch**, falls alle Eigenwerte von A (oder von $-A$) positiv sind,
- (ii) **hyperbolisch**, falls A (oder $-A$) genau $(d-1)$ positive und einen negativen Eigenwert besitzt,
- (iii) **parabolisch**, falls A (oder $-A$) $(d-1)$ positive Eigenwerte und den Eigenwert 0 besitzt. Ferner nennen wir T **parabolisch nicht-ausgeartet**, falls darüber hinaus $b \neq 0$ (also auch $Mb \neq 0$).

Bemerkung 5.28. (i) Diese Klassifizierung umfasst nur im Falle $d = 2$ alle möglichen Fälle.

(ii) Hängen die Koeffizienten doch von $x \in \Omega$ ab, betrachtet man entsprechend $A(x)$ und $b(x)$ und spricht von Elliptizität im Punkte x , usw. In diesen Fällen kann der Typ des Operators in verschiedenen Punkten von Ω natürlich unterschiedlich sein.

(iii) Man kann zeigen, dass jeder elliptische Operator auch hypoelliptisch ist.

Betrachten wir den elliptischen Fall genauer. Transformieren wir den Operator T_M mittels einer weiteren Koordinatentransformation

$$N = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_d|}}\right)$$

so erhalten wir in den neuen Koordinaten, dass

$$T_{N \circ M} = \pm \sum_{k=1}^d \partial_k^2 + \text{Terme niedrigerer Ordnung} = \pm \Delta + \text{Terme niedrigerer Ordnung}.$$

Genauso können wir die anderen Fälle behandeln und erhalten zusammengefasst:

- T ist genau dann **elliptisch**, wenn $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ existieren, so dass T nach einer linearen Koordinatentransformation die folgende Gestalt besitzt:

$$T = \sigma \Delta + \sum_{k=1}^d c_k \partial_k + c_0.$$

- T ist genau dann **hyperbolisch**, wenn $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ existieren, so dass T nach einer linearen Koordinatentransformation die folgende Gestalt besitzt:

$$T = \sigma \left(\partial_d^2 - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2 \right) + \sum_{k=1}^d c_k \partial_k + c_0.$$

Hierbei ist $\partial_d^2 - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2$ gerade der d'Alembert-Operator in $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ mit $x_d = t$.

- T ist genau dann **parabolisch**, wenn $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ existieren, so dass T nach einer linearen Koordinatentransformation die folgende Gestalt besitzt:

$$T = \sigma \left(\sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2 \right) + \sum_{k=1}^d c_k \partial_k + c_0.$$

Ist T sogar **nicht-ausgeartet parabolisch**, so kann er auf die Gestalt

$$T = \sigma \left(\partial_d - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2 \right) + \sum_{k=1}^{d-1} c_k \partial_k + c_0$$

transformiert werden. Hierbei ist $\partial_d - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2$ gerade der Wärmeleitungsoperator in $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ mit $x_d = t$.

Man nennt die hier angegebenen Darstellungen auch die **Normalformen** von elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialoperatoren.

6. Sobolev-Räume

Stichpunkte. Sobolev-Räume $W^{m,p}, W_0^{m,p}$ und H^m, H_0^m , Spurabbildung, Dirichlet-Problem für Poisson-Gleichung in H^1 , Variationsproblem, Poincaré-Ungleichung, elliptische Randwertprobleme in H^1

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $p \in [1, \infty]$. Dann ist $L_p(\Omega) \subseteq L_1^{loc}(\Omega) (\subseteq \mathcal{D}'(\Omega))$, denn mit der Hölderschen Ungleichung gilt mit $q^{-1} + p^{-1} = 1$, dass

$$\forall K \subseteq \Omega \text{ kompakt: } \int_K |f| \, dx \leq \|f\|_p \cdot (\lambda^d(K))^{1/q} < \infty.$$

Also ist jedes $f \in L_p(\Omega)$ beliebig oft distributionell ableitbar und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ist $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ wieder eine Distribution. Nun werden wir fordern, dass diese Ableitungen sogar im schwachen Sinne existieren (vergleiche Definition 5.7 (ii)) also ein $f_\alpha \in L_1^{loc}(\Omega)$ existiert, so dass $f_\alpha = \partial^\alpha f$, d.h.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \stackrel{!}{=} \langle f_\alpha, \varphi \rangle$$

bzw.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_\Omega f_\alpha(x) \varphi(x) \, dx.$$

Fordern wir noch zusätzlich, dass die f_α wieder ein Element von $L^p(\Omega)$ sind, gelangen wir zu den sogenannten Sobolev-Räumen.

Definition 6.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty]$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L_p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq m\}$$

der **Sobolev^a-Raum der Differentiationsordnung m und Integrationsordnung p** auf Ω . Weiterhin sei für $f \in W^{m,p}(\Omega)$ im Falle $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{m,p} := \|f\|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

und im Falle $p = \infty$

$$\|f\|_{m,\infty} := \|f\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

^aSergei Lwowsch Sobolev, 1908-1989

Beispiel 6.2. (i) Für $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ gilt nach Beispiel 5.10 (ii), dass

$$f' = \mathbb{1}_{(0,1)} - \mathbb{1}_{(-1,0]}$$

und somit $f \in W^{1,\infty}((-1, 1))$. Da $f'' = 2\delta_0 \notin L_1^{loc}$ gilt ferner $f \notin W^{2,\infty}((-1, 1))$

(ii) Ist $f \in C^1([a, b])$ (d.h. insbesondere gilt auch $f, f' \in L_\infty((a, b))$), so wissen wir aus den Übungen, dass $|f|' = \text{sign}(f)f'$, d.h. $|f| \in W^{1,\infty}((a, b))$.

Bemerkung 6.3. (i) Es ist $W^{m,p}(\Omega) \subseteq L_p(\Omega)$ ein linearer Unterraum. Ferner ist $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ und

$$W^{m+k,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ist $\lambda^d(\Omega) < \infty$, so gilt wegen $L_p(\Omega) \subseteq L_q(\Omega)$ auch

$$W^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

(ii) Da für $1 < p < \infty$ durch $|(x_1, \dots, x_n)|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert wird und

$$\|f\|_{m,p} = \left| (\|\partial^\alpha f\|_p)_{|\alpha| \leq m} \right|_p,$$

sehen wir sofort, dass auch $\|\cdot\|_{m,p}$ die Dreiecksungleichung erfüllt und somit eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ definiert (man beachte, dass $\|f\|_{m,p} = 0$ wegen $\|f\|_{m,p} \geq \|f\|_p$ auch $f = 0$ impliziert). Analog kann man im Falle $p = \infty$ argumentieren.

Die Wichtigkeit der Sobolev-Räume ist im nachfolgenden Satz begründet.

Satz 6.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $m \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$. Dann ist $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ vollständig, also ein Banach-Raum.

Beweis. Nur die Vollständigkeit von $W^{m,p}(\Omega)$ ist zu zeigen. Sei also $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$. Es ist zu zeigen, dass diese in $W^{m,p}(\Omega)$ konvergiert.

Nun gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$, dass

$$\|\partial^\alpha (f_n - f_k)\|_p \leq \|f_n - f_k\|_{m,p}.$$

Daher ist $(\partial^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge in $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Da dieser Raum vollständig ist, existiert also $f_\alpha \in L_p(\Omega)$ mit $\|\partial^\alpha f_n - f_\alpha\|_p \rightarrow 0$. Aus Beispiel 5.12 (i) folgt damit $\partial^\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} f_\alpha$, d.h. für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\langle f_\alpha, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle}_{=\partial^0 f_n} = (-1)^{|\alpha|} \langle f_0, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f_0, \varphi \rangle.$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt also $\partial^\alpha f_0 = f_\alpha \in L_p(\Omega)$. Also ist $f_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_{m,p}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f_n - \underbrace{\partial^\alpha f_0}_{=f_\alpha}\|_p^p = 0.$$

□

Besonders gute Eigenschaften haben die Sobolev-Räume im Falle $p = 2$.

Proposition 6.5. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $m \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Dann wird für $f, g \in H^m(\Omega)$ durch

$$\langle f, g \rangle_{m,2} := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha g(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf $H^m(\Omega)$ definiert. Ferner gilt $\|f\|_{m,2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{m,2}}$ und

$$(H^m(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{m,2})$$

ist ein Hilbert-Raum.^a

^aD.h. mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig.

Beweis. Dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,2}$ ein Skalarprodukt auf $H^m(\Omega)$ definiert, folgt sofort aus den Skalarprodukt-eigenschaften von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $L_2(\Omega)$. Dass $\|\cdot\|_{m,2}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{m,2}$ ist klar. Die Vollständigkeit ist dann ein Spezialfall von Satz 6.4. \square

Wir wollen nun auf $u \in W^{m,p}(\Omega)$ einen linearen Differentialoperator wirken lassen.

Lemma 6.6. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_\alpha \in L_\infty(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m$. Dann ist der lineare DOP

$$T : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega), \quad Tu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u$$

korrekt definiert, linear und stetig.

Beweis. Es genügt, die Aussage für jeden der beteiligten Summanden zu zeigen. Sei also $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und $|\alpha| \leq m$. Dann ist $\partial^\alpha u \in L_p(\Omega)$ und

$$\|a_\alpha \partial^\alpha u\|_p \leq \|a_\alpha\|_\infty \|\partial^\alpha u\|_p \leq \|a_\alpha\|_\infty \|u\|_{m,p},$$

d.h. die lineare Abbildung $W^{m,p}(\Omega) \ni u \mapsto a_\alpha \partial^\alpha u \in L_p(\Omega)$ ist korrekt definiert und stetig. \square

Nun können wir für gegebenes $f \in L_p(\Omega)$ also nach der Existenz von Lösungen $u \in W^{m,p}(\Omega)$ der PDG

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f$$

fragen und man hat zumindest die Hoffnung, dass Wissen über beschränkte lineare Operatoren auf Banach-Räumen (etwa aus Vorlesungen über Funktionalanalysis oder über Hilbert-Räume) beim Auffinden dieser Lösungen von Nutzen sein können. Bevor wir hierauf ein wenig eingehen werden, müssen wir noch über die Vorgabe von Randwerten sprechen. Dies ist nicht trivial, da überhaupt nicht klar ist, was der Wert der Äquivalenzklasse $u \in W^{m,p}(\Omega)$ auf $\partial\Omega$ (zumeist eine λ^d -Nullmenge!) überhaupt sein soll.

Bemerkung 6.7. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und besitze einen C^1 -Rand.

(a) Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, so ist $u|_{\partial\Omega}$ definiert und

$$u|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega) \subseteq L_\infty(\partial\Omega, \sigma) \subseteq L_p(\partial\Omega, \sigma),$$

wobei wir für die letzten beiden Inklusionen die Kompaktheit von $\partial\Omega$ benutzen. Die Abbildung

$$C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\partial\Omega, \sigma), \quad u \mapsto u|_{\partial\Omega}$$

ist natürlich linear. Mit einigem technischen Aufwand lässt sich nun zeigen, dass diese Abbildung sogar stetig ist und sich auf eindeutige Art zu einer linearen stetigen Abbildung

$$\text{tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\partial\Omega, \sigma)$$

erweitern lässt. Für diese sogenannte **Spurabbildung** (englisch: Spur = trace) gilt dann also insbesondere, dass

$$\forall u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) : \text{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

Damit macht es für eine gegebene Funktion $g \in L_p(\partial\Omega, \sigma)$ nun also Sinn zu fordern, dass $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auf dem Rand von Ω den Wert g annehmen soll. Dies bedeutet einfach, dass $\text{tr}(u) = g$ gelten soll.

(b) Von besonderem Interesse für uns sind die Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$, die auf dem Rand von Ω verschwinden. Jede Testfunktion $u \in \mathcal{D}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ hat natürlich diese Eigenschaft. Tatsächlich sind für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ äquivalent:

- (i) $\text{tr}(u) = 0$.
- (ii) Es existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - u\|_{1,p} \rightarrow 0$.

Auch hier müssen wir auf den recht aufwendigen Beweis verzichten (siehe etwa [7]).

Die letzte Bemerkung führt uns nun direkt zur folgenden Definition.

Definition 6.8. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty]$ und $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})},$$

d.h. man betrachtet den Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ im normierten Raum $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$. Ferner sei

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

Bemerkung 6.9. (i) Als abgeschlossener Unterraum des Banach-Raums $W^{m,p}(\Omega)$ ist auch $W_0^{m,p}(\Omega)$ ein Banach-Raum. Genauso ist $H_0^m(\Omega)$ ein Hilbert-Raum.

(ii) Man beachte, dass die Definition von $W_0^{m,p}(\Omega)$ keine Anforderungen an Ω erforderte. Gilt aber, dass Ω beschränkt ist und einen C^1 -Rand besitzt, so ist nach Bemerkung 6.7 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $\text{tr}(u) = 0$.

Damit können wir nun also auch sinnvoll **Randwertprobleme** formulieren. Etwa folgendes: Für gegebene $a_\alpha \in L_\infty(\Omega)$ und $f \in L_p(\Omega)$ und $g \in W^{m,p}(\Omega)$ ist ein $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gesucht, so dass

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f \quad \text{und} \quad u - g \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Die Randbedingung ist hierbei im Falle $p = 1$ gleichbedeutend mit $\text{tr}(u - g) = 0$, also $\text{tr}(u) = \text{tr}(g)$. Man beachte, dass unsere „Randfunktion“ g hier auf ganz Ω vorgegeben wird, obwohl wir streng genommen nur an ihren „Werten“ auf dem Rand von Ω interessiert sind.

Genauso hätte man das Randwertproblem auch, in etwas schwächerer Form, in $W^{1,p}(\Omega)$ betrachten können (d.h. man sucht in einem größeren Raum nach Lösungen). Dann wäre also bei vorgegebenem $f \in L_p(\Omega)$ und $g \in W^{1,p}(\Omega)$ ein $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gesucht, so dass $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f$. In diesem Fall wäre die linke Seite der PDG zunächst nur als Distribution definiert und Teil der Lösung wäre es zu zeigen, dass diese Distribution regulär ist und mit $f \in L_p(\Omega)$ übereinstimmt.

In dieser Form wollen wir das Randwertproblem nun für einen wichtigen Spezialfall, nämlich eine Verallgemeinerung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung, wirklich lösen. Wir schränken uns hierbei auf den Hilbert-Raum-Fall $p = 2$ ein und nutzen die Schreibweise

$$|\nabla u(x)|^2 := \sum_{j=1}^d |\partial_j u(x)|^2, \quad x \in \Omega,$$

für eine kürzere Darstellung der Resultate.

Satz 6.10. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Ferner sei $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$ und wir betrachten das folgende Randwertproblem in $H^1(\Omega)$:

$$\Delta u = f \quad \text{und} \quad u - g \in H_0^1(\Omega) \quad (*)$$

Dann gilt:

(a) $(*)$ besitzt eine eindeutige Lösung $u_0 \in H^1(\Omega)$.

(b) Es sei

$$\mathcal{E}(u) := \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int_{\Omega} f(x)u(x) dx, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Dann gilt für alle $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$, dass

$$\mathcal{E}(u_0) < \mathcal{E}(u),$$

d.h. u_0 ist der eindeutige Minimierer des **Variationsproblems**

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u) \mapsto \min_{u \in H^1(\Omega)} \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Bemerkung 6.11. Mit Teil (b) bekommt man eine Möglichkeit, die Lösung u_0 tatsächlich zu berechnen, indem man das zugehörige Variationsproblem löst. Dies ist die Basis von einigen numerischen Verfahren zur Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung.

Für den Beweis von Satz 6.10 ist es zunächst hilfreich, die Norm

$$\|f\|_{1,2} = \left(\|f\|_2^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_j f\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

auf $H_0^1(\Omega)$ durch eine äquivalente Norm zu ersetzen.

Lemma 6.12 (Poincaré-Ungleichung). ^a Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ex. $C = C(\Omega) > 0$ mit

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \|f\|_{1,2}^2 \leq C \cdot \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

Insbesondere wird durch

$$\|f\|_1 := \left(\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

eine zu $\|\cdot\|_{1,2}$ äquivalente Norm definiert, die von folgendem Skalarprodukt erzeugt wird:

$$\langle f, g \rangle_1 := \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle dx := \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \partial_j f(x) \partial_j g(x) dx.$$

^aHenri Poincaré, 1854-1912

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\varphi\|_2^2 &= \int_{\Omega} 1 \cdot \varphi^2(x) dx \stackrel{p.I. + \partial_j x_j = 1}{=} - \int_{\Omega} x_j \partial_j (\varphi^2(x)) dx \\ &= -2 \int_{\Omega} x_j \varphi(x) \partial_j \varphi(x) dx \stackrel{\text{alles} \geq 0}{=} 2 \left| \int_{\Omega} x_j \varphi(x) \partial_j \varphi(x) dx \right| \\ &\leq 2 \cdot \underbrace{\sup_{x \in \Omega} |x|}_{=: D} \int_{\Omega} |\varphi(x)| |\partial_j \varphi(x)| dx \stackrel{C.-S.}{\leq} 2D \|\varphi\|_2 \|\partial_j \varphi\|_2. \end{aligned}$$

Es folgt also $\|\varphi\|_2 \leq 2D \|\partial_j \varphi\|_2$ für alle $1 \leq j \leq d$ und damit

$$\|\varphi\|_{1,2}^2 = \|\varphi\|_2^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_j \varphi\|_2^2 \leq \underbrace{(1 + 4D^2)}_{=: C} \sum_{j=1}^d \|\partial_j \varphi\|_2^2$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ dicht ist und die Abbildungen $v \mapsto \|v\|_{1,2}$ und $v \mapsto \|\partial_j v\|_2$ stetig auf $H_0^1(\Omega)$ sind^a, folgt

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \quad \|f\|_{1,2}^2 \leq C \sum_{j=1}^d \|\partial_j f\|_2^2 = C \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

□

^aEs gilt

$$\left| \|v\|_{1,2} - \|v_0\|_{1,2} \right| \leq \|v - v_0\|_{1,2} \quad \text{und} \quad \left| \|\partial_j v\|_2 - \|\partial_j v_0\|_2 \right| \leq \|\partial_j v - \partial_j v_0\|_2 \leq \|v - v_0\|_{1,2}.$$

Wir benötigen ein weiteres Lemma für den Beweis von Satz 6.10.

Lemma 6.13. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in L_2(\Omega)$. Dann gilt:

(i) Die linearen Abbildungen

$$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \in \mathbb{R}$$

und

$$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx \in \mathbb{R}$$

sind stetig.

(ii) Es ist $\Delta u = f$ im distributionellen (d.h. schwachen) Sinne genau dann, wenn

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \langle u, v \rangle_1 = -\langle f, v \rangle,$$

d.h.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Beweis. (i) Unter zweimaliger Verwendung von Cauchy-Schwarz folgt

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega) : |\langle u, v \rangle_1| &\leq \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} |\partial_j u(x)| |\partial_j v(x)| dx \leq \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2 \|\partial_j v\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^d \|\partial_j v\|_2^2 \right)^{1/2} = \|u\|_1 \|v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_{1,2}, \end{aligned}$$

d.h. die lineare Abbildung $v \mapsto \langle u, v \rangle_1$ ist auf $H_0^1(\Omega)$ stetig. Genauso gilt

$$\left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{1,2},$$

d.h. auch die lineare Abbildung $v \mapsto \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$ ist auf $H_0^1(\Omega)$ stetig.(ii) Nach Definition der distributionellen Ableitungen gilt (mit der üblichen Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zwischen Distribution und Testfunktion)

$$\begin{aligned} \Delta u = f &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \sum_{j=1}^d \langle \partial_j^2 u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : - \sum_{j=1}^d \langle \partial_j u, \partial_j \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Da $\partial_j u, f \in L_2(\Omega)$ ist dies äquivalent zu

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \underbrace{\sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \partial_j u(x) \partial_j \varphi(x) dx}_{=\langle u, \varphi \rangle_1} = - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx. \quad (**)$$

Aber damit folgt die Äquivalenz von (*) und (**) aus Teil (i) und der Dichtheit von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$. \square Nun können wir Satz 6.10 mit Hilfe des Rieszschen¹ Darstellungssatzes beweisen.**Erinnerung 6.14** (Rieszscher Darstellungssatz). Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum. Dann gilt:(i) Ist $u \in \mathcal{H}$, so ist die Abbildung

$$\Phi_u : \mathcal{H} \ni v \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{R}$$

linear und stetig.

(ii) Ist umgekehrt $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig, so existiert ein eindeutiges $\tilde{u} \in \mathcal{H}$, so dass $\Phi = \Phi_{\tilde{u}}$, d.h.

$$\Phi(v) = \langle v, \tilde{u} \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$.

Einen Beweis finden Sie in Anhang A.4.

¹Frigyes Riesz, 1880-1956

Beweis (von Satz 6.10). (a) Es sei $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Wir betrachten $H_0^1(\Omega)$ mit der zu $\|\cdot\|_{1,2}$ äquivalenten Norm $\|\cdot\|_1 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_1}$. Dann zeigt zunächst Lemma 6.13, dass das lineare Funktional $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(v) := -\langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle_1 = - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \partial_j g(x) \partial_j v(x) dx$$

stetig ist. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert also ein eindeutiges $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \Phi(v) = \langle v, \tilde{u} \rangle_1 = \langle \tilde{u}, v \rangle_1.$$

Einsetzen von Φ liefert also

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad -\langle f, v \rangle = \langle \tilde{u}, v \rangle_1 + \langle g, v \rangle_1 = \langle \tilde{u} + g, v \rangle_1.$$

Nach Lemma 6.13 (ii) ist also $u_0 := \tilde{u} + g \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von $\Delta u = f$ mit $u_0 - g = \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Ist $w \in H^1(\Omega)$ eine weitere Lösung von $\Delta w = f$ mit $w - g \in H_0^1(\Omega)$, so folgt wieder mit Lemma 6.13:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \langle w - g, v \rangle_1 = \langle w, v \rangle_1 - \langle g, v \rangle_1 = -\langle f, v \rangle - \langle g, v \rangle_1 = \Phi(v).$$

Aus der Eindeutigkeit im Rieszschen Darstellungssatz folgt also, dass $w - g = \tilde{u}$, d.h. $w = \tilde{u} + g = u_0$.

(b) Wir können schreiben

$$\mathcal{E}(u) = \|u\|_1^2 + 2\langle f, u \rangle, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Nun sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und $u \neq u_0$. Für $w := u - u_0$ gilt dann $w = (u - g) + (g - u_0) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Aus der Poincaré-Ungleichung (Lemma 6.12) folgt damit auch

$$\|w\|_1^2 = \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} |\partial_j w(x)|^2 dx \geq C^{-1} \|w\|_{1,2}^2 > 0.$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= \mathcal{E}(w + u_0) = \|w + u_0\|_1^2 + 2\langle f, w + u_0 \rangle \\ &= \langle w + u_0, w + u_0 \rangle_1 + 2\langle f, w \rangle + 2\langle f, u_0 \rangle \\ &= \|w\|_1^2 + \|u_0\|_1^2 + 2\langle u_0, w \rangle_1 + 2\langle f, w \rangle + 2\langle f, u_0 \rangle \\ &= \mathcal{E}(u_0) + \|w\|_1^2 + 2(\langle u_0, w \rangle_1 + \langle f, w \rangle). \end{aligned}$$

Aber nach Lemma 6.13 (ii) gilt $\langle u_0, w \rangle_1 + \langle f, w \rangle = 0$, da $\Delta u_0 = f$, d.h. es folgt

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(u_0) + \|w\|_1^2 > \mathcal{E}(u_0).$$

□

Bemerkung 6.15. Ist $f \in C^\infty(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, so folgt aus der Hypoelliptizität von Δ , dass $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ und dass $\Delta u_0 = f$ auch im klassischen Sinne erfüllt ist.

Für spätere Zwecke betrachten wir noch den Spezialfall $g = 0$.

Korollar 6.16. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $f \in L_2(\Omega)$. Dann besitzt die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in $H_0^1(\Omega)$ eine eindeutige Lösung.

Beweis. Laut Satz 6.10 existiert genau ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\Delta u = f$ und $u = u - 0 \in H_0^1(\Omega)$. \square

Wir wollen Satz 6.10 nun noch auf allgemeinere sogenannte **elliptische Randwertprobleme** verallgemeinern. Dazu betrachten wir zunächst eine matrixwertige Funktion $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, die drei Bedingungen erfüllen soll:

$$(B) \quad \forall 1 \leq j, k \leq d : a_{jk} \in L_\infty(\Omega)$$

$$(S) \quad \forall 1 \leq j, k \leq d : a_{jk} = a_{kj}$$

$$(E) \quad \exists \gamma > 0 \forall x \in \Omega \forall y \in \mathbb{R}^d : \langle A(x)y, y \rangle = \sum_{j,k=1}^d a_{jk}(x)y_j y_k \stackrel{!}{\geq} \gamma |y|^2.$$

Insbesondere ist $A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ also wegen (S) für jedes $x \in \Omega$ eine symmetrische Matrix, deren Eigenwerte wegen (E) allesamt größer $\gamma > 0$ sind. Bei (E) handelt es sich um eine gleichmäßige Elliptizitätsanforderung an A im Sinne des letzten Kapitels.

Nehmen wir nun temporär zusätzlich an, dass die a_{jk} stetig differenzierbar sind. Dann können wir folgenden linearen Differentialoperator $T : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ betrachten:

$$Tu := -\operatorname{div}(A\nabla u) := -\operatorname{div} \left(\left(\sum_{k=1}^d a_{1k} \partial_k u, \dots, \sum_{k=1}^d a_{dk} \partial_k u \right)^t \right) = -\sum_{j,k=1}^d \partial_j (a_{jk} \partial_k u).$$

Bemerkung 6.17. (i) Im Falle $A = -E$ liefert dies gerade $T = \Delta$.

(ii) Man nennt solche Operatoren **von Divergenzform**. Für allgemeine Koeffizienten a_{jk} beschreiben diese Operatoren etwa die Wärmeleitung in einem inhomogenen Medium.

Lemma 6.18. Sei $a_{jk} \in C^1(\Omega)$ für alle $1 \leq j, k \leq d$. Dann sind für $u \in C^2(\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ äquivalent:

$$(i) \quad -\operatorname{div}(A\nabla u) = f.$$

(ii) Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^d \int_{\Omega} a_{jk}(x) \partial_k u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx$$

bzw. in abgekürzter Schreibweise

$$\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

Beweis. Fundamentallemma und partielle Integration. \square

Diese Äquivalenz wollen wir nun zum Anlass nehmen, wieder einen schwachen Lösungsbegriff für die Gleichung

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$$

einzuführen. Um diesen möglichst kompakt darzustellen, ist allerdings noch ein weiteres Hilfsresultat nötig.

Lemma 6.19. Die Funktion $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ erfülle die Voraussetzungen (B), (S) und (E). Ferner sei $c \in L_\infty(\Omega)$ und $c \geq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{A,c} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \langle A(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_\Omega c(x) u(x) v(x) dx$$

korrekt definiert und ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$. Ferner ist die assoziierte Norm $\|\cdot\|_{A,c} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{A,c}}$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_1$ (und damit zur Norm $\|\cdot\|_{1,2}$).

Beweis. Dass die Abbildung korrekt definiert ist, ist klar, denn das Produkt zweier L_2 -Funktionen liegt mit Hölder in L_1 und das Produkt einer L_1 - mit einer L_∞ -Funktion ist wieder eine L_1 -Funktion, d.h. die Integrale

$$\int_\Omega \underbrace{a_{jk}}_{\in L_\infty} \underbrace{\partial_k u}_{\in L_2} \underbrace{\partial_k v}_{\in L_2} dx \quad \text{und} \quad \int_\Omega c u v dx$$

existieren. Auch die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A,c}$ ist klar.

Die positive Definitheit folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \forall u \in H_0^1(\Omega) : \quad \langle u, u \rangle_{A,c} &= \int_\Omega \left(\langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle + c |u(x)|^2 \right) dx \\ &\stackrel{c \geq 0}{\geq} \int_\Omega \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx \stackrel{(E)}{\geq} \gamma \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \\ &= \gamma \sum_{j=1}^d \int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 dx = \gamma \|u\|_1^2 = \gamma \langle u, u \rangle_1. \end{aligned}$$

Nun machen wir eine kurze Nebenrechnung: Für $y \in \mathbb{R}^d$ und $x \in \Omega$ gilt

$$|A(x)y|^2 \leq \sum_{j=1}^d \left(\sum_{k=1}^d |a_{jk}(x)y_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{j,k=1}^d |a_{jk}(x)|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^d |y_k|^2 \right) \leq \underbrace{\left(\sum_{j,k=1}^d \|a_{jk}\|_\infty^2 \right)}_{=: \alpha^2} |y|^2$$

und damit für alle $x \in \Omega$, dass

$$|\langle A(x)y, y \rangle| \leq |A(x)y| |y| \leq \alpha |y|^2.$$

Damit können wir für $u \in H_0^1(\Omega)$ nun noch folgende Abschätzung zur obigen hinzufügen:

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_1^2 &\stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \|u\|_{A,c}^2 = \langle u, u \rangle_{A,c} = |\langle u, u \rangle_{A,c}| \\ &\leq \int_\Omega |\langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle| + |c(x)| |u(x)|^2 dx \\ &\leq \max(\alpha, \|c\|_\infty) \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right) dx \\ &= \max(\alpha, \|c\|_\infty) \|u\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Da die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_{1,2}$ äquivalent sind, sind mit obigen Rechnungen dann auch beide äquivalent zu $\|\cdot\|_{A,c}$. \square

Definition 6.20. Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d$ mit den obigen Voraussetzungen (B), (S) und (E) und $c \in L_\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$. Ferner sei $f \in L_2(\Omega)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ eine **schwache Lösung** von $-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = f$, falls

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \langle u, v \rangle_{A,c} = \langle f, v \rangle. \quad (\star)$$

Für gegebenes $g \in H^1(\Omega)$ besteht das zugehörige **elliptische Randwertproblem in $H^1(\Omega)$** im Auffinden einer solchen schwachen Lösung $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung 6.21. (i) Aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A,c}$ auf $H_0^1(\Omega)$ ist (\star) genau dann für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt, wenn es für alle Testfunktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ erfüllt ist. Im Falle $a_{jk} \in C^1(\Omega), c = 0$ und $f \in C(\Omega)$ sind die Lösungen von (\star) nach Lemma 6.18 also gerade die klassischen Lösungen von $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$.

(ii) Für $A = -E$ und $c = 0$ ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A,c} = -\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, d.h. (\star) ist in diesem Fall mit Lemma 6.13 (ii) gerade äquivalent dazu, dass $\Delta u = f$ im distributionellen Sinne.

Satz 6.22. Unter den obigen Voraussetzungen besitzt das elliptische Randwertproblem genau eine Lösung $u_0 \in H^1(\Omega)$.

Beweis. Wir statten $H_0^1(\Omega)$ mit der äquivalenten Norm $\|\cdot\|_{A,c}$ aus und betrachten die lineare Abbildung

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto -\langle g, v \rangle_{A,c} + \langle f, v \rangle.$$

Diese ist stetig, d.h. mit dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \Phi(v) = \langle v, \tilde{u} \rangle_{A,c} = \langle \tilde{u}, v \rangle_{A,c}$$

also

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \langle f, v \rangle = \langle \tilde{u} + g, v \rangle_{A,c}.$$

Setzen wir $u_0 := \tilde{u} + g$, so gilt $u_0 - g = \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ und u_0 ist eine Lösung von (\star) . Dass es die einzige Lösung ist, sieht man wie im Beweis von Satz 6.10. \square

7. Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator

Stichpunkte. Dirichlet-Laplace-Operator und dessen Inverse, Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, Einbettung $H_0^1 \rightarrow L_2$ kompakt, Sätze von Rellich-Kondrachov und Kolmogorov-Riesz-Fréchet

Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Bei der Methode der Trennung der Variablen für die Wärme- bzw. Wellengleichung haben wir stets vorausgesetzt, dass eine Folge $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $w_k \in C_0^2(\overline{\Omega})$.
- (ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert $\lambda_k > 0$ mit $\Delta w_k = -\lambda_k w_k$. D.h. w_k ist Eigenfunktion des Laplace-Operators zu einem negativen Eigenwert $-\lambda_k$.
- (iii) Es gilt $\lambda_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$.
- (iv) Die Folge $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine ONB von $L_2(\Omega)$.

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz einer solchen Folge, mit leicht schwächeren Eigenschaften, tatsächlich beweisen. Hierbei ersetzen wir die Forderungen (i) und (ii) durch

- (i)' Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $w_k \in H_0^1(\Omega)$.
- (ii)' Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert $\lambda_k > 0$ mit $\Delta w_k = -\lambda_k w_k$ im distributionellen Sinne.

Mit Korollar 5.26 folgt hieraus dann sogar $w_k \in C^\infty(\Omega)$ und dass $\Delta w_k = -\lambda_k w_k$ sogar im klassischen Sinne gilt. Nur dass w_k sich (inklusive seiner Ableitungen) stetig bis auf den Rand fortsetzen lässt, werden wir nicht zeigen können (aber es sei gesagt, dass diese Aussage für genügend glatten Rand tatsächlich auch wahr ist).

Wir werden (i)', (ii)', (iii) und (iv) zeigen können, indem wir Resultate über lineare Operatoren im Hilbert-Raum $L_2(\Omega)$ zu Hilfe nehmen.

Definition 7.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir definieren einen linearen Operator

$$A : D(A) \subseteq L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

wie folgt:

- (a) Der Operator sei definiert auf

$$D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L_2(\Omega)\}.$$

Dies ist ein linearer Unterraum von $H_0^1(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$. Es ist $u \in H_0^1(\Omega)$ genau dann Element von $D(A)$, wenn die Distribution Δu regulär und ein Element von $L_2(\Omega)$ ist.

- (b) Für $u \in D(A)$ setze man

$$Au := -\Delta u \in L_2(\Omega).$$

Man nennt den Operator A auch den **Dirichlet-Laplace-Operator** in $L_2(\Omega)$.

Da wir das Minuszeichen in die Definition von A eingebaut haben, sind wir nun also interessiert an Eigenfunktionen $w \in D(A)$ mit $Aw = \lambda w$ für ein $\lambda > 0$. Das nächste Lemma zeigt, dass es genügt, die Eigenfunktionen des zu A inversen Operators zu betrachten.

Lemma 7.2. (i) Der Dirichlet-Laplace-Operator $A : D(A) \subseteq L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ ist bijektiv, d.h. der inverse Operator

$$G := A^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow D(A) \subseteq L_2(\Omega)$$

existiert und ist linear.

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $w \in L_2(\Omega)$ gilt:

$$w \in D(A) \text{ und } Aw = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad Gw = \lambda^{-1}w.$$

Beweis. (i) Sei $f \in L_2(\Omega)$ beliebig. Dann sind äquivalent:

$$(I) \quad \exists! u \in D(A) : Au = f$$

$$(II) \quad \exists! u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u = -f.$$

Aber (II) ist nach Korollar 6.16 wahr. Also ist $A : D(A) \rightarrow L_2(\Omega)$ bijektiv. Dass $A^{-1} = G$ dann ebenfalls linear ist, ist klar (warum?).

(ii) Gilt $Gw = \lambda^{-1}w$, so ist $w = \lambda Gw \in D(A)$ und $Aw = \lambda AGw = \lambda w$. Ist umgekehrt $w \in D(A)$ und $Aw = \lambda w$, so folgt $w = GAw = \lambda Gw$, also $Gw = \lambda^{-1}w$. \square

Der inverse Operator $G = A^{-1}$ hat bessere Eigenschaften als der Operator A . Zum Beispiel ist er stetig.

Erinnerung 7.3. (i) Es seien $(X_i, \|\cdot\|_i), i = 1, 2, 3$ normierte Räume. Dann sei

$$\mathcal{B}(X_1, X_2) := \{T : X_1 \rightarrow X_2 \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

und $\mathcal{B}(X_1) := \mathcal{B}(X_1, X_1)$. Man beachte, dass $T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ auf ganz X_1 definiert ist.

(ii) Ein linearer Operator $T : X_1 \rightarrow X_2$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist, d.h.

$$\exists C \geq 0 \forall x \in X_1 : \|Tx\|_2 \leq C \|x\|_1.$$

Das Infimum aller solcher Konstanten C wird die Operatornorm von T genannt und mit $\|T\|$ bezeichnet.

(iii) Gilt $T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ und $S \in \mathcal{B}(X_2, X_3)$, so gilt $ST \in \mathcal{B}(X_1, X_3)$ (und $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$).

Um zu zeigen, dass $G = A^{-1} \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$ gilt, machen wir uns zunutze, dass der Wertebereich von G gleich $D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ ist. Also können wir G auch als Operator von $L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ auffassen, den wir wie folgt notieren:

$$G_1 : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad G_1 u := Gu.$$

Betrachten wir weiterhin die **Einbettung**

$$J : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad Ju = u,$$

so gilt also $G = JG_1$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ L_2(\Omega) & \xrightarrow{\quad} & L_2(\Omega) \\ & \searrow G_1 & \nearrow J \\ & H_0^1(\Omega) & \end{array}$$

Lemma 7.4. Es gilt $J \in \mathcal{B}(H_0^1(\Omega), L_2(\Omega))$ und $G_1 \in \mathcal{B}(L_2(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Insbesondere folgt auch $G = JG_1 \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$.

Beweis. (i) Für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $\|Ju\|_2 = \|u\|_2 \leq \|u\|_{1,2}$.

(ii) Es sei $u \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ und $Au =: f \in L_2(\Omega)$. Dann gilt $\Delta u = -f$, d.h. mit Lemma 6.13, Teil (ii), folgt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, dass

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle f, v \rangle \quad \text{bzw. ausgeschrieben} \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Für $v = u$ folgt mit Cauchy-Schwarz

$$\|u\|_1^2 := \langle u, u \rangle_1 = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq \|f\|_2 \|u\|_{1,2} \leq \sqrt{C} \|f\|_2 \|u\|_1,$$

wobei wir in der letzten Abschätzung die Poincarésche Ungleichung und die dort vorkommende Konstante $C = C(\Omega) > 0$ verwendet haben (Lemma 6.12). Insgesamt erhalten wir also

$$\|u\|_1 \leq \sqrt{C} \|f\|_2.$$

Da $Au = f$, ist $u = A^{-1}f = Gf$, d.h. es folgt

$$\|Gf\|_1 \leq \sqrt{C} \|f\|_2, \quad f \in L_2(\Omega),$$

und somit ist der lineare Operator $G_1 : (L_2(\Omega), \|\cdot\|_2) \rightarrow (H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ beschränkt, also stetig. Zuletzt erinnere man sich noch, dass $\|\cdot\|_1$ und die ursprüngliche Norm $\|\cdot\|_{1,2}$ auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalent sind. \square

Der inverse Operator $G = A^{-1}$ hat eine weitere wichtige Eigenschaft.

Lemma 7.5. $G = A^{-1}$ ist **selbstadjungiert**, d.h.

$$\forall f, g \in L_2(\Omega) : \quad \langle Gf, g \rangle = \langle f, Gg \rangle,$$

und **positiv**, d.h.

$$\forall f \in L_2(\Omega) \setminus \{0\} : \quad \langle Gf, f \rangle > 0.$$

Insbesondere sind dann auch alle Eigenwerte von G positiv.

Beweis. Seien $f, g \in L_2(\Omega)$ beliebig. Ferner sei $Gf =: v \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ und $Gg =: u \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$. Dann gilt also $\Delta v = -Av = -f$ und $\Delta u = -Au = -g$. Mit zweimaliger Anwendung von Lemma 6.13, Teil (ii), folgt also

$$\langle Gf, g \rangle = \langle v, g \rangle = \langle g, v \rangle = \langle u, v \rangle_1$$

und

$$\langle f, Gg \rangle = \langle f, u \rangle = \langle v, u \rangle_1 = \langle u, v \rangle_1,$$

d.h. beide Terme sind gleich. Genauso folgt mit Lemma 6.13 und der Poincaréschen Ungleichung, dass

$$\langle Gf, f \rangle = \langle v, f \rangle = \langle v, v \rangle_1 = \|v\|_1^2 \geq C^{-1} \|v\|_{1,2}^2 > 0,$$

falls $v \neq 0$. Aber es ist $v \neq 0$ genau dann, wenn $f \neq 0$, da G invertierbar ist. \square

Damit wissen wir also, dass alle Eigenwerte von G positiv sind. Dass überhaupt Eigenwerte existieren, ist aber noch nicht gezeigt. Zusammen mit allen weiteren fehlenden Eigenschaften wird dies aus der

Tatsache folgen, dass G ein **kompakter Operator** auf $L_2(\Omega)$ ist.

Erinnerung 7.6. (i) Ein linearer Operator $K : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ heißt **kompakt**, geschrieben $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, falls das Bild jeder beschränkten Menge aus X in Y relativ kompakt ist, d.h.

$$\forall U \subseteq X : U \text{ beschränkt} \Rightarrow \overline{K(U)} \subseteq Y \text{ kompakt.}$$

Da jede beschränkte Menge in einer Kugel $B_X[0, r] = rB_X[0, 1]$ enthalten ist, ist K genau dann kompakt, wenn das Bild der (abgeschlossenen) Einheitskugel aus X in Y relativ kompakt ist, d.h.

$$\overline{K(B_X[0, 1])} \subseteq Y \text{ ist kompakt.}$$

Dies ist insbesondere der Fall, falls K endlich-dimensionales Bild in Y besitzt (d.h. sogenannte **Operatoren von endlichem Rang** sind kompakt).

(ii) Es gilt $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$. Ist $K \in \mathcal{K}(X, Y), R \in \mathcal{B}(X_0, X), L \in \mathcal{B}(Y, Y_1)$, so ist auch $LKR : X_0 \rightarrow Y_1$ kompakt.

(iii) Ist $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit Hilbert-Räumen $\mathcal{H}_i, i = 1, 2$, so ist K genau dann kompakt, wenn er sich in der Operatornorm beliebig genau durch Operatoren endlichen Ranges approximieren lässt.

Für uns sind kompakte Operatoren aufgrund des folgenden Satzes wichtig.

Satz 7.7 (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren). Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein Hilbert-Raum und $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sei **kompakt** und **selbstadjungiert**. Dann existiert $M \subseteq \mathbb{N}$, eine Familie $(\mu_n)_{n \in M}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (mit $\mu_n \rightarrow 0$ falls M nicht endlich ist) und ein ONS $(w_n)_{n \in M}$ von \mathcal{H} , so dass

$$\forall x \in \mathcal{H} : Kx = \sum_{n \in M} \mu_n \langle x, w_n \rangle_{\mathcal{H}} w_n.$$

Insbesondere ist jedes w_n eine Eigenfunktion von K zum Eigenwert μ_n , d.h. $Kw_n = \mu_n w_n$.

Beweis. Siehe zum Beispiel [12] oder [13]. □

Korollar 7.8. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 7.7 sei \mathcal{H} unendlich-dimensional und K injektiv. Dann ist M unendlich, kann also ohne Einschränkung $= \mathbb{N}$ gewählt werden, und die Familie $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine ONB von \mathcal{H} .

Beweis. Es gilt

$$\{x \in \mathcal{H} \mid Kx = 0\} = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, w_n \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \text{ für alle } n \in M\} =: \{w_n\}_{n \in M}^{\perp}.$$

Da K injektiv ist, folgt also

$$\{0\} = \{w_n\}_{n \in M}^{\perp},$$

d.h.

$$\mathcal{H} = \{0\}^{\perp} = \{w_n\}_{n \in M}^{\perp\perp} = \overline{\text{Lin}}(\{w_n\}_{n \in M}).$$

Dies zeigt, dass $(w_n)_{n \in M}$ eine ONB von \mathcal{H} ist (siehe Erinnerung 3.27). Da \mathcal{H} unendlich-dimensional ist, kann M insbesondere nicht endlich sein. □

Damit bleibt für uns also zu zeigen, dass $G \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$ kompakt ist. Die Injektivität, Selbstadjungiertheit und Positivität von G liefert dann mit dem vorherigen Korollar, dass eine ONB $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $L_2(\Omega)$ und eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ existiert, so dass

$$Gw_n = \mu_n w_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

Aus Lemma 7.2 folgte dann $w_n \in D(A)$ und, mit $\lambda_n := \mu_n^{-1}$,

$$Aw_n = -\Delta w_n = \lambda_n w_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Wie zeigen wir nun die Kompaktheit von G ? Dazu schauen wir erneut auf das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ L_2(\Omega) & \xrightarrow{\quad} & L_2(\Omega) \\ & G_1 \searrow & \nearrow J \\ & H_0^1(\Omega) & \end{array}$$

und erinnern, dass $G_1 : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ beschränkt ist. Die Kompaktheit von G folgt also, sobald wir die Kompaktheit der Einbettung $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ gezeigt haben. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 7.9 (von Rellich-Kondrachov).^a Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$J_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega), \quad J_p f = f$$

kompakt.

^aFranz Rellich, 1906-1955, Vladimir Kondrashov, 1909-1971

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass J_p die abgeschlossene Einheitskugel von $W_0^{1,p}(\Omega)$ in eine relativ kompakte Teilmenge von $L_p(\Omega)$ abbildet. Es ist dazu ratsam, noch einmal daran zu erinnern, wie kompakte bzw. relativ kompakte Mengen in metrischen Räumen überhaupt charakterisiert werden können.

Erinnerung 7.10. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Es sind äquivalent:

- (i) X ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
- (ii) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (iii) X ist vollständig und total beschränkt (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele ε -Kugeln, die X überdecken).

Ferner heißt $M \subseteq X$ kompakt, falls $(M, d|_{M \times M})$ kompakt ist.

Wir haben es hier aber nicht mit allgemeinen metrischen Räumen zu tun, sondern mit Funktionsräumen. Das Paradebeispiel eines Kompaktheitsresultats ist hier das folgende.

Satz 7.11 (von Arzelà-Ascoli).^a Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $M \subseteq C(X)$, d.h. jedes $f \in M$ ist eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ist dann M

- (i) beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_\infty < \infty$, und
- (ii) gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

so ist M relativ kompakt in $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$.

^aCesare Arzelà, 1847-1912, Giulio Ascoli, 1843-1896

Beweis. Dieser Satz wird oft in Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen bewiesen (und dann im Beweis des Satzes von Peano benutzt). In der Literatur ist er zum Beispiel in [13] zu finden. \square

Nun sind wir leider nicht an kompakten Teilmengen von $C(X)$ interessiert, sondern an kompakten Teilmengen der L^p -Räume. Hier hilft folgendes Analogon des Satzes von Arzelà-Ascoli. Wir benötigen etwas Notation: für $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ und $y \in \mathbb{R}^d$ sei $f_y \in L_p(\mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$f_y(x) := f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Satz 7.12 (von Kolmogorov-Riesz-Fréchet). ^a Sei $1 \leq p < \infty$ und $M \subseteq L_p(\mathbb{R}^d)$ habe folgende Eigenschaften:

- (i) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_p < \infty$, und
- (ii) $\lim_{y \rightarrow 0} \sup_{f \in M} \|f_y - f\|_p = 0$.^b

Ist dann $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und

$$M|_{\Omega} := \{f|_{\Omega} : f \in M\},$$

so ist $M|_{\Omega}$ relativ kompakt in $L_p(\Omega)$.

^a Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov, 1903-1987, Marcel Riesz, 1886-1969, Maurice René Fréchet, 1878-1973

^b Dies ist eine Art von gleichgradiger Stetigkeit in L_p .

Schauen wir uns zunächst an, wie der Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet zum Beweis des Satzes von Rellich-Kondrachov verwendet werden kann.

Beweis (des Satzes von Rellich-Kondrachov). Es sei

$$M := \{f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq 1\}.$$

Nehmen wir an, wir könnten die beiden Eigenschaften aus dem Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet für diese Menge zeigen. Dann wäre $M|_{\Omega} \subseteq L_p(\Omega)$ relativ kompakt. Nun sei

$$B_0^{1,p}[0,1] := \{f \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|f\|_{1,p,\Omega} \leq 1\},$$

d.h. $B_0^{1,p}[0,1]$ ist die abgeschlossene Einheitskugel in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass diese auch in $L_p(\Omega)$ relativ kompakt ist. Dazu erweitern wir $f \in B_0^{1,p}[0,1]$ durch 0 zu einer Funktion auf \mathbb{R}^d , d.h. wir setzen

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \notin \Omega. \end{cases}$$

In den Übungen haben Sie gezeigt, dass $\tilde{f} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\|\tilde{f}\|_{1,p,\mathbb{R}^d} = \|f\|_{1,p,\Omega} \leq 1$. Insbesondere gilt damit $\tilde{f} \in M$ und somit

$$f = \tilde{f}|_{\Omega} \in M|_{\Omega} \quad \text{d.h.} \quad B_0^{1,p}[0,1] \subseteq M|_{\Omega}.$$

Als Teilmenge einer relativ kompakten Menge ist $B_0^{1,p}[0,1]$ damit selbst relativ kompakt in $L_p(\Omega)$ (denn abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt).

Es bleibt, die Eigenschaften (i) und (ii) aus dem Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet für M nachzuweisen:

(i) Für alle $f \in M$ gilt $\|f\|_p \leq \|f\|_{1,p} \leq 1$, d.h. M ist beschränkt.

(ii) Zunächst behaupten wir, dass für alle $f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $y \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass

$$\|f_y - f\|_p \leq |y|_q \|f\|_{1,p} \quad (\star),$$

wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ und $|y|_q := \left(\sum_{j=1}^d |y_j|^q\right)^{1/q}$ bzw. $|y|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |y_j|$.

Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ dicht ist, genügt es, dies für den Fall $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ zu beweisen. Hier gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \|f_y - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x-ty) dt \right|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 -\langle y, \nabla f(x-ty) \rangle dt \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\langle y, \nabla f(x-ty) \rangle| dt \right)^p dx. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Hölder-Ungleichung und $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, dass

$$|\langle y, \nabla f(z) \rangle| = \left| \sum_{j=1}^d y_j \partial_j f(z) \right| \leq \left(\sum_{j=1}^d |y_j|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^d |\partial_j f(z)|^p \right)^{1/p} = |y|_q \cdot |\nabla f(z)|_p,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \|f_y - f\|_p^p &\leq |y|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\nabla f(x-ty)|_p dt \right)^p dx \stackrel{\text{Höld.}}{\leq} |y|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\nabla f(x-ty)|_p^p dt \right) dx \\ &= |y|_q^p \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x-ty)|_p^p dx \right) dt = |y|_q^p \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(z)|_p^p dz \right) dt \\ &= |y|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(z)|_p^p dz = |y|_q^p \left(\sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j f(z)|^p dz \right) \leq |y|_q^p \|f\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Also ist (\star) bewiesen. Aber für $f \in M$ folgt aus (\star) , dass

$$\|f_y - f\|_p \leq |y|_q, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

d.h.

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \sup_{f \in M} \|f_y - f\|_p = 0.$$

□

Zuletzt muss nur noch der Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet bewiesen werden.

Beweis (von Satz 7.12). Wir setzen (i) und (ii) voraus, d.h. $M \subseteq L_p(\mathbb{R}^d)$ ist eine Teilmenge, so dass zum einen

$$C_M := \sup_{f \in M} \|f\|_p < \infty$$

und zum anderen, dass für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$, das wir im Folgenden zunächst

fixieren und später konkret wählen werden, ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$\forall f \in M \quad \forall y \in \mathbb{R}^d : \quad |y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f_y - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Wir müssen zeigen, dass $\overline{M|_\Omega}$ in $L_p(\Omega)$ kompakt ist. Da mit $L_p(\Omega)$ auch die abgeschlossene Teilmenge $\overline{M|_\Omega}$ vollständig ist, genügt es nach Erinnerung 7.10 zu zeigen, dass $M|_\Omega$ (und damit auch $\overline{M|_\Omega}$) total beschränkt ist. Als Hilfsmittel hierzu sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R}^d , so gewählt, dass $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq B(0, 1/n)$.

1. Schritt: Ist n so groß gewählt, dass $\frac{1}{n} \leq \delta$, so gilt

$$\forall f \in M : \quad \|f * \varphi_n - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Beweis: Mit den üblichen Rechenricks für Dirac-Folgen können wir rechnen

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_n - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \varphi_n(y) dy \right|^p dx \\ &\stackrel{\text{Höld.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_n(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(y) dy \right)^{p/q} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_n(y) dy \right) dx \\ &= \int_{B(0, 1/n)} \varphi_n(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy \\ &= \int_{B(0, 1/n)} \varphi_n(y) \|f_y - f\|_p^p dy \leq \varepsilon^p \int_{B(0, 1/n)} \varphi_n(y) dy \leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

2. Schritt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$M_n := \{(f * \varphi_n)|_{\overline{\Omega}} : f \in M\}$$

relativ kompakt in $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis: Nach Satz 1.15 ist für jedes $f \in M$ die Funktion

$$f * \varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

und es gilt mit Hölder, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und Annahme (i), dass

$$\|f * \varphi_n\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) \varphi_n(y)| dy \leq \|\varphi_n\|_q \|f\|_p \leq \|\varphi_n\|_q \cdot C_M. \quad (\star)$$

Aus der Mittelwertungleichung folgt ferner

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^d : \quad |(f * \varphi_n)(x) - (f * \varphi_n)(y)| &\leq |x - y| \cdot \sup\{|\nabla(f * \varphi_n)(x + h(y-x))| : h \in [0, 1]\} \\ &\leq |x - y| \cdot \sup\{|\nabla(f * \varphi_n)(z)| : z \in \mathbb{R}^d\} \end{aligned}$$

und

$$|\nabla(f * \varphi_n)(z)| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq j \leq d} |\partial_j(f * \varphi_n)(z)| = \sqrt{d} \max_{1 \leq j \leq d} |f * (\partial_j \varphi_n)(z)| \stackrel{(\star)}{\leq} \underbrace{\sqrt{d} \left(\max_{1 \leq j \leq d} \|\partial_j \varphi_n\|_q \right)}_{=: C_{n,d}} \cdot \|f\|_p,$$

d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : |(f * \varphi_n)(x) - (f * \varphi_n)(y)| \leq C_{n,d} |x - y| \|f\|_p \leq C_{n,d} \cdot C_M \cdot |x - y| \quad (**)$$

Die Abschätzungen (*) und (**) zeigen, dass M_n beschränkt und gleichgradig stetig ist, d.h. die Aussage in Schritt 2 folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli.

3. Schritt: Fixiere $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n \leq \delta$. Nach Schritt 2 ist M_n in $C(\overline{\Omega}, \|\cdot\|_\infty)$ total beschränkt, d.h. zu obigem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele ε -Kugeln in $(C(\overline{\Omega}, \|\cdot\|_\infty))$, die M_n überdecken. Es existiert also $m = m(\varepsilon, M_n) \in \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_m \in C(\overline{\Omega})$, so dass für jedes $f \in M$ ein $j = j(f) \in \{1, \dots, m\}$ existiert mit

$$\|(f * \varphi_n)|_{\overline{\Omega}} - g_j\|_{\infty, \overline{\Omega}} \leq \varepsilon,$$

also auch

$$\|(f * \varphi_n)|_{\overline{\Omega}} - g_j\|_{p, \overline{\Omega}} \leq \varepsilon \left(\lambda^d(\overline{\Omega}) \right)^{1/p}.$$

Aber dann folgt mit Schritt 1, dass

$$\begin{aligned} \|f|_{\Omega} - g_j\|_{p, \Omega} &\leq \|f|_{\Omega} - (f * \varphi_n)|_{\Omega}\|_{p, \Omega} + \|(f * \varphi_n)|_{\Omega} - g_j\|_{p, \Omega} \\ &\leq \|f - (f * \varphi_n)\|_{p, \mathbb{R}^d} + \|(f * \varphi_n)|_{\Omega} - g_j\|_{p, \Omega} \\ &\leq \varepsilon(1 + (\lambda^d(\overline{\Omega}))^{1/p}). \end{aligned}$$

Ist nun $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig vorgegeben, so können wir unser obiges ε so klein wählen, dass $\varepsilon(1 + (\lambda^d(\overline{\Omega}))^{1/p}) < \tilde{\varepsilon}$ und sehen, dass

$$M|_{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \{f \in L_p(\Omega) : \|f - g_j\|_{p, \Omega} \leq \tilde{\varepsilon}\}.$$

Also ist $M|_{\Omega}$ total beschränkt und der Beweis komplett. \square

A. Anhang

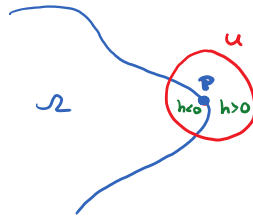
A.1. Fakten aus der Vektoranalysis

Glatte Ränder und der Divergenzsatz

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir sagen Ω hat einen C^k -**Rand**, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls zu jedem $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $h \in C^k(U)$ existiert, so dass $\nabla h \neq 0$ auf U und

$$\Omega \cap U = \{x \in U : h(x) < 0\}, \quad \partial\Omega \cap U = \{x \in U : h(x) = 0\}.$$

In diesem Fall ist $\partial\Omega$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n (eine **Hyperfläche**). Beispielsweise hat die offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ einen C^∞ -Rand.

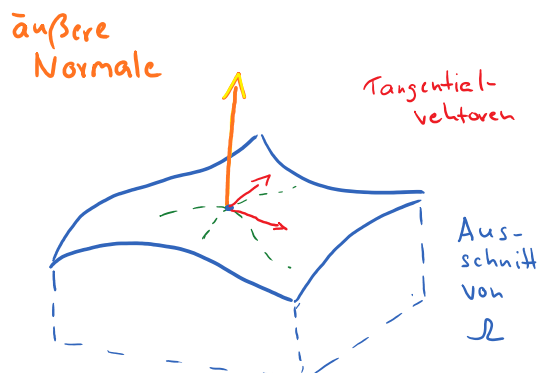


Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **tangential** an $\partial\Omega$ in p , falls $\varepsilon > 0$ und $\psi \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$ existiert, so dass $\psi(t) \in \partial\Omega$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\psi(0) = p$ und $\psi'(0) = v$. Die Menge T_p aller solcher **Tangentialvektoren** ist ein $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n . Er heißt **Tangentialraum** in p .

Es existiert genau ein $v(p) \in \mathbb{R}^n$ mit $|v(p)| = 1$, $v(p) \in T_p^\perp$ und der Eigenschaft, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$p + tv(p) \notin \Omega \quad (0 < t < \varepsilon) \quad \text{und} \quad p + tv(p) \in \Omega \quad (-\varepsilon < t < 0).$$

Der Vektor $v(p)$ heißt die **äußere Normale** an $\partial\Omega$ in p . Die Abbildung $v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto v(p)$ ist stetig.



Gilt wie oben $\partial\Omega \cap U = \{x \in U : h(x) = 0\}$, so ist

$$v(p) = \frac{\nabla h(p)}{|\nabla h(p)|}, \quad p \in \partial\Omega \cap U.$$

Satz A.1 (Divergenzsatz). Besitzt Ω einen C^1 -Rand, so existiert genau ein Maß $\sigma = \sigma_{\partial\Omega}$ auf den Borelmengen von $\partial\Omega$, so dass

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle f(z), v(z) \rangle \, d\sigma(z)$$

für alle $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Dieses Maß σ heißt das **Oberflächenmaß** auf $\partial\Omega$.

Hierbei ist $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) := \{f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) : \nabla f \text{ besitzt stetige Fortsetzung auf } \overline{\Omega}\}$.

A.2. Fakten aus der Maßtheorie

Parameterintegrale

Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und

$$F(t) := \int_X f(x, t) \, d\mu(x), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $t \in I$ die Funktion

$$X \ni x \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$$

μ -integrierbar ist (damit die Definition von F Sinn macht).

Satz A.2. Die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei wie zu Beginn des Abschnitts definiert.

(i) Es sei $t_0 \in I$ und

- es existiere eine μ -integrierbare Funktion φ , so dass

$$\forall t \in I, x \in X : |f(x, t)| \leq \varphi(x),$$

- für alle $x \in X$ sei die Abbildung $t \mapsto f(x, t)$ stetig in t_0 .

Dann ist auch F stetig in t_0 .

(ii) Es sei

- die Abbildung $t \mapsto f(x, t)$ für alle $x \in X$ differenzierbar mit Ableitung $\partial_t f(x, t)$, und
- es existiere eine μ -integrierbare Funktion ψ , sodass

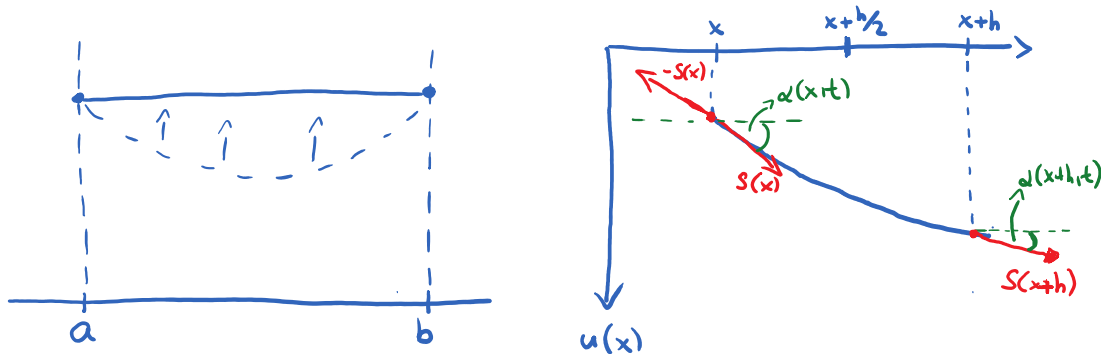
$$\forall t \in I, x \in X : |\partial_t f(x, t)| \leq \psi(x).$$

Dann ist F auf I differenzierbar, die Abbildung $x \mapsto \partial_t f(x, t)$ ist μ -integrierbar für alle $t \in I$ und es gilt

$$F'(t) = \int \partial_t f(x, t) \, d\mu.$$

A.3. Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung

Wir betrachten die Schwingungen einer elastischen, biegsamen Saite mit konstanter Massendichte ρ , die an zwei Enden fixiert ist. Dazu sei $u = u(x, t)$ die vertikale Auslenkung der Saite aus der Ruhelage in Abhängigkeit von Ort x und Zeit t (wir beschränken uns auf Schwingungen in der (x, u) -Ebene). Vereinfachend betrachten wir nur kleine Auslenkungen der Saite (keine Verlängerung der Saite, keine horizontalen Bewegungen).



Im Folgenden sei $S(x, t) \in \mathbb{R}^2$ die Spannungskraft, die das Saitenstück rechts von x zum Zeitpunkt t auf das Saitenstück links von x ausübt (dann ist $-S(x, t)$ die Spannung, die das Saitenstück links von x auf das Saitenstück rechts von x ausübt). Ferner sei $s(x, t) = |S(x, t)|$. Da wir eine biegsam-elastische Saite betrachten, gehen wir davon aus, dass $S(x, t)$ stets tangential zur Saite ist. Wir betrachten nun einen kleinen Abschnitt der Saite zwischen x und $x+h$. Auf diesen wirken (unter Vernachlässigung von Schwerkraft, Luftreibung, etc.) nur die äußeren Kräfte $-S(x, t)$ und $S(x+h, t)$. Um die Bewegung des Saitenstücks zu bestimmen, betrachten wir stellvertretend den Mittelpunkt $(x+h/2, u(x+h/2, t))$, den wir mit der Masse des Saitenstücks belegen, und lassen die äußeren Kräfte auf ihn wirken. Da der Mittelpunkt sich nach Annahme nur vertikal bewegt, betrachten wir nur diese Komponente der Bewegung. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz (Kraft = Masse \cdot Beschleunigung), erhalten wir

$$s(x+h, t) \sin(\alpha(x+h, t)) - s(x, t) \sin(\alpha(x, t)) = (\rho \cdot h) u_{tt}(x+h/2, t),$$

wobei wir benutzt haben, dass sich die Masse des Saitenstücks aufgrund der kleinen Auslenkungen gut durch $\rho \cdot h$ approximieren lässt.

Teilen wir durch h und schicken wir h gegen 0, so folgt (unter geeigneten Annahmen an die Funktionen)

$$\frac{d}{dx} (s(x, t) \sin(\alpha(x, t))) = \rho u_{tt}(x, t).$$

Nun gilt $\tan(\alpha(x, t)) = u_x(x, t)$, d.h.

$$\sin(\alpha(x, t)) = \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + u_x(x, t)^2}}$$

und wir erhalten die folgende partielle Differentialgleichung für u

$$\frac{d}{dx} \left(s(x, t) \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + u_x(x, t)^2}} \right) = \rho u_{tt}(x, t).$$

Diese enthält noch die unbekannte Funktion s . Um diese loszuwerden, beobachten wir, dass die Spannung im Ruhezustand konstant ist ($s(x, 0) =: s$). Da wir nur kleine Auslenkungen betrachten, können

wir also $s(x, t)$ durch die Konstante s ersetzen. Genauso ist $\sqrt{1 + u_x(x, t)^2}$ bei kleinen Auslenkungen näherungsweise gleich 1. Mit $c^2 := \frac{s}{\rho}$ erhalten wir die **(eindimensionale Wellengleichung)**

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

Diese Gleichung geht zurück auf d'Alembert (1717-1783). Die Konstante c wird auch als **Wellengeschwindigkeit** bezeichnet (und oft gleich 1 gesetzt).

A.4. Der Rieszsche Darstellungssatz

Satz. Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann gilt:

(i) Ist $u \in \mathcal{H}$, so ist die Abbildung

$$\Phi_u : \mathcal{H} \ni v \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{K}$$

linear und stetig.

(ii) Ist umgekehrt $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ linear und stetig, so existiert ein eindeutiges $u \in \mathcal{H}$, so dass $\Phi = \Phi_u$, d.h.

$$\Phi(v) = \langle v, u \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$.

Beweis. (i) Dies folgt sofort aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\Phi_u(v) - \Phi_u(v')| = |\langle v, u \rangle - \langle v', u \rangle| = |\langle v - v', u \rangle| \leq \|v - v'\| \|u\|.$$

(ii) Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

1. vorbereitender Schritt: $U \subseteq \mathcal{H}$ sei ein abgeschlossener Unterraum. Ferner sei

$$U^\perp := \{v \in \mathcal{H} : \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von U . Dann ist klar, dass auch U^\perp ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} ist. Wir zeigen nun, dass

$$\mathcal{H} = U \oplus U^\perp,$$

d.h. $\mathcal{H} = U + U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Die letzte Aussage ist klar, denn ist $v \in U^\perp$, so gilt für alle $u \in U$, dass $\langle v, u \rangle = 0$. Gilt auch $v \in U$, so können wir $u = v$ wählen und erhalten $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 0$ also $v = 0$.

Jetzt sei $x \in \mathcal{H}$ beliebig und $\delta := \inf\{\|x - u\| : u \in U\}$. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus U , so dass $\|x - u_n\| \rightarrow \delta$. Nun gilt in jedem Vektorraum mit Skalarprodukt die **Parallelogrammgleichung**, d.h.

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|a - b\|^2 + \|a + b\|^2, \quad (a, b \in \mathcal{H}).$$

Wenden wir dies an mit $a = u_n - x, b = u_m - x$, so folgt

$$2(\|u_n - x\|^2 + \|u_m - x\|^2) = \|u_n - u_m\|^2 + \|u_n + u_m - 2x\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Da $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in U$, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= 2\|u_n - x\|^2 + 2\|u_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - x\right\|^2 \\ &\leq 2\|u_n - x\|^2 + 2\|u_m - x\|^2 - 4\delta^2. \end{aligned}$$

Hier geht die rechte Seite (wegen $\|u_n - x\| \rightarrow \delta$) für $n, m \rightarrow \infty$ gegen 0, d.h. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, die im vollständigen Raum \mathcal{H} konvergieren muss. Wir setzen

$$u_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Da U abgeschlossen ist und $u_n \in U, n \in \mathbb{N}$, gilt, ist auch $u_0 \in U$. Nun sei $v_0 := x - u_0$, so dass

$$x = u_0 + v_0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $v_0 \in U^\perp$ gilt. Dazu betrachten wir für ein beliebiges $u \in U$ und ein noch zu wählendes $\alpha \in \mathbb{K}$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(t) = \|v_0 + t\alpha u\|^2.$$

Nach Definition von u_0 und δ hat diese Funktion ein Minimum in $t = 0$ (nämlich δ^2), denn

$$v_0 + t\alpha u = x - (u_0 - t\alpha u) \quad \text{und} \quad u_0 - t\alpha u \in U.$$

Also muss auch $f'(0) = 0$ gelten. Da

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v_0 + t\alpha u, v_0 + t\alpha u \rangle = \|v_0\|^2 + t^2 |\alpha|^2 \|u\|^2 + t(\langle \alpha u, v_0 \rangle + \langle v_0, \alpha u \rangle) \\ &= \|v_0\|^2 + t^2 |\alpha|^2 \|u\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\alpha \langle u, v_0 \rangle), \end{aligned}$$

gilt also

$$f'(0) = 2 \operatorname{Re}(\alpha \langle u, v_0 \rangle) = 0.$$

Nun wählen wir $\alpha = \overline{\langle u, v_0 \rangle}$ und sehen, dass

$$|\langle u, v_0 \rangle|^2 = 0$$

gilt, d.h. $\langle u, v_0 \rangle = 0$. Da $u \in U$ hier beliebig war, folgt $v_0 \in U^\perp$.

2. Schritt: Eindeutigkeit

Für $u, u' \in \mathcal{H}$ gelte

$$\Phi(v) = \langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Dann folgt auch $\langle v, u - u' \rangle = 0$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Für die Wahl $v = u - u'$ folgt

$$\langle u - u', u - u' \rangle = \|u - u'\|^2 = 0 \quad \text{also auch} \quad u - u' = 0 \quad \text{bzw.} \quad u = u'.$$

3. Schritt: Existenz

Ist $\Phi = 0$ die Nullabbildung, so können wir $u = 0$ wählen. Nun sei $\Phi \neq 0$ und

$$U := \operatorname{Kern}(\Phi) := \Phi^{-1}(\{0\}).$$

Aufgrund der Linearität von Φ ist dies ein Unterraum von \mathcal{H} und aufgrund der Stetigkeit von Φ ist dieser abgeschlossen. Nach Schritt 1 gilt also $\mathcal{H} = U \oplus U^\perp$. Wäre $U^\perp = \{0\}$, so

müsste $\mathcal{H} = U$, d.h. $\Phi = 0$ gelten. Da wir annehmen, dass dies nicht der Fall ist, existiert also $0 \neq w' \in U^\perp$ (für das dann $w' \notin U$ also $\Phi(w') \neq 0$ gilt). Für $w := \frac{1}{\Phi(w')} \cdot w' \in U^\perp$ gilt damit aufgrund der Linearität $\Phi(w) = 1$. Ferner folgt $v - \Phi(v)w \in U$ für alle $v \in \mathcal{H}$, denn

$$\Phi(v - \Phi(v)w) = \Phi(v) - \Phi(v)\Phi(w) = \Phi(v) - \Phi(v) = 0.$$

Da $w \in U^\perp$ folgt somit mit der Wahl $u := \frac{1}{\|w\|^2} \cdot w$ für alle $v \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle v, u \rangle &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w \rangle \\ &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \left(\underbrace{\langle v - \Phi(v)w, w \rangle}_{=0} + \langle \Phi(v)w, w \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \left(\Phi(v) \|w\|^2 \right) = \Phi(v). \end{aligned}$$

□

Symbolverzeichnis

- $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$
- $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_{ij} = \partial_i \partial_j, \partial_i^2 = \partial_{ii}$
- $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Hierbei ist $\partial_i^0 u := u$.
- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ - Ordnung des Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- $\nabla u := \nabla_x u := (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)^T$ - Gradient von $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\operatorname{div} \varphi := \operatorname{div}_x \varphi := \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_i$ - Divergenz von $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\Delta := \Delta_x := \operatorname{div} \nabla := \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ - Laplace-Operator
- $\nu(z)$ - äußere Normale an $z \in \partial\Omega$
- $\partial_\nu u(z) := \langle \nabla u(z), \nu(z) \rangle$ - Ableitung von u im Punkte z in Richtung der äußeren Normalen $\nu(z)$
- $\sigma = \sigma_B$ - Oberflächenmaß auf B
- $dx := d\lambda^n(x)$ - Integration gegen das Lebesgue-Maß
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - Skalarprodukt. Sowohl für das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n als auch für das Skalarprodukt in $L_2(\Omega)$ benutzt
- $\langle f, g \rangle_1 := \int \nabla f(x) \nabla g(x) dx$
- $|x| := |x|_2 := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$ - euklidische Norm von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- $|x|_p := (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{1/p}$
- $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ - offene r -Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$
- $B[x, r] := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$ - abgeschlossene r -Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$
- $\omega_n := \lambda^n(B(0, 1))$ - Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n
- $\sigma(\partial B(0, 1))$ - Fläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^n
- $C(\Omega)$ - stetige Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C_b(\Omega)$ - stetig beschränkte Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C(\overline{\Omega})$ - stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Fortsetzung wird auch mit u bezeichnet
- $C^k(\Omega)$ - k -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\partial^\alpha u$ existiert und ist stetig für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ - glatte Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C^k(\overline{\Omega})$ - $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ besitzt $\partial^\alpha u$ stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$
- $C_0^k(\overline{\Omega})$ - Funktionen $f \in C^k(\overline{\Omega})$ mit $f|_{\partial\Omega} = 0$.
- $C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$ - k -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $C^k(\Omega; \mathbb{C})$ - k -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

- $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ - Träger von $\varphi \in C(\Omega)$
- $C_c(\Omega) := \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}$ - stetige Funktionen mit kompaktem Träger
- $C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ - Raum der Testfunktionen
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ - Raum der Distributionen über Ω
- $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_K |f(x)| dx < \infty \text{ für alle } K \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$
- u_f - reguläre Distribution zur Funktion $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$
- $\Omega_R = \{x \in \Omega : B[x, R] \subseteq \Omega\} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > R\}$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\varphi * f$ - Faltung
- L - Fundamentallösung der Laplace-Gleichung
- $V_f(x) = \int_\Omega L(x-y)f(y) dy$ - Newton-Potential von $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $G = G_\Omega$ - Greensche Funktion zu Ω
- $W = \partial_t - \Delta_x$ - Wärmeleitungsoperator
- $C^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ - stetige Funktionen $u(x, t)$ auf $\Omega \times (0, T)$, die bzgl. x zweimal und bzgl. t einmal stetig differenzierbar sind
- $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ - Zylinder in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$
- $\square := \partial_t^2 - \Delta_x$ - d'Alembert Operator
- $C(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < t_0, x \in B(x_0, t_0 - t)\}$ - Abhängigkeitskegel
- $\langle u, \varphi \rangle$ - Wirkung der Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf der Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- $H = \mathbb{1}_{(0, \infty)}$ - Heaviside-Funktion
- δ_0 - Delta-Distribution
- $P(\partial)$ - lin. Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten zu $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$
- F - Fundamentallösung zu $P(\partial)$
- $L_{1,c}$ - kompakt getragene Elemente aus L_1
- $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ - Sobolev-Raum der Ableitungsordnung m und Integrationsordnung p
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
- $\text{tr}(u)$ - Spur von $u \in W^{1,p}(\Omega)$
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p})}$
- $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$
- $-\text{div}(A\nabla)$ - Operator in Divergenzform

Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Arendt and Karsten Urban. *Partielle Differenzialgleichungen. Eine Einführung in analytische und numerische Methoden*. Berlin: Springer Spektrum, 2. auflage edition, 2018.
- [2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [3] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Distributions. Cornerstones*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. Theory and applications, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest.
- [4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] Gerald B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1995.
- [6] Thomas Kalmes. *Analysis partieller Differentialgleichungen - Vorlesungsnotizen TU Chemnitz*.
- [7] Michael Renardy and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004.
- [8] Walter Rudin. *Analysis*. De Gruyter Stud. Berlin: De Gruyter /Oldenbourg, 5th edition edition, 2022.
- [9] Peter Stollmann. *Analysis partieller Differentialgleichungen - Vorlesungsnotizen TU Chemnitz*.
- [10] Gerald Teschl. *Partial Differential Equations - From classical to modern - Manuskript, Uni Wien*.
- [11] Jürgen Voigt. *Partielle Differentialgleichungen I- Vorlesungsnotizen TU Dresden*.
- [12] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1. Mathematische Leitfäden*. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 2000. Grundlagen. [Foundations].
- [13] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrb. Berlin: Springer Spektrum, 8th revised edition edition, 2018.