

8

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Sei $E \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Eine **Funktionenfolge** auf E ist eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$, und eine **Funktionenreihe** auf E ist eine Reihe der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ von Funktionen $u_n: E \rightarrow \mathbb{C}$.

Beispiel 8.1. Die Ausdrücke $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ beschreiben eine Funktionenfolge bzw. -reihe mit $f_n = u_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x) = x^n$.

8.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 8.1. Man sagt, dass eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ auf E **punktweise** gegen eine Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, wenn

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

gilt, und dass diese Folge **gleichmäßig** auf E gegen f konvergiert, wenn

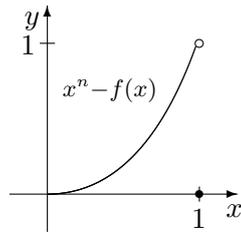
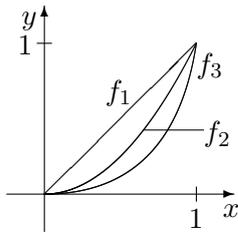
$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

gilt. Eine Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf E konvergiert punktweise bzw. gleichmäßig, falls dies auf die Folge ihrer Partialsummen $\{S_k\}$ mit $S_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ zutrifft. Bei gleichmäßiger Konvergenz schreibt man oft $f_n \rightrightarrows f$.

Satz 8.1. Eine auf E gleichmäßig konvergente Funktionenfolge oder -reihe konvergiert auch punktweise.

Diese Aussage ist trivial, denn gilt $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$, so gilt $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ insbesondere für jedes einzelne $x \in E$.

Beispiel 8.2. (1) Die Folge $\{f_n\}$ mit $f_n(x) = x^n$ auf $E = [0, 1]$ konvergiert punktweise gegen f mit



$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1), \\ 1 & : x = 1. \end{cases}$$

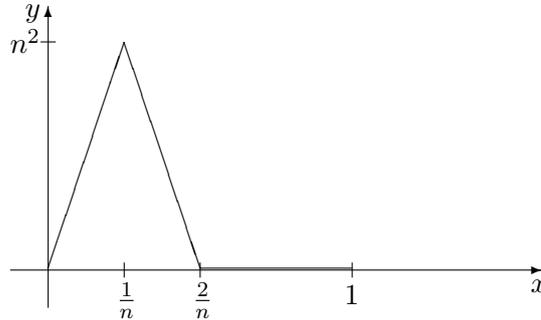
Es liegt aber keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn es gilt

$$\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

(2) Für die Folge $\{f_n\}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}x$ auf $E = (0, 1]$ gilt $f_n \rightrightarrows f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$, denn

$$\sup_{x \in (0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0, 1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

(3) Sei f_n wie in der Abbildung auf $E = [0, 1]$ erklärt:



Es gilt $f_n \rightarrow 0$, aber $f_n \rightrightarrows 0$ ist falsch, denn

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| = n^2 \rightarrow \infty.$$

Wir haben

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \frac{2}{n} n^2 \rightarrow \infty, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

(4) Betrachte die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $E = \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Für die Partialsummen dieser Funktionenreihe gilt bekanntlich

$$s_k(z) = 1 + z + \cdots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z} \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Die Reihe konvergiert in \mathbb{D} punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $\frac{1}{1-z}$, denn

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| s_k(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|z|^{k+1}}{|1-z|} \geq \frac{|1 - \frac{1}{k}|^k}{|1 - (1 - \frac{1}{k})|} = k \underbrace{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k}_{\rightarrow e^{-1}} \rightarrow \infty.$$

Für alle $z \in r\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r \in (0, 1)$, liegt aber auch gleichmäßige Konvergenz vor, denn

$$\sup_{z \in r\mathbb{D}} \left| s_k(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in r\mathbb{D}} \frac{|z|^{k+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{k+1}}{1-r} = o(1).$$

Satz 8.2 (Majorantensatz). *Es seien $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $c_k > 0$ für alle k , $u_k: E \rightarrow \mathbb{C}$ und gelte $|u_k(x)| \leq c_k$ für alle $x \in E$ und alle k . Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ auf E gleichmäßig.*

Beweis. Betrachte die Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^n c_k$ und $f_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\{S_n\}$ konvergiert, also eine CAUCHY-Folge ist, existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = c_n + \cdots + c_{m+1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N.$$

Für diese n und m gilt dann also

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |u_n(x) + \cdots + u_{m+1}(x)| \leq |u_n(x)| + \cdots + |u_{m+1}(x)| \\ &\leq c_n + \cdots + c_{m+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Satz 8.2 konvergiert $\{f_n(x)\}$, also die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, gleichmäßig. □

Beispiel 8.3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ ist infolge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

auf ganz \mathbb{R} gleichmäßig konvergent.

8.2 Eigenschaften der Grenzfunktion bzw. der Summe

Seien die Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (integrierbar oder differenzierbar) und gelte $f_n \rightarrow f$. Ist dann f ebenfalls stetig (integrierbar oder differenzierbar)?

Zur Stetigkeit

Seien die Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in E$ stetig und gelte $f_n \rightarrow f$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig in } x_0 &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x). \end{aligned}$$

Das Problem, ob f in x_0 stetig ist, ist also das Problem, ob zwei Grenzwertprozesse vertauscht werden können.

Beispiel 8.4. Wir betrachten $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$. Dann gilt $f_n \rightarrow f$ punktweise mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 &: x \in [0, 1), \\ 1 &: x = 1, \end{cases}$$

siehe Beispiel 8.2 (1). Es ist f_n auf $[0, 1]$ stetig, f jedoch nicht.

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge ist also zu schwach, um die Stetigkeit auf die Grenzfunktion hinüber zu retten.

Satz 8.3. Seien die Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in E \cap E'$ stetig. Gilt $f_n \rightrightarrows f$ auf E , so ist f in x_0 ebenfalls stetig.

Beweis. Seien $\delta, \varepsilon > 0$ gegeben. Wir haben

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

mit

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} && \forall x \in E \text{ und } n = n_0 \text{ (wegen } f_n \rightrightarrows f), \\ |f_n(x_0) - f(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} && \text{für } n = n_0, \\ |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} && \text{für } n = n_0 \text{ und } \forall x \in E : |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Für alle $x \in E$ mit $|x - x_0| < \delta$ ist somit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nach dem ε - δ -Kriterium der Stetigkeit ist f also in x_0 stetig. \square

Korollar 8.1 (zu Satz 8.4). Seien die Funktionen $u_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in E \cap E'$ stetig. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ gleichmäßig auf E , so ist ihre Summe s in x_0 stetig.

Beweis. Man wende Satz 8.4 auf die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^n u_k(x)$ an. \square

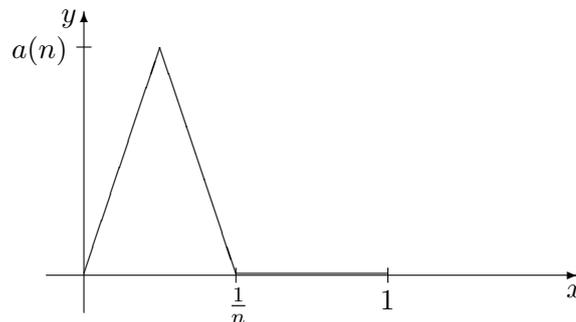
Zur Integrierbarkeit

Seien $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ und gelte $f_n \rightarrow f$ auf $[a, b]$. Ist dann auch $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

d. h. kann man Integration und Limesbildung vertauschen?

Beispiel 8.5. Betrachte die in der Abbildung dargestellte Funktion f_n auf $[0, 1]$:



Es gilt $f_n \rightarrow 0$ punktweise auf $[0, 1]$. Es ist aber für

$$a(n) = n: \quad \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \frac{1}{n} n = \frac{1}{2} \not\rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

$$a(n) = n^2: \quad \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \frac{1}{n} n^2 = \frac{n}{2} \rightarrow \infty,$$

$$a(n) = (-1)^n n: \quad \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2} \text{ konvergiert nicht.}$$

Punktweise Konvergenz ist also wiederum zu schwach.

Satz 8.4. Seien $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ und gelte $f_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f_n(x) \, dx \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Beweis von Satz 7.2 reicht es zu beweisen, dass es eine Zerlegung P von $[a, b]$ mit $O(f, P) - U(f, P) < \varepsilon$ gibt. Sei hierzu $\delta := \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Wegen $f_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$ gibt es ein n_0 mit $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \delta$ für jedes $x \in [a, b]$, d. h.

$$f_{n_0}(x) - \delta < f(x) < f_{n_0}(x) + \delta \quad \forall x \in [a, b].$$

Für jede Zerlegung P von $[a, b]$ folgt daraus

$$O(f, P) \leq O(f_{n_0}, P) + \delta(b-a) = O(f_{n_0}, P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

und analog $U(f, P) \geq U(f_{n_0}, P) - \frac{\varepsilon}{3}$, d. h.

$$O(f, P) - U(f, P) \leq O(f_{n_0}, P) - U(f_{n_0}, P) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Wegen $f_{n_0} \in \mathcal{R}[a, b]$ gibt es eine Zerlegung P von $[a, b]$ mit $O(f_{n_0}, P) - U(f_{n_0}, P) < \frac{\varepsilon}{3}$, also

$$O(f, P) - U(f, P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ gezeigt. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| (b-a) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 8.2 (zu Satz 8.5). Seien u_n Funktionen aus $\mathcal{R}[a, b]$ und möge die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergieren. Dann gehört auch ihre Summe s zu $\mathcal{R}[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b s(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, dx.$$

Beweis. Man wende Satz 8.5 auf die Partialsummen der Funktionenreihe an. □

Zur Differenzierbarkeit

Seien die Funktionen f_n in E differenzierbar und gelte $f_n \rightarrow f$. Folgt daraus schon die Differenzierbarkeit von f und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)?$$

Es geht also um die Vertauschbarkeit eines Grenzwertprozesses mit Differentiation.

Beispiel 8.6. Für $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ auf $[0, 1]$ gilt $f_n \Rightarrow 0$, aber $f'_n(x) = \cos(nx)$ konvergiert nicht für jedes $x \in [0, 1]$.

Hier ist also sogar die gleichmäßige Konvergenz zu schwach.

Satz 8.5. Seien $f_n \in \mathcal{C}^1[a, b]$ und gelte

- a) $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert für ein $x_0 \in [a, b]$,
- b) $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen eine Funktion φ .

Dann gilt

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$,
2. $f'_n \Rightarrow f'$.

Beweis. Setze $f(x) := \int_a^x \varphi(t) dt$. Nach Satz 8.4 ist $\varphi \in \mathcal{C}[a, b]$ und nach dem Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung gilt $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ sowie $f' = \varphi$. Damit ist auch 2. gezeigt. Wir haben

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_a^x (f'_n(t) - \varphi(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f'_n(t) - \varphi(t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'_n(t) - \varphi(t)| (b - a) = o(1), \end{aligned}$$

woraus sich 1. ergibt. □

Satz 8.5 gilt auch, wenn man statt der stetigen Differenzierbarkeit nur die Differenzierbarkeit der f_n fordert. Dann ist der Beweis aber aufwändiger.

Korollar 8.3 (zu Satz 8.5). *Seien $u_n \in \mathcal{C}^1[a, b]$ und gelte*

a) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konvergiert für ein $x_0 \in [a, b]$,*

b) *die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ und hat die Summe σ .*

Dann gilt

1. *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig und hat die Summe $s \in \mathcal{C}^1[a, b]$,*

2. *$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = s'(x)$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wende Satz 8.6 auf die Partialsummen der Reihe an. □

9

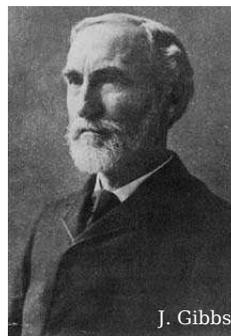
FOURIER-Reihen



J. Fourier



L. Fejér



J. Gibbs



U. Dini



G. Dirichlet



P. du Bois-Reymond



D. Jackson



P. Laplace

9.1 Der Begriff der FOURIER-Reihe

Definition 9.1. *Funktionen der Gestalt*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx) \quad (9.1)$$

oder der Gestalt

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (9.2)$$

mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$ heißen **trigonometrische Polynome** (vom Grad n).

Satz 9.1. *Die Menge aller Funktionen der Gestalt (9.1) ist gleich der Menge aller Funktionen der Gestalt (9.2).*

Beweis. Wir haben

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \quad e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx)$$

für $k \geq 0$. □

Satz 9.2. *Ist $f(x)$ durch (9.1) bzw. (9.2) gegeben, so gilt*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$$

bzw.

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n}^n c_\ell \int_0^{2\pi} e^{i\ell x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n}^n c_\ell \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \neq k} c_\ell \left. \frac{e^{i(\ell-k)x}}{i(\ell-k)} \right|_0^{2\pi} = c_k. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Formeln für a_k und b_k . □

Definition 9.2. *Funktionenreihen der Gestalt*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (9.3)$$

oder

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (9.4)$$

mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$ heißen **trigonometrische Reihen**. Die Summen der Reihen (9.3) und (9.4) definiert man als die Grenzwerte von (9.1) bzw. (9.2) für $n \rightarrow \infty$.

Definition 9.3. Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Die in Satz 9.2 angegebenen komplexen Zahlen a_k , b_k und c_k nennt man die **FOURIER¹-Koeffizienten** von f und die mit diesen Koeffizienten gebildeten Reihen (9.3) und (9.4) nennt man die **FOURIER-Reihen** von f in **reeller** bzw. **komplexer Darstellung**. Man schreibt dann häufig

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Wir halten folgende Analogien fest:

¹Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768 - 1830), französischer Mathematiker und Physiker. Beschäftigte sich u. a. mit der Wärmeausbreitung in Festkörpern. In diesbezüglichen Abhandlungen tauchten erstmals seine FOURIER-Reihen auf.

(algebraische) Polynome	\leftrightarrow	trigonometrische Polynome,
Potenzreihen	\leftrightarrow	trigonometrische Reihen,
TAYLOR-Koeffizienten	\leftrightarrow	FOURIER-Koeffizienten,
TAYLOR-Reihen	\leftrightarrow	FOURIER-Reihen.

Es stellen sich folgende Fragen:

1. Für welche x konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion f und in welchem Sinne (punktweise, gleichmäßig, etc.)?
2. Wenn die FOURIER-Reihe konvergiert, was ist ihre Summe? Ist die Summe gleich $f(x)$?

Die Konvergenz von FOURIER-Reihen ist weitaus delikater als die von TAYLOR-Reihen. Konvergenz trigonometrischer Polynome entspricht etwa der Frage nach der Konvergenz einer Potenzreihe auf der Konvergenzkreislinie (denn $\sum a_k z^k$ wird für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ zu $\sum a_k e^{ikx}$).

9.2 Orthogonale Funktionensysteme

Wir bezeichnen mit $\mathcal{RL}^2[a, b]$ den linearen Raum $\mathcal{R}[a, b]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad \forall f, g \in \mathcal{R}[a, b].$$

Ein System $\{\varphi_k\}$ von Funktionen aus $\mathcal{R}[a, b]$ heißt ein **Orthogonalsystem** bzw. ein **Orthonormalsystem**, wenn $\{\varphi_k\}$ ein solches in $\mathcal{RL}^2[a, b]$ ist, wenn also $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = 0$ für $k \neq \ell$ bzw. $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ gilt.²

Beispiel 9.1. (1) In $\mathcal{RL}^2[a, b]$ sind

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

oder auch

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Orthonormalsysteme.

(2) Die LEGENDRE-Polynome $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad x \in [-1, 1],$$

bilden ein Orthogonalsystem in $\mathcal{RL}^2[-1, 1]$.

Definition 9.4. Sei $\{\varphi_k\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{RL}^2[a, b]$. Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ heißen die Zahlen

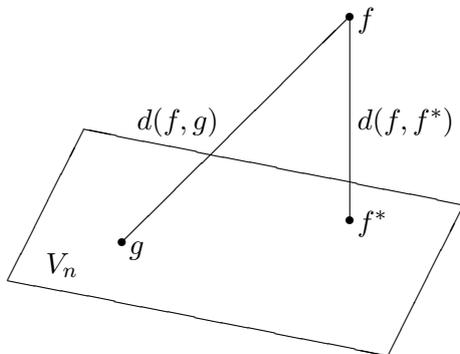
$$f_k := \langle f, \varphi_k \rangle = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} \, dx$$

die **FOURIER-Koeffizienten** bezüglich des Systems $\{\varphi_k\}$ und die Reihe $\sum_k f_k \varphi_k(x)$ nennt man **FOURIER-Reihe** von f bezüglich des Systems $\{\varphi_k\}$.

Wir haben also $f \sim \sum_k \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$.

² $\delta_{ik} := \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k, \end{cases}$ bezeichnet das sogenannte KRONECKER-Symbol.

9.3 Die Approximationseigenschaft der FOURIER-Reihe



Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{R}L^2[a, b]$ und sei $V_n := \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ der von $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ erzeugte lineare Unterraum. Für gegebenes $f \in \mathcal{R}[a, b]$ interessiert man sich für die bestmögliche Approximation durch eine Funktion aus V_n , d. h. durch eine Linearkombination der $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ (siehe Abbildung) mit

$$d(f, V_n) = \|f - f^*\| = \inf_{g \in V_n} \|f - g\|,$$

wobei $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Beispiel 9.2. Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}\} = \{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-n}^n$. Man interessiert sich für die bestmögliche Approximation einer Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$ durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad n .

Satz 9.3. Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{R}L^2[a, b]$, sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und setze $S_n f := \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Ist $p_n := \sum_{k=1}^n \delta_k \varphi_k$ ein beliebiges Element aus V_n , so gilt

$$\int_a^b |f(x) - S_n f(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)|^2 dx,$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\delta_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ ist.

In Bezug auf obiges Problem besagt dieser Satz, dass

$$\|f - S_n f\|^2 \leq \|f - p_n\|^2 \quad \forall p_n \in V_n$$

gilt, mit Gleichheit genau für $p_n = S_n f$. Also existiert f^* und ist eindeutig bestimmt durch $f^* = S_n f$.

Beweis. Mit $\int := \int_a^b$ und $\sum := \sum_{k=1}^n$ haben wir Folgendes:

$$\begin{aligned} \int |f - p_n|^2 dx &= \int (f - p_n)(\bar{f} - \bar{p}_n) dx \\ &= \int |f|^2 dx - \int f \bar{p}_n dx - \int \bar{f} p_n dx + \int |p_n|^2 dx, \\ \int f \bar{p}_n dx &= \int f \sum \bar{\delta}_k \bar{\varphi}_k dx = \sum \bar{\delta}_k \int f \bar{\varphi}_k dx = \sum \bar{\delta}_k \langle f, \varphi_k \rangle, \\ \int \bar{f} p_n dx &= \sum \delta_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle}, \\ \int |p_n|^2 dx &= \int p_n \bar{p}_n dx = \int \left(\sum_k \delta_k \varphi_k \right) \left(\sum_l \bar{\delta}_l \bar{\varphi}_l \right) = \sum_{k,\ell} \delta_k \bar{\delta}_l \langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle \\ &= \sum \delta_k \bar{\delta}_k, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int |f - p_n|^2 dx &= \int |f|^2 dx - \sum \bar{\delta}_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum \delta_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} + \sum \delta_k \bar{\delta}_k \\ &\quad - \underbrace{\sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum \langle f, \varphi_k \rangle \overline{\langle f, \varphi_k \rangle}}_{=0} \\ &= \int |f|^2 dx - \sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum [\langle f, \varphi_k \rangle - \delta_k] [\overline{\langle f, \varphi_k \rangle} - \bar{\delta}_k] \\ &= \int |f|^2 dx - \sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum |\langle f, \varphi_k \rangle - \delta_k|^2. \end{aligned}$$

Für $p_n = S_n f$ ist $\delta_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ für alle k und somit

$$\int |f - S_n f|^2 dx = \int |f|^2 dx - \sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \quad (9.5)$$

Also ist

$$\int |f - p_n|^2 dx = \int |f - S_n f|^2 dx + \sum |\langle f, \varphi_k \rangle - \delta_k|^2 \geq \int |f - S_n f|^2 dx$$

mit Gleichheit genau für $\langle f, \varphi_k \rangle = \delta_k$, $1 \leq k \leq n$. □

Aus Gleichung (9.5) folgt sofort

Korollar 9.1. Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ gilt die BESSELSche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \leq \int_a^b |f|^2 dx$$

und damit das RIEMANNsche Lemma

$$f_k \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Ist das Orthonormalsystem $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vollständig (was das bedeutet, kommt in der Funktionalanalysis), und die Orthonormalsysteme aus Beispiel 9.1 (1) sind vollständig, so gilt in der BESSELSchen Ungleichung sogar Gleichheit, d. h., dann gilt die PARSEVALSche Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \int_a^b |f|^2 dx.$$

Sie gilt sogar für $f \in L^2(a, b)$. Das RIEMANNsche Lemma gilt auch für $f \in L^1(a, b)$ (RIEMANN-LEBESGUESches Lemma).

9.4 Elementare Konvergenztheorie

Wir betrachten

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad (\text{DIRICHLETScher Kern}),$$

$$K_n(x) := \frac{1}{n+1} (D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)) \quad (\text{FEJÉR}^3\text{scher Kern}).$$

Satz 9.4. *Es gilt*

1. $D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}}, \quad D_n(0) = 2n + 1,$
2. $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{1 - \cos x}, \quad K_n(0) = n + 1,$
3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1,$
4. $K_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$
5. $K_n(x) \leq \frac{2}{n+1} \frac{1}{1 - \cos \delta} \quad \text{für } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi.$

Beweis. 1. Wir haben

$$\begin{aligned} (e^{ix} - 1) D_n(x) &= (e^{ix} - 1) (e^{inx} + \cdots + 1 + \cdots + e^{-inx}) \\ &= e^{-i(n-1)x} + \cdots + e^{i(n+1)x} - e^{-inx} - \cdots - e^{inx} = e^{i(n+1)x} - e^{inx}, \end{aligned}$$

und Multiplikation mit $e^{-ix/2}$ liefert

$$\underbrace{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})}_{=2i \sin \frac{x}{2}} D_n(x) = \underbrace{e^{i(x+\frac{1}{2})x} - e^{-(n+\frac{1}{2})x}}_{=2i \sin((n+\frac{1}{2})x)}.$$

Dass $D_n(0) = 2n + 1$ gilt, ist trivial.

³Leopold FEJÉR (1880 - 1959), ungarischer Mathematiker. Forschte auf den Gebieten harmonische Analysis und FOURIER-Reihen.

2. Wir haben weiterhin

$$\begin{aligned}
& (n+1) K_n(x) (e^{ix} - 1) \\
&= (n+1) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) (e^{ix} - 1) (e^{-ix} - 1) = \sum_{k=0}^n (e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}) (e^{-ix} - 1) \\
&= (e^{i(n+1)x} - e^{-inx} + e^{inx} - e^{-i(n+1)x} + \dots + e^{i3x} - e^{-i2x} - e^{-ix} + e^{ix} - 1) (e^{-ix} - 1) \\
&= e^{inx} + e^{i(n-1)x} + \dots + e^{i2x} + e^{ix} + 1 - e^{-i(n+1)x} - e^{-inx} - \dots \\
&\quad - e^{-i3x} - e^{-i2x} - e^{-ix} - e^{i(n+1)x} - e^{-inx} - \dots - e^{i3x} - e^{i2x} - e^{ix} \\
&\quad + e^{-inx} + e^{-i(n-1)x} + \dots + e^{-i2x} + e^{-ix} + 1 \\
&= 2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x},
\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}}{(n+1)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} = \frac{2 - [e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}]}{(n+1)[1 - (e^{ix} + e^{-ix}) + 1]} \\
&= \frac{2 - 2 \cos((n+1)x)}{(n+1)[2 - 2 \cos x]}.
\end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich mit der Regel von DE L'HÔPITAL

$$\begin{aligned}
K_n(0) &= \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{1 - \cos x} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n+1) \sin((n+1)x)}{\sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n+1) \cos((n+1)x)}{\cos x} = n+1.
\end{aligned}$$

3. Mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi : & k = 0, \\ \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2i \sin(k\pi)}{ik} = 0 : & k \neq 0, \end{cases}$$

folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 1$$

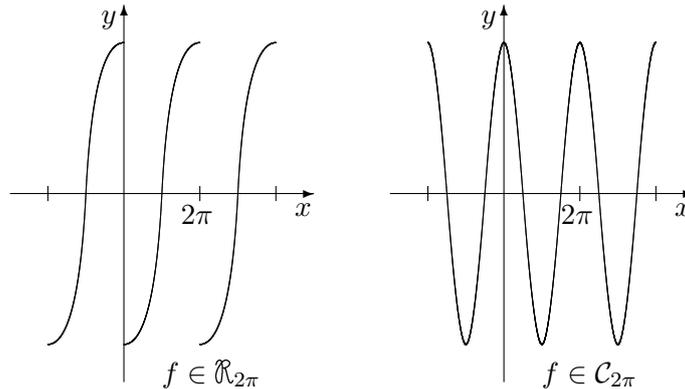
und somit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1.$$

4. Das ist klar wegen $\cos((n+1)x) \leq 1$, $\cos x \leq 1$.

5. Schließlich gilt $1 - \cos((n+1)x) \leq 2$ und $\frac{1}{1 - \cos x} \leq \frac{1}{1 - \cos \delta}$ für $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$. \square

Wir bezeichnen mit $\mathcal{R}_{2\pi}$ die Menge der 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} , die auf $[0, 2\pi]$ RIEMANN-integrierbar sind, und mit $\mathcal{C}_{2\pi}$ die auf \mathbb{R} stetigen 2π -periodischen Funktionen, z. B.



Lemma 9.1. Für $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ ist $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx$ von a unabhängig.

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(x) dx + \underbrace{\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx}_{y:=x-2\pi} \\ &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_0^a \underbrace{f(y+2\pi)}_{=f(y)} dy = \int_0^{2\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

\square

Satz 9.5. Seien $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und $(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^n f_k e^{ikx}$ die n -te Partialsumme bezüglich

$\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Dann gilt

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Beweis. Wegen $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau$ (nach Lemma 9.1) ist

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_n(x-\tau) d\tau \quad [t := x-\tau \Rightarrow d\tau = -dt] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

□

Satz 9.5 besagt, dass $S_n f$ die **Faltung** von f mit dem DIRICHLETSchen Kern ist:

$$S_n f = f * \frac{D_n}{2\pi}.$$

Satz 9.6 (RIEMANNSches Lokalisierungsprinzip). *Das Konvergenzverhalten von $\{(S_n f)(x)\}_{n=1}^{\infty}$ für $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ hängt nur vom Verhalten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x ab. Präziser: Sind $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und gilt $f(\xi) = g(\xi)$ für alle $\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, so konvergieren $(S_n f)(x)$ und $(S_n g)(x)$ beide, und zwar mit demselben Grenzwert oder beide konvergieren nicht.*

Diese Tatsache ist erstaunlich, da man ja zur Berechnung der FOURIER-Koeffizienten die Funktion f auch überall außerhalb dieser Umgebung von x kennen muss.

Beweis. Setze $h := f - g$. Dann ist $h(x - t) = 0$ für $|t| < \varepsilon$. Nach Satz 9.5 ist

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) - (S_n g)(x) &= (S_n h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \varepsilon} h(x-t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} h(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} h(x-t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Setze $H(t) := \begin{cases} 0 & : & |t| < \varepsilon \\ \frac{h(x-t)}{\sin(t/2)} & : & \varepsilon \leq |t| \leq \pi \end{cases} \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} h(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \quad (\text{nach Satz 9.4}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{2i} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(t) e^{it/2}}{2i} e^{int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(t) e^{-it/2}}{2i} e^{-int} dt \\ &= \left[\frac{H(t) e^{it/2}}{2i} \right]_{-n} - \left[\frac{H(t) e^{-it/2}}{2i} \right]_n. \end{aligned}$$

Letzteres ist die Differenz des $-n$ -ten FOURIER-Koeffizienten von $\frac{1}{2i} H(t) e^{it/2}$ und des n -ten FOURIER-Koeffizienten von $\frac{1}{2i} H(t) e^{-it/2}$, die nach dem RIEMANNschen Lemma gegen 0 strebt. \square

Satz 9.7 (Konvergenzkriterium von DINI⁴). *Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und für ein $\delta > 0$ gelte*

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \infty.$$

Dann gilt $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (S_n f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt}_{(*)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]}_{=: \varphi(x)} D_n(t) dt
 \end{aligned}$$

((*): Substituiere $s := -t$ und nenne s wieder t). Für ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$ ist also

$$(S_n f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt$$

mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt,$$

und der Betrag hiervon ist nicht größer als

$$C \int_0^{\varepsilon} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt = C \underbrace{\left(\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \right)}_{\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} < \frac{\eta}{2}$$

mit einer Konstanten C für ein hinreichend kleines $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$. Setzen wir

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : \quad -\pi \leq t \leq \varepsilon_0, \\ \frac{\varphi(t)}{\sin(t/2)} & : \quad \varepsilon_0 < t \leq \pi, \end{cases}$$

so wird das zweite Integral mit $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon_0}^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt,$$

und da $H \in \mathcal{R}_{2\pi}$, folgt, dass dieses für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht (RIEMANNSCHE Lemma). Dieses Integral ist also für alle $n \geq n_0(\eta)$ betragsmäßig kleiner als $\frac{\eta}{2}$. Insgesamt ergibt sich

$$|(S_n f)(x) - f(x)| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \quad \forall n \geq n_0(\eta)$$

für beliebig vorgegebenes $\eta > 0$. □

Definition 9.5. Eine Funktion $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **HÖLDER⁵-stetig**, wenn es $\alpha \in (0, 1]$ und $M \in (0, \infty)$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [A, B].$$

Die Zahl α heißt **HÖLDER-Exponent**.

Im Fall $\alpha = 1$ spricht man von **LIPSCHITZ⁶-Stetigkeit**.

Seien $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{C}$ und $0 < \alpha < \beta < 1$. Dann gilt:

f LIPSCHITZ-stetig $\Rightarrow f$ HÖLDER-stetig mit $\beta \Rightarrow f$ HÖLDER-stetig mit $\alpha \Rightarrow f$ stetig.

In der Tat, aus $|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$ für alle $x, y \in [A, B]$ folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{1-\beta} |x - y|^\beta \leq \underbrace{M (B - A)^{1-\beta}}_{=: M'} |x - y|^\beta$$

für alle $x, y \in [A, B]$. Analog zeigt man die anderen Implikationen.

Genügt f einer HÖLDER-Bedingung mit $\alpha > 1$, so ist f automatisch konstant, denn

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{1+\varepsilon} \quad \forall x, y \in [A, B] \\ \Rightarrow & \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M |x - y|^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow y \text{ (} y \in [A, B] \text{ fixiert)} \\ \Rightarrow & f'(y) = 0 \quad \forall y \in [A, B] \\ \Rightarrow & f = \text{const.} \end{aligned}$$

⁵Otto HÖLDER (1859 - 1937), deutscher Mathematiker. Er lieferte grundlegende Beiträge zur Gruppentheorie.

⁶Rudolf LIPSCHITZ (1832 - 1903), deutscher Mathematiker. Forschte in vielen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik.

Beispiel 9.3. (1) Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, ist stetig, aber nicht LIPSCHITZ-stetig. Denn würde f einer LIPSCHITZ-Bedingung, etwa

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M |x - y| = M |\sqrt{x} + \sqrt{y}| |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$$

für alle $x, y \in [0, 1]$, genügen, so folgte daraus der Widerspruch

$$\frac{1}{M} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \rightarrow 0 \text{ für } x, y \rightarrow 0.$$

Diese Funktion ist aber HÖLDER-stetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$, denn für $x > y$ gilt

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq (x - y)^{\frac{1}{2}} \iff x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - y \iff 1 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

(2) Betrachte $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1/|\log x| & 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$ Diese Funktion ist nicht HÖLDER-stetig. Genügte sie einer HÖLDER-Bedingung, so würde insbesondere

$$|f(x) - f(0)| \leq M |x - 0|^\alpha, \quad \text{also} \quad \frac{1}{|\log x|} \leq M x^\alpha$$

gelten, woraus sich der Widerspruch

$$\frac{1}{M} \leq x^\alpha |\log x| \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0$$

ergäbe. Aber f ist natürlich stetig.

Satz 9.8. Sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ in einer (beliebig kleinen) Umgebung von x HÖLDER-stetig. Dann gilt $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$.

Beweis. Wir haben $|f(t_1) - f(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^\alpha$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} &\leq \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} + \frac{|f(x) - f(x-t)|}{t} \\ &\leq \frac{M t^\alpha}{t} + \frac{M t^\alpha}{t} = \frac{2M}{t^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Wir wissen aber, dass $\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < \infty$ gilt. Die Behauptung folgt also aus Satz 9.7. \square

Ist also f ein „bisschen“ besser als stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe. Stetigkeit allein reicht nicht aus (dies wurde 1876 von DU BOIS-REYMOND⁷ bewiesen). Ein funktionalanalytischer Beweis dessen:

$$(S_n f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) D_n(t) dt$$

definiert ein Funktional $S_n: \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes n . Wäre nun $\{(S_n f)(0)\}_{n=0}^{\infty}$ für alle $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ konvergent, so würde nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS $\sup_{n \geq 0} \|S_n\| < \infty$ folgen. Wir haben aber

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})t)|}{\frac{t}{2}} dt \quad [x := (n + \frac{1}{2})t] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{\frac{x}{n + \frac{1}{2}}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Bei Funktionen, die nur stetig sind, hilft folgender Trick. Anstelle von $(S_n f)(x)$ betrachtet man die sogenannten **FEJÉRSchen Mittel**

$$(\sigma_n f)(x) := \frac{(S_0 f)(x) + (S_1 f)(x) + \cdots + (S_n f)(x)}{n + 1}.$$

Der Hintergedanke ist die **CESÀRO⁸-Summation**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Beweisidee. Man zeigt zunächst, dass $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ gegen 0 geht, falls $a_n \rightarrow 0$. Gelte dann $a_n \rightarrow a$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, und betrachte $a'_n := a_n - a$. Dann folgt $b'_n :=$

⁷David Paul Gustave DU BOIS-REYMOND (1831 - 1889), deutscher Mathematiker. Theorie der Differentialgleichungen. Zeigte in einer Arbeit aus dem Jahre 1873 die Existenz einer stetigen Funktion, deren FOURIER-Entwicklung in einem Punkt divergiert (und widerlegte damit eine Vermutung von DIRICHLET). Gab als erster einen strengen Beweis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

⁸Ernesto CESÀRO (1859 - 1906), italienischer Mathematiker. Abhandlungen zu Themen aus Arithmetik, Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Differentialgeometrie. Er interessierte sich auch für Zahlentheorie und trug zur Verbreitung der MAXWELLSchen Elektrodynamik bei.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a'_k = b_n - a \rightarrow 0.$$

Es kann aber sein, dass $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert, obwohl die Folge $\{a_n\}$ divergiert.

Beispiel 9.4. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$. Die Folge ihrer Partialsummen $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ divergiert, aber ihre CESÀRO-Mittel sind ungefähr $\frac{1}{n} \frac{n}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Satz 9.9 (FEJÉR). Für $f \in C_{2\pi}$ gilt $(\sigma_n f) \Rightarrow f$ auf \mathbb{R} .

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} (\sigma_n f)(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_k(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \underbrace{\sum_{k=0}^n D_k(t)}_{=(n+1)K_n(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \end{aligned}$$

und damit nach Satz 9.4, Punkt 4

$$|(\sigma_n f)(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |t| \leq \delta \text{ und } \forall x \in \mathbb{R},$$

da f auf \mathbb{R} gleichmäßig stetig ist. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Satz 9.4, Punkt 5, ist des weiteren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{|t|>\delta} K_n(t) dt \quad \text{mit } M := \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{2}{n+1} \frac{1}{1 - \cos \delta} dt \\ &\leq \frac{M}{\pi} \frac{2}{n+1} \frac{1}{1 - \cos \delta} (2\pi - 2\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Somit ist $|(\sigma_n f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. \square

Korollar 9.2 (zu Satz 9.9). *Besitzen $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ die gleichen FOURIER-Koeffizienten, so gilt $f = g$.*

Beweis. Dies folgt wegen $\sigma_n f = \sigma_n g$ aus Satz 9.9 \square

Korollar 9.3 (zu Satz 9.9). *Ist $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ und gilt $f_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist $f = 0$.*

Beweis. Wende Korollar 9.2 mit $g = 0$ an. \square

Korollar 9.4 (zu Satz 9.9). *Sind $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, so gilt*

1. *Konvergenz der FOURIER-Reihe im quadratischen Mittel:*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

2. *PARSEVAL'sche Gleichung:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{g_k}$$

und insbesondere

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2.$$

Beweis. 1. Nach Satz 9.3 gilt

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - (\sigma_n f)(x)|^2 dx$$

und aus Satz 9.9 folgt

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - (\sigma_n f)(x)|^2 dx \leq \underbrace{\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - (\sigma_n f)(x)|^2}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} dx}_{=2\pi}.$$

2. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_n f)(x) \overline{g(x)} dx &= \sum_{k=-n}^n f_k \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{g(x)} dx = \sum_{k=-n}^n f_k \overline{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx} \\ &= \sum_{k=-n}^n f_k \overline{g_k} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_n f)(x) \overline{g(x)} dx &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)| |g(x)| dx \\ &\stackrel{*}{\leq} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{< \infty} \\ &= o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(*: Anwendung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung).

□

⁹Marc-Antoine PARSEVAL (1755 - 1836), französischer Mathematiker. Veröffentlichte seine PARSEVALSche Gleichung ohne Beweis, da er die Aussage für offensichtlich hielt.

Die Korollare 9.2 und 9.3 gelten sogar für $f \in L^1(0, 2\pi)$, das Korollar 9.4 gilt auch für $f \in L^2(0, 2\pi)$.

Schließlich noch zwei Sätze, die wir hier nicht beweisen wollen.

Satz 9.10 (DIRICHLET, JORDAN). *Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ stückweise C^1 , so gilt*

$$(S_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dieser Satz gilt auch für Funktionen von **beschränkter Variation**. Sei f auf $[a, b]$ definiert und sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Ist nun die Menge aller Zahlen v mit $v := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ für alle möglichen Zerlegungen von $[a, b]$ von oben beschränkt, so heißt f in $[a, b]$ von beschränkter Variation (siehe z. B. Fichtenholz, Nr. 567).

Satz 9.11 (LIPSCHITZ). *Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und ist f HÖLDER-stetig auf $[A, B]$, so konvergiert $S_n f$ gleichmäßig gegen f auf jedem Intervall $[a, b] \subset (A, B)$.*

9.5 Beispiele

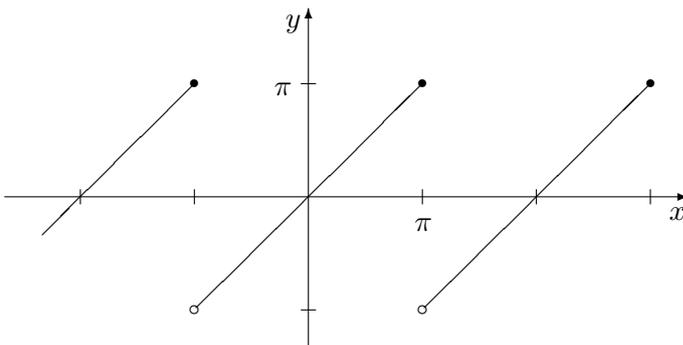
Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ gerade, $f(x) = f(-x)$, so ist $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$, d. h. wir haben

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Gerade Funktionen lassen sich also in eine Kosinusreihe entwickeln. Für ungerade Funktionen, $f(x) = -f(-x)$, aus $\mathcal{R}_{2\pi}$ ist $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$ und wir erhalten eine reine Sinusreihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Beispiel 9.5. (1) $f(x) = x$ für $-\pi < x \leq \pi$.



Die 2π -periodische Fortsetzung \tilde{f} von f ist ungerade und es gilt $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{2\pi} \setminus \mathcal{C}_{2\pi}$. Sie lässt sich also in eine Sinusreihe entwickeln. Wir haben

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} x \frac{-\cos(nx)}{n} \\ &= -x \frac{\cos(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} = -\frac{2\pi(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Für $-\pi < x < \pi$ ist die Bedingung aus Satz 9.7 (DINI) erfüllt,

$$\int_0^{\delta} \frac{|(x+t) + (x-t) - 2x|}{t} dt = \int_0^{\delta} 0 dt = 0,$$

d. h. die FOURIER-Reihe konvergiert für alle $x \in (-\pi, \pi)$. Wir erhalten

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} \pm \dots \right).$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt dies

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

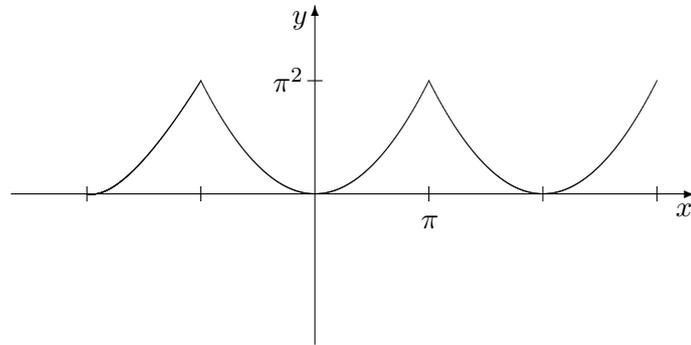
Dies zeigte LEIBNIZ 1673 (als 27-Jähriger) auf anderem Wege. Dies faszinierte ihn dermaßen, dass er seinen Anwaltsberuf an den Nagel hing, um sich fortan der Mathematik zu widmen.

(2) $f(x) = x^2$ für $-\pi < x \leq \pi$.

Die 2π -periodische Fortsetzung \tilde{f} von f ist gerade und aus $\mathcal{C}_{2\pi}$. Für $x \neq \pi$ ist

$$\left| \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2 - 2x^2}{t} \right|$$

= $2t$, und für $x = \pi$ ist



$$\left| \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t) - 2\tilde{f}(x)}{t} \right| = \left| \frac{(\pi-t)^2 + (\pi-t)^2 - 2\pi^2}{t} \right| \leq |2t - 4\pi|.$$

Damit ist das Kriterium von DINI überall erfüllt. Für die FOURIER-Koeffizienten gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

und für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 d \frac{\sin(nx)}{n} = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} \pm \dots \right).$$

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\end{aligned}$$

Die Frage nach der Summe von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ trat erstmals 1644 bei Pietro MENGOLI (1626 - 1686, italienischer Mathematiker) auf. Nachdem LEIBNIZ 1673 die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ berechnete, behauptete er öffentlich, jede beliebige Reihe aufsummieren zu können. Dies kam auch John PELL (1611 - 1685, englischer Mathematiker) zu Ohren, welcher LEIBNIZ nach der Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fragte. LEIBNIZ konnte das Problem nicht lösen und zog daraufhin seine Ankündigung, jede Reihe aufsummieren zu können, wieder zurück. Erst 1733 gelang es dem damals 25-jährigen EULER $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (allerdings auf anderem Wege) zu zeigen.

- (3) $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$. Man kann f zu einer geraden Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}_{2\pi}$ fortsetzen. Diese genügt überall der DINI-Bedingung (und ist auf ganz \mathbb{R} sogar LIPSCHITZ-stetig). Die FOURIER-Koeffizienten sind

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x d \frac{\sin(nx)}{n} = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 : & n \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{n^2\pi} : & n \text{ ungerade.} \end{cases}\end{aligned}$$

Für $0 \leq x \leq \pi$ ist also

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right).$$

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \dots \right), \\ \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\end{aligned}$$

Sei $S := \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$, also

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{8} + S \right) \iff S = \frac{\pi^2}{24}.$$

Wir erhalten erneut

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 4S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie L. EULER $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ bestimmte (i. A. nennt man $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$ **Zeta-Funktion**, wir wissen $\zeta(1) = \infty$). Wir versuchen den Wert von $\zeta(2)$ durch Aufsummieren zu erraten. Summiert man die ersten n Glieder, ergibt sich der Fehler

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \approx \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}.$$

Wollen wir nun $\zeta(2)$ bis auf 20 Stellen nach dem Komma berechnen, so muss $\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{20}}$, d. h. $n = 10^{20}$ sein. Nehmen wir an, dass ein Computer in der Lage ist, pro Sekunde 10^9 Summanden zu addieren, so benötigt dieser eine Rechenzeit von 10^{11} Sekunden (3 170 Jahre). Da wir nicht so viel Zeit zur Verfügung haben, investieren wir etwas Mathematik. Dazu betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = 1.$$

Dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \zeta(2) - 1$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Brechen wir jetzt die Summation nach dem n -ten Glied ab, ist der Fehler

$$\approx \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots \approx \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}.$$

Mit $\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{10^{20}}$ ergibt sich $n = 10^{10}/\sqrt{2} \approx 0.7 \cdot 10^{10}$ und der Computer braucht nur noch $0.7 \cdot 10^{10}/10^9 = 7$ Sekunden.

EULER besaß aber keinen Computer. Er ging stattdessen so an die Sache heran:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}}_{=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\dots} dx \\ &\stackrel{*}{=} \int_0^{-1} \frac{-\log(1-x)}{x} dx = \int_0^{1/2} \frac{-\log(1-x)}{x} dx + \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{-\log(1-x)}{x} dx}_{(*)}, \end{aligned}$$

unter Verwendung der TAYLOR-Reihe von $\log(1-x)$ an der Stelle *. Das Integral $\int \frac{-\log(1-x)}{x} dx$ besitzt leider keine elementare Stammfunktion. Führt man aber in (*) die Substitution $y := 1-x$ aus und bezeichnet y wieder mit x , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{-\log(1-x)}{x} dx &= \int_0^{1/2} \frac{-\log x}{1-x} dx = \int_0^{1/2} -\log x d[-\log(1-x)] \\ &= \log x \log(1-x) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \log(1-x) d \log x \\ &\stackrel{*'}{=} (\log \frac{1}{2})^2 + \int_0^{1/2} \frac{-\log(1-x)}{x} dx, \end{aligned}$$

unter Verwendung von *':

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(1-x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \log \frac{1}{y} \log \left(1 - \frac{1}{y} \right) = - \lim_{y \rightarrow \infty} \log y \left(-\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} - \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \log y \left(-\frac{1}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right) \right) = 0 \end{aligned}$$

(der letzte Limes ist 0, da $\log y$ für $y \rightarrow \infty$ langsamer als jede Potenz von y gegen ∞ strebt).

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= (\log 2)^2 + 2 \int_0^{1/2} \frac{-\log(1-x)}{x} dx = (\log 2)^2 + 2 \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx \\ &= (\log 2)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} = (\log 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Soll der Fehler wieder $\frac{1}{10^{20}}$ sein, ergibt sich

$$\frac{1}{10^{20}} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2 2^x} \leq \frac{1}{n^2} \int_n^{\infty} (e^{-\log 2})^x dx = \frac{1}{n^2} \left. \frac{e^{(-\log 2)x}}{-\log 2} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{n^2 \log 2 \cdot 2^n}.$$

Nimmt man hierin „ \approx “ statt „ \leq “, so erhält man $n^2 \log 2 \cdot 2^n \approx 10^{20}$, was für $n = 56$ erfüllt ist. EULER summierte also etwa 56 Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{n-1}}$ auf und erhielt

$$\zeta(2) = 1.644\,934\,066\,848\,226\,436\,4\dots$$

Er konnte die Berechnung tatsächlich so durchführen, da er die Mittel der Differential- und Integralrechnung (dank NEWTON und LEIBNIZ) schon zur Verfügung hatte.

Das war Vorgeplänkel. Nun zu EULERS Beweis. Bekannt war ihm der VIETA¹⁰sche Wurzelsatz: Sind a, b die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 + Ax + B$, so gilt $A + B = -a$ und $ab = B$, denn $x^2 + Ax + B = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$. Wissen wir also, dass das quadratische Polynom $x^2 + Ax + B$ zwei Nullstellen a und b hat, so kennen wir

$$a + b, \quad ab \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = A^2 - 2B.$$

EULER versuchte, dies auf Polynome unendlichen Grades auszudehnen. Da diese aber keinen höchsten Koeffizienten haben, normieren wir das Absolutglied zu 1. Für Polynome dritten Grades gelingt das wie folgt. Sind a, b und c (ggf. mehrfache oder komplexe) Nullstellen von $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, so gilt

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x - a)(x - b)(x - c)$$

und $(-a)(-b)(-c) = C$. Setzen wir $C \neq 0$ voraus und dividieren obige Gleichung durch C , so bekommen wir

$$1 + \frac{B}{C}x + \frac{A}{C}x^2 + \frac{1}{C}x^3 = \frac{x-a}{-a} \frac{x-b}{-b} \frac{x-c}{-c} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{c}\right).$$

Setzt man noch $\alpha := \frac{B}{C}$, $\beta := \frac{A}{C}$ und $\gamma := \frac{1}{C}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\alpha, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \beta, \quad \frac{1}{abc} = -\gamma.$$

Das klappt für Polynome beliebigen Grades. EULER nahm den Grad ∞ , d. h. er betrachtete

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

¹⁰François VIÈTE (1540 - 1603), französischer Mathematiker. Wichtige Beiträge zur Trigonometrie, wertvolle Vorarbeiten zur Infinitesimalrechnung, beschrieb als erster π in Form eines unendlichen Produkts.

(wir nennen das heute eine Potenzreihe) und erhielt, dass für die Nullstellen a, b, c, \dots dieses Polynoms gilt:

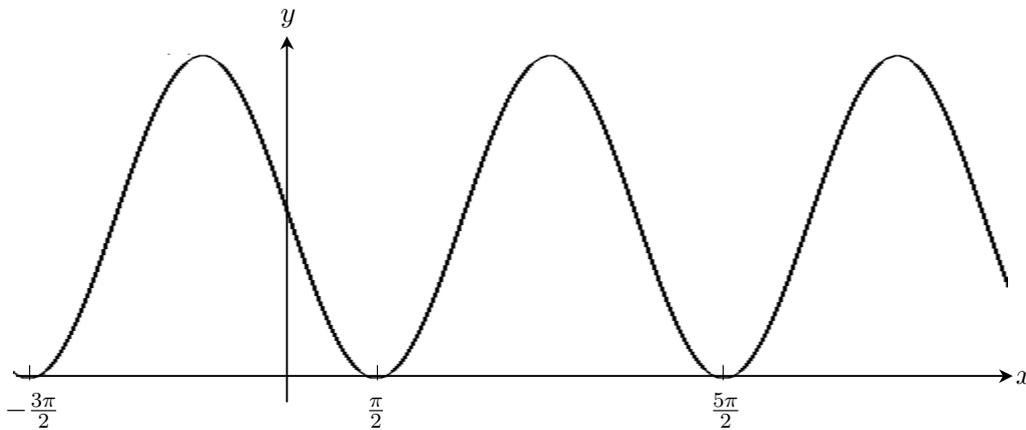
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots = -\alpha, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \dots = \beta$$

und damit

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \dots = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \dots \right) = \alpha^2 - 2\beta. \quad (9.6)$$

Als Polynom vom Grad ∞ wählte EULER

$$1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \mp \dots \quad (9.7)$$



Alle Nullstellen dieses Polynoms unendlichen Grades treten doppelt auf. Nach Gleichung (9.6) ist also

$$2 \cdot \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = (-1)^2 - 2 \cdot 0 = 1,$$

d. h.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Wie im Beispiel 9.5 (3) ergibt sich daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Gegen EULERS Beweis sprechen z. B. folgende zwei Einwände:

1. Um den Wurzelsatz von VIETA derart auf Polynome beliebigen Grades erweitern zu können, muss man sicher sein, *alle* Nullstellen des Polynoms erwischt zu haben. Insbesondere bedeutet das, dass man ggf. auch alle komplexen Nullstellen kennen muss. Aus heutiger Sicht ist das aber kein Problem, denn für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin z = 1 &\implies \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ \implies \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = 0 \\ \implies \underbrace{\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x}_{=:R} - i \underbrace{\frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x}_{=:I} &= 0 \end{aligned}$$

Letzteres ist aber genau dann 0, wenn $R = I = 0$ gilt. Setzt man nun $R = 0$, so ergibt sich wegen $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \neq 0$ für jedes reelle y , dass $\cos x = 0$ sein muss. Setzt man nun $I = 0$, so ergibt sich wegen $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \stackrel{\cos x=0}{=} 1$, dass $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$ gelten muss, und das ist nur für $y = 0$ erfüllt.

Damit ist gezeigt, dass (9.7) nur reelle Nullstellen besitzt.

2. EULER benutzt

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \dots = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \dots \right)$$

mit der Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots,$$

die nicht absolut konvergiert. Ihm war aber noch nicht bekannt, welche schlimmen Ausmaße das Rechnen mit nicht absolut konvergenten Reihen haben kann. Damit beschäftigten sich erst später CAUCHY und WEIERSTRASS.

Diese (und andere) Einwände ändern aber nichts an der Genialität des Beweises.

EULER untersuchte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ auch für $s > 2$ auf gleichem Wege. Es stellt sich heraus, dass dies nur für gerade s funktioniert. Für ungerade s ist der Wert von $\zeta(s)$ bis heute unbekannt. Man weiß nur, dass $\zeta(3)$ irrational ist.

$s = 2n$	2	4	6	8	10	12
$\zeta(2n)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$	$\frac{691 \pi^{12}}{6825 \cdot 93555}$
B_{2n}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

Welche Gesetzmäßigkeit steckt dahinter? Das sind die **BERNOULLI¹¹-Zahlen** B_n . Diese tauchen z. B. in der TAYLOR-Entwicklung von $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ auf:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

EULER zeigte später

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

Er nahm die Einwände gegen seinen Beweis sehr ernst und reparierte ihn, indem er die Formel

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

bewies. Es gilt

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = x - x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \pm \dots$$

Andererseits ist aber $\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 \pm \dots$. Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} = \frac{1}{3!} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Später lieferte EULER sogar noch einen völlig anderen Beweis. Dazu betrachtete er zunächst die TAYLOR-Reihe von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n,$$

wobei

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Damit ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

¹¹Jakob BERNOULLI (1654 - 1705), schweizer Mathematiker und Physiker. Trug wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Variationsrechnung und zur Untersuchung von Potenzreihen bei. Bearbeitete und verbreitete die LEIBNIZSche Infinitesimalrechnung zusammen mit seinem Bruder Johann.

Integration $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int x^{2n} dx$ ergibt

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Setzt man darin $x = 0$, erhält man $C = 0$. Dividiert man nun durch $\sqrt{1-x^2}$ und integriert von 0 bis 1, bekommt man

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=:I_1} = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=:I_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=:I_3}.$$

Dabei ist

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin x \, d \sin x = \left. \frac{\arcsin^2 x}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi^2}{8},$$

$$I_3 \stackrel{*}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n+1} t}{\cos t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt \stackrel{\text{Bsp. 7.5}}{=} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

mit der Substitution $*$: $x = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t \Leftrightarrow dx = \cos t \, dt$. Das Integral I_2 ergibt sich für $n = 0$ aus I_3 . Also gilt

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

9.6 Glattheit der Funktion und Abfallen der FOURIER-Koeffizienten

Satz 9.12. Seien $f, f', \dots, f^{(m-1)} \in \mathcal{C}_{2\pi}$ und $f^{(m)} \in \mathcal{R}_{2\pi}$, $m \geq 1$. Dann gilt

$$|f_k| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^m}\right) \text{ für } |k| \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) d\frac{e^{-ikx}}{-ik} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} df(x) = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

und für $m = 1$ liefert das die Behauptung, denn nach dem RIEMANNschen Lemma gilt

$$[f']_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \rightarrow 0.$$

Für $m \geq 2$ ist analog

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi (ik)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-ikx} dx \\ &= \dots = \frac{1}{2\pi (ik)^m} \underbrace{\int_0^{2\pi} f^{(m)}(x) e^{-ikx} dx}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

□

Satz 9.13. Seien $m \geq 2$ und $f_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^m}\right)$ für $|k| \rightarrow \infty$. Dann ist $f, f', \dots, f^{(m-2)} \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Beweis. Setze $g(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}$. Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i k f_k e^{ikx}, \\ &\vdots \\ g^{(m-2)}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i k)^{m-2} f_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

Wegen $|(i k)^{m-2} f_k e^{ikx}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^2}\right)$ konvergiert die letzte Reihe nach dem Majorantensatz von WEIERSTRASS gleichmäßig. Wir erhalten also $g, g', \dots, g^{(m-2)} \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Aus $g_k = f_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt schließlich $f, f', \dots, f^{(m-2)} \in \mathcal{C}_{2\pi}$. \square

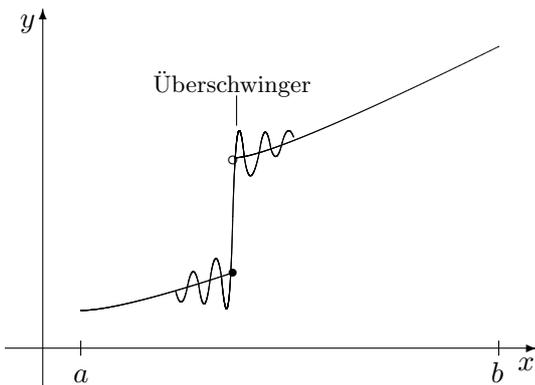
Der Zusammenhang dieser beiden Sätze ist nicht perfekt. Das liegt aber in der Natur der Sache.

9.7 Das GIBBSsche Phänomen

Hat $f \in PC_{2\pi}^1$ (stückweise C^1 und 2π -periodisch) in x einen Sprung, so gilt

$$(S_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

nach Satz 9.10 (DIRICHLET, JORDAN). Es ergibt sich dabei folgendes Bild:

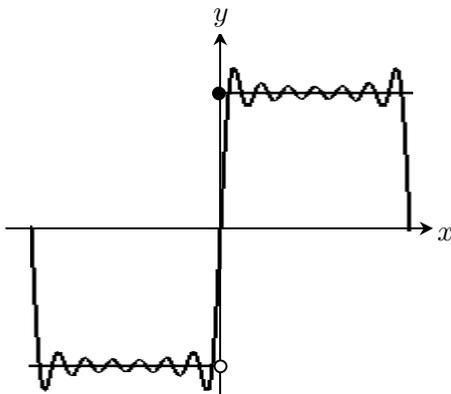


Immer entsteht eine Beule von etwa 18% mal $\frac{1}{2}$ Sprunghöhe (Überschwinger), die sich mit wachsendem n auf die Sprungstelle zubewegt. Dies nennt man das **GIBBS¹²sche Phänomen**.

Wir machen uns das an einem Beispiel klar. Sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : -\pi \leq x < 0, \\ 1 & : 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Es handelt sich um eine ungerade Funktion. Für ihre periodische Fortsetzung \tilde{f} gilt nun



$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & : k \text{ ungerade,} \\ 0 & : k \text{ gerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

d. h. $\tilde{f}(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$. Wir betrachten die Partialsumme

$$T_n(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right)$$

¹²Josiah Willard GIBBS (1839 - 1889), US-amerikanischer Physiker. Arbeitete in den Gebieten statistische Mechanik, Vektoranalysis, elektromagnetische Theorie des Lichts.

und bestimmen deren Extremwerte. Wir haben

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} T'_n(x) &= \cos x + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x) \\
 &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \cdots + \frac{e^{(2n-1)ix} + e^{-(2n-1)ix}}{2} \\
 &= \frac{e^{ix}}{2} (1 + e^{2ix} + \cdots + e^{2(n-1)ix}) + \frac{e^{-ix}}{2} (1 + e^{-2ix} + \cdots + e^{-2(n-1)ix}) \\
 &= \frac{e^{ix}}{2} \frac{1 - e^{2nix}}{1 - e^{2ix}} + \frac{e^{-ix}}{2} \frac{1 - e^{-2nix}}{1 - e^{-2ix}} \\
 &= \frac{e^{ix}}{2} \frac{1 - e^{2nix}}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} + \frac{e^{-ix}}{2} \frac{1 - e^{-2nix}}{e^{-ix}(e^{ix} - e^{-ix})} \\
 &= \frac{1 - e^{2nix}}{-4i \sin x} + \frac{1 - e^{-2nix}}{4i \sin x} = \frac{e^{2nix} - e^{-2nix}}{4i \sin x} = \frac{2i \sin(2nx)}{4i \sin x} = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x} = 0
 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $2nx = k\pi$, $k \neq 0$. Die erste positive Nullstelle von T'_n ist damit $x = \frac{\pi}{2n}$, und der Wert von T_n an dieser Stelle ist

$$T_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)}{2k-1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)}{(2n-1)\frac{\pi}{2n}} \frac{\pi}{n}.$$

Das ist eine RIEMANNsche Integralsumme. Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$T_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.18.$$

Das GIBBSsche Phänomen ist damit auch für allgemeine Funktionen $\alpha + \beta f(t-x) + g(t-x)$, $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$, $f(x)$ wie oben und $(S_n g)(t) \rightarrow g(t)$, die in $x = t$ einen Sprung haben, gezeigt.

9.8 Die WEIERSTRASSschen Approximationsätze

Satz 9.14 (2. WEIERSTRASSscher Approximationsatz). *Ist $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, so existiert eine Folge $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ trigonometrischer Polynome mit $T_n \rightrightarrows f$ auf \mathbb{R} , d. h.*

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T_n(x)| \rightarrow 0.$$

Beweis. Man nehme für T_n die FEJÉRSchen Mittel $\sigma_n f$. □

Satz 9.15 (1. WEIERSTRASSscher Approximationsatz). *Ist $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, so existiert eine Folge $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ von Polynomen mit $P_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$, d. h.*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0.$$

Beweis. Seien zunächst $a = -\pi$, $b = \pi$ und $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann kann f zu einer Funktion aus $\mathcal{C}_{2\pi}$ fortgesetzt werden. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz 9.14 existiert ein trigonometrisches Polynom $T_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$ mit $|f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Wir setzen $C := \sum_{k=-m}^m |c_k|$. Die Reihe $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \dots$ konvergiert auf $[-m\pi, m\pi]$ gleichmäßig gegen ihre Summe. Ist nun n hinreichend groß, so ist also

$$|e^{ix} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \forall x \in [-m\pi, m\pi]$$

mit $S_n(x) := 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!}$. Es ergibt sich also

$$\left| T_m(x) - \sum_{k=-m}^m c_k S_n(kx) \right| = \left| \sum_{k=-m}^m c_k (e^{ikx} - S_n(kx)) \right| \leq \sum_{k=-m}^m |c_k| \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes $x \in [-\pi, \pi]$. Setzen wir $P_n(x) := \sum_{k=-m}^m c_k S_n(kx)$, so ist damit

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Seien nun $a = -\pi$, $b = \pi$ und $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Wir setzen $\delta := \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$ und betrachten $g(x) := f(x) + \delta x$. Damit gilt $g(-\pi) = g(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$. Nach dem eben Bewiesenen gibt es Polynome R_n mit $R_n(x) \rightrightarrows g(x)$. Es folgt $R_n(x) - \delta x \rightrightarrows f(x)$. Seien schließlich a und b beliebig. Die Abbildung

$$\varphi: [-\pi, \pi] \longrightarrow [a, b], \quad y \longmapsto \frac{(b-a)y + (a+b)\pi}{2\pi},$$

ist bijektiv. Wir finden also Polynome R_n mit $R_n(y) \rightrightarrows f(\varphi(y))$ für $y \in [-\pi, \pi]$. Die Umkehrabbildung von φ ist

$$\varphi^{-1}: [a, b] \longrightarrow [-\pi, \pi], \quad x \longmapsto \frac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a},$$

womit $P_n(x) := R_n(\varphi^{-1}(x)) \rightrightarrows f(x)$ für $x \in [a, b]$ gilt. \square

Wir bleiben im Kontext von Satz 9.14, d. h. bei trigonometrischen Polynomen. Man definiert

$$E_n(f) := \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_\infty,$$

wobei $\|g\|_\infty := \max_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)|$ und \mathcal{T}_n der Vektorraum aller trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ seien. Die Zahlen $E_n(f)$ beschreiben also die bestmögliche Approximation von f durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad n . Satz 9.14 besagt, dass $E_n(f) \rightarrow 0$ für alle $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ gilt.

Die Geschwindigkeit, mit der $E_n(f)$ gegen 0 strebt, hängt von der Glattheit von f ab (das wird in der Approximationstheorie untersucht). Ohne Beweis führen wir dazu noch folgenden Satz an. Darin bezeichnet $\mathcal{C}_{2\pi}^{m,\alpha}$ die Menge der 2π -periodischen Funktionen, deren m -te Ableitung zu $\mathcal{C}_{2\pi}$ gehört ($\alpha = 0$) bzw. deren m -te Ableitung zu $\mathcal{C}_{2\pi}$ gehört und einer HÖLDER-Bedingung mit dem Exponenten α , $0 < \alpha \leq 1$, genügt, d. h.

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq M |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Satz 9.16 (JACKSON¹³).

1. Aus $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{m,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, folgt $E_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+\alpha}}\right)$ für $n \rightarrow \infty$.
2. Aus $E_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+\alpha}}\right)$ für $n \rightarrow \infty$ und $0 < \alpha < 1$ folgt $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{m,\alpha}$.

Satz 9.17. Für $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ gilt $\|f - S_n f\|_\infty \leq (L_n + 1) E_n(f)$ mit $L_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx$, wobei $D_n(x)$ den DIRICHLET-Kern meint.

Es kann $L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + \mathcal{O}(1)$ gezeigt werden.

Beweis. Man kann zeigen, dass das Infimum in der Definition von $E_n(f)$ angenommen wird, also ein Minimum ist. Sei $T_n \in \mathcal{T}_n$ die bestmögliche Approximation von f . Wir schreiben $f = T_n + g$ und haben $\|g\|_\infty = E_n(f)$. Daraus folgt

$$\|f - S_n f\|_\infty = \|T_n + g - S_n T_n - S_n g\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \|S_n g\|_\infty$$

und wegen $(S_n g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) D_n(t) dt$ ist

$$\|S_n g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt}_{=L_n}.$$

□

Satz 9.18. Sei $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ mit $\|f - \sigma_n f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} (\sigma_n f)(x) &= \frac{(S_0 f)(x) + (S_1 f)(x) + \cdots + (S_n f)(x)}{n+1} \\ &= \frac{f_0 + (f_{-1} e^{-ix} + f_0 + f_1 e^{ix}) + \cdots + (f_{-n} e^{-inx} + \cdots + f_0 + \cdots + f_n e^{inx})}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)f_0 + n f_{-1} e^{-ix} + n f_1 e^{ix} + \cdots + f_{-n} e^{-inx} + f_n e^{inx}}{n+1} \\ &= \sum_{k=-n}^n \frac{n+1-|k|}{n+1} f_k e^{-ikx}. \end{aligned}$$

¹³Dunham JACKSON (1888 - 1946), US-amerikanischer Mathematiker. Seine Forschungsgebiete waren Approximationstheorie und Statistik.

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - (\sigma_n f)(x)) e^{-ikx} dx = f_k - \frac{n+1-|k|}{n+1} f_k = \frac{|k|}{n+1} f_k.$$

Andererseits ist

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - (\sigma_n f)(x)) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (\sigma_n f)(x)| dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

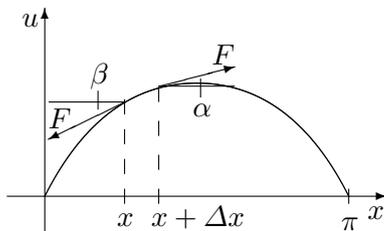
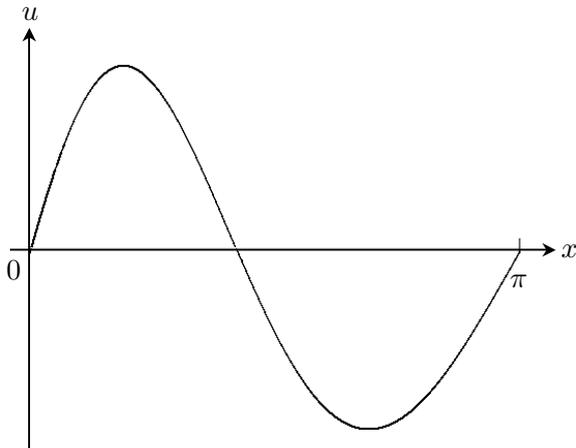
Damit ergibt sich

$$\frac{|k|}{n+1} |f_k| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \implies \frac{n|k|}{n+1} |f_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \implies |k| |f_k| = 0,$$

d. h. $f_k = 0$ für alle $k \neq 0$. Also ist f konstant. □

Fazit. Die FEJÉRSchen Mittel konvergieren für jede Funktion aus $\mathcal{C}_{2\pi}$, aber eben nur langsam. Die Partialsummen der FOURIER-Reihen konvergieren nicht für alle f aus $\mathcal{C}_{2\pi}$. Ist aber f ein „bisschen“ besser als stetig, so konvergiert $S_n f$, und zwar um so schneller, je glatter f ist.

9.9 Die schwingende Saite



Folgende Überlegung stammt von Daniel BERNOULLI¹⁴ aus dem Jahre 1753. Wir betrachten eine schwingende Saite (siehe Abbildung links). Dabei sei $u(x, t)$ die Auslenkung dieser Saite an der Stelle $x \in [0, \pi]$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Im schwingenden Zustand wirkt auf die Saite an den Stellen x bzw. $x + \Delta x$ die Kraft F (Abbildung links unten). Die Kraft F_{\uparrow} , mit der die Saite nach oben gezogen wird, ergibt sich also zu

$$\begin{aligned} F_{\uparrow} &= F \sin \alpha - F \sin \beta \\ &\stackrel{*}{\approx} F \tan \alpha - F \tan \beta \\ &= F u_x(x + \Delta x, t) - F u_x(x, t) \\ &\stackrel{*'}{=} F u_{xx}(\xi, t) \Delta x \\ &\approx F u_{xx}(x, t) \Delta x. \end{aligned}$$

Die Näherung $*$ gilt für kleine Winkel α, β . An der Stelle $*$ ' ging der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein.

Andererseits ist $F_{\uparrow} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung nach oben}$. Ist ρ die Dichte des Materials der Saite, so ist also

$$F_{\uparrow} = \rho \Delta x u_{tt}(x, t).$$

Es ergibt sich $F u_{xx}(x, t) \Delta x \approx \rho \Delta x u_{tt}(x, t)$, und im Grenzübergang

$$u_{tt}(x, t) = \frac{F}{\rho} u_{xx}(x, t) =: c^2 u_{xx}(x, t).$$

Wir erhalten also eine partielle Differentialgleichung (die sogenannte **Wellengleichung**):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

¹⁴Daniel BERNOULLI (1700 - 1782), schweizer Mathematiker, Physiker und Mediziner. Arbeitete u. a. zusammen mit EULER an den nach ihnen benannten Gleichungen.

Wir probieren es mit dem Ansatz

$$u(x, t) = v(x) w(t). \quad (9.8)$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt mit $u_{tt} = v(x) w''(t)$, $u_{xx} = v''(x) w(t)$ die Gleichung

$$v(x) w''(t) = c^2 v''(x) w(t) \iff \frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Die linke Seite hängt nicht von x und die rechte Seite nicht von t ab, also existiert eine Konstante λ mit

$$\frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} =: -\lambda.$$

Wir betrachten zunächst die erste Differentialgleichung $v''(x) + \lambda v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung dieser ist

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Nehmen wir an, dass die Saite fest eingespannt ist, so haben wir die Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$. Dies wird nach Gleichung (9.8) für $v(0) = v(\pi) = 0$ realisiert. Wir haben

$$v(0) = A, \quad \text{d. h.} \quad v(0) = 0 \iff A = 0$$

und

$$v(\pi) = B \sin(\sqrt{\lambda} \pi), \quad \text{d. h.} \quad v(\pi) = 0 \iff B = 0 \text{ oder } \sqrt{\lambda} \pi = n \pi.$$

Für $B = 0$ bekommt man nur die triviale Lösung $v = 0$, also $u = 0$, in der die Saite in Ruhe ist. Im uns interessierenden Fall $B \neq 0$ und $\lambda = n^2$ erhalten wir die nichttriviale Lösung

$$v_n(x) = \sin(n x).$$

Die zweite gewöhnliche Differentialgleichung ist nun $w_n''(t) + n^2 c^2 w_n(t) = 0$. Die allgemeine Lösung dieser ist

$$w_n(t) = A_n \cos(n c t) + B_n \sin(n c t).$$

Eine spezielle Lösung für die fest eingespannte Saite ist somit

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n c t) + B_n \sin(n c t)) \sin(n x).$$

Jetzt kommen noch Anfangsbedingungen zum Tragen:

$$\begin{aligned} \text{Ausgangslage:} & \quad u(x, 0) = f(x), \\ \text{Ausgangsgeschwindigkeit:} & \quad u_t(x, 0) = g(x). \end{aligned}$$

Wir haben damit

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} f(x),$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_n n c \sin(nct) + B_n n c \cos(nct)) \sin(nx),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n n c \sin(nx) \stackrel{!}{=} g(x).$$

Setzen wir also f und g ungerade auf $[-\pi, \pi]$ fort, so sind A_n und $B_n n c$ gerade die FOURIER-Koeffizienten.

9.10 Integraltransformationen

Sie verallgemeinern die Philosophie

$$\text{Zeitbereich} \longleftrightarrow \text{Frequenzbereich}$$

und sind von der Form

$$(Tf)(\lambda) := F(\lambda) := \int_I f(t) K(\lambda, t) dt.$$

Dabei ist λ die Frequenz und t die Zeit. Mögliche Integraltransformationen sind beispielsweise

1. diskrete FOURIER-Transformation:

$$F(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{2\pi} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

2. FOURIER-Transformation:

$$(\mathfrak{F}f)(\lambda) := F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i\lambda t}}{2\pi} dt$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} dt$ etc.,

3. LAPLACE¹⁵-Transformation:

$$(\mathfrak{L}f)(\lambda) := F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt, \quad \lambda > 0.$$

Beispiel 9.6. Einige LAPLACE-Transformationen sind

$$(1) \quad (\mathfrak{L}1)(\lambda) = \int_0^{\infty} 1 e^{-\lambda t} dt = \left. \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$(2) \quad (\mathfrak{L}t)(\lambda) = \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t d \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} = \left. \frac{t e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

¹⁵Pierre Simon Marquis DE LAPLACE (1749 -1827), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Erklärte Entwicklung des Sonnensystems (KANT-LAPLACE-Theorie). Begründer der Potentialtheorie, Entwicklung der LAPLACE-Gleichung und der LAPLACE-Transformation.

(3) Allgemein gilt $(\mathcal{L}t^n)(\lambda) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, wie man z. B. durch vollständige Induktion zeigen kann.

Etwas mehr zu LAPLACE-Transformation.

Definition 9.6. Man sagt, eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe **exponentielles Wachstum der Rate** höchstens $\lambda_0 > 0$, wenn es ein reelles $C > 0$ und ein $t_0 > 0$ mit

$$|f(t)| \leq C e^{\lambda_0 t}$$

für alle $t \geq t_0$ gibt.

Satz 9.19. Sei f eine auf $[0, \infty)$ stückweise stetige Funktion von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 . Dann existiert die LAPLACE-Transformation $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ für alle $\lambda > \lambda_0$ und ist absolut konvergent.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $\lambda_0 > 0$ mit $|f(t)| \leq C e^{\lambda_0 t}$ für jedes $t \geq t_0$. Da f auf $[0, t_0]$ stückweise stetig, also dort beschränkt ist, gibt es ein $K > 0$ mit $|f(t)| \leq K$ für alle t mit $0 < t < t_0$. Infolge der Beschränktheit der Menge $\{e^{\lambda_0 t} : 0 \leq t \leq t_0\}$ gibt es ein $M > 0$ mit $|f(t)| \leq M e^{\lambda_0 t}$ für alle $t > 0$. Damit gilt

$$\int_0^A |f(t) e^{-\lambda t}| dt \leq \int_0^A M e^{(\lambda_0 - \lambda)t} dt = \frac{M}{\lambda - \lambda_0} e^{-(\lambda - \lambda_0)t} \Big|_0^A = \frac{M}{\lambda_0 - \lambda} (e^{-(\lambda - \lambda_0)A} - 1).$$

Für $\lambda > \lambda_0$ und $A \rightarrow \infty$ gilt somit

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-\lambda t}| dt \leq \frac{M}{\lambda - \lambda_0}.$$

Also konvergiert $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ für $\lambda > \lambda_0$ absolut. \square

Satz 9.20 (Linearität). Habe f bzw. g die LAPLACE-Transformation $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ bzw. $(\mathcal{L}g)(\lambda)$, und konvergiere diese für $\lambda > \lambda_0$ bzw. $\lambda > \lambda'_0$. Dann konvergiert die LAPLACE-Transformation $(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g))(\lambda)$ von $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für alle $\lambda > \max(\lambda_0, \lambda'_0)$ und es gilt

$$(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g))(\lambda) = \alpha (\mathcal{L}f)(\lambda) + \beta (\mathcal{L}g)(\lambda).$$

Dies ergibt sich sofort aus der Linearität des Integrals.

Satz 9.21. *Sei f auf $[0, \infty)$ differenzierbar und von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 , und sei f' stückweise \mathcal{C}^1 auf $[0, \infty)$. Dann gilt*

$$(\mathfrak{L}f')(\lambda) = \lambda (\mathfrak{L}f)(\lambda) - f(0) \quad \forall \lambda > \lambda_0.$$

Beweis. Wir haben

$$(\mathfrak{L}f')(\lambda) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} df(t) = f(t) e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d e^{-\lambda t}.$$

Mit $|f(t)| \leq C e^{-\lambda_0 t}$ für alle $t > t_0$ ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) e^{-\lambda t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-\lambda t} \leq C \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\lambda_0 + \lambda)t} = 0,$$

also $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\lambda t} = 0$ und damit

$$(\mathfrak{L}f')(\lambda) = -f(0) + \lambda + \lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt = \lambda (\mathfrak{L}f)(\lambda) - f(0).$$

□

Mit vollständiger Induktion kann man außerdem zeigen:

Korollar 9.5 (zu Satz 9.21). *Ist $f \in \mathcal{C}^{n-1}[0, \infty)$, sind $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 und ist $f^{(n)}$ stückweise stetig auf $[0, \infty)$, so gilt*

$$(\mathfrak{L}f^{(n)})(\lambda) = \lambda^n (\mathfrak{L}f)(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f^{(n-1-k)}(0)$$

für alle $\lambda > \lambda_0$.

Satz 9.22 (Faltungssatz). *Die Funktionen f und g seien auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 . Für ihre Faltung*

$$(f \circ g)(t) := \int_0^t f(t-x)g(x) dx = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$$

gilt dann

$$(\mathcal{L}(f * g))(\lambda) = (\mathcal{L}f)(\lambda) \cdot (\mathcal{L}g)(\lambda).$$

Beweis. Setzt man f und g auf $(-\infty, 0)$ durch die Nullfunktion fort, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(t) &= \int_0^\infty f(s)e^{-\lambda s} ds \cdot \int_0^\infty g(t)e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s)e^{-\lambda s} ds \right) g(t)e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)g(t)e^{-\lambda(s+t)} ds dt \stackrel{\star}{=} \int_0^\infty \int_{-t}^\infty f(s-t)g(t)e^{-\lambda s} ds dt \\ &\stackrel{\star'}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty f(s-t)g(t)e^{-\lambda s} ds dt \stackrel{\star''}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s-t)g(t) dt \right) e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^\infty (f * g)(s)e^{-\lambda s} ds = (\mathcal{L}(f * g))(s) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Substitution $s := s - t$ an der Stelle \star , der Nullfortsetzung von f auf $(-\infty, 0)$ bei \star' und der infolge der absoluten Konvergenz von $(\mathcal{L}f)(s)$ und $(\mathcal{L}g)(t)$ erlaubten Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei \star'' . \square

Beispiel 9.7. Es sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y' - 2y = 3e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

zu lösen. Wendet man auf sie die LAPLACE-Transformation an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}(y'' + y' - 2y))(\lambda) = (\mathcal{L}(3e^x))(\lambda) \\ \iff &(\mathcal{L}y'')(\lambda) + (\mathcal{L}y')(\lambda) - 2(\mathcal{L}y)(\lambda) = 3(\mathcal{L}e^x)(\lambda) \quad (\text{Satz 9.20}) \\ \iff &\lambda^2 (\mathcal{L}y)(\lambda) + \lambda (\mathcal{L}y)(\lambda) - 2(\mathcal{L}y)(\lambda) = 3(\mathcal{L}e^x)(\lambda) \quad (\text{Satz 9.21, Korollar 9.5}), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{L}y)(\lambda) &= \frac{3}{\lambda^2 + \lambda - 2} (\mathfrak{L}e^x)(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda + 2} \right) (\mathfrak{L}e^x)(\lambda) \\
 &\stackrel{(9.9)}{=} ((\mathfrak{L}e^x)(\lambda) - (\mathfrak{L}e^{-2x})(\lambda)) \cdot (\mathfrak{L}e^x)(\lambda), \quad \lambda > 1 \\
 &\stackrel{\text{Satz 9.22}}{=} (\mathfrak{L}((e^x - e^{-2x}) * e^x))(\lambda)
 \end{aligned}$$

wegen

$$(\mathfrak{L}e^{\alpha x}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-\lambda t} dt = \frac{e^{(\alpha-\lambda)t}}{\alpha - \lambda} \Big|_0^{\infty} \stackrel{\alpha < \lambda}{=} \frac{1}{\lambda - \alpha}. \quad (9.9)$$

Die Faltung $(e^x - e^{-2x}) * e^x$ ist

$$\int_0^x (e^y - e^{-2y}) e^{x-y} dy = e^x \int_0^x dy - e^x \int_0^x e^{-3y} dy = x e^x - e^x \frac{e^{-3y}}{-3} \Big|_0^x = x e^x + \frac{e^{-2x}}{3} + \frac{e^x}{3}.$$

Also ist $y(x) = x e^x + \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$ die gesuchte Lösung der Differentialgleichung.

Index

- \mathcal{T}_n , 45
- $\mathcal{R}_{2\pi}$, 19
- $\mathcal{RL}^2[a, b]$, 13
- $f_n \rightrightarrows f$, 1
- $PC_{2\pi}^1$, 42

- exponentielles Wachstum, 52

- FOURIER-Koeffizient, 11, 13
- FOURIER-Reihe, 11, 13
- Faltung, 20
- Faltungssatz, 54
- Funktion
 - von beschränkter Variation, 29
- Funktionensystem
 - orthogonales, 13
 - orthonormales, 13
- Gleichung, PARSEVALSche, 16, 27
- HÖLDER-Exponent, 23
- Integraltransformation, 51
 - FOURIERSche, 51
 - diskrete, 51
 - LAPLACESche, 51
 - Linearität, 52
- KRONECKER-Symbol, 13
- Kern
 - DIRICHLETScher, 17
 - FEJÉRScher, 17
- Konvergenz
 - gleichmäßig, 1
 - im quadratischen Mittel, 27
 - punktweise, 1

- Lemma
 - RIEMANN-LEBESGUESches, 16
 - RIEMANNSches, 16

- Majorantensatz, 3
- Mittel
 - FEJÉRSche, 25

- Polynom
 - Grad, 10
 - LEGENDRESches, 13
 - trigonometrisches, 10

- Reihe
 - trigonometrische, 11

- Satz
 - DIRICHLET, JORDAN, 29
 - FEJÉR, 26
 - JACKSON, 45
 - Konvergenzkriterium, DINI, 22
 - LIPSCHITZ, 29
 - Lokalisierungsprinzip, RIEMANNSches, 20
 - WEIERSTRASSScher Approximations-, 1. & 2., 44

- Stetigkeit
 - HÖLDERSche, 23
 - LIPSCHITZsche, 23

- Summation, CESÀROSche, 25

- Ungleichung, BESSELSche, 16

- Wellengleichung, 48

- Zahlen, BERNOULLISche, 38
- Zeta-Funktion, 33