

EDM, vierte Woche

Erzeugende Funktionen

Rechenregeln

1. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$
2. $c \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} (c a_n) z^n$
3. $\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ (Konvolution)
4. $A(z) = 0$ neutrales Element der Addition (Nullelement)
5. $A(z) = 1$ neutrales Element der Multiplikation (Einselement)
6. Mit $b_0 = a_0^{-1}$, $b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$ folgt: $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ ist Inverses zu $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.
7. $z^m \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n > 0} a_n z^{n+m} = \sum_{n \geq 0} a_{n-m} z^n$ (Indextransformation)

Die wichtigsten Erzeugenden Funktionen sind

1. $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$
2. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$
3. $\sum_{n \geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$
4. $\sum_{n \geq 0} \binom{c}{n} z^n = (1+z)^c$
5. $\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = (1-z)^{-c}$
6. $\sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+n}}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$
8. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1+z)$