Optimierung für Nichtmathematiker

(für Master)

Vorlesung: Christoph Helmberg
Übung: Robert Csetnek, Oleg Wilfer

Ziele: Einführung in

- richtige Einordnung von Optimierungsproblemen
- Modellierungstechniken
- praktische Umsetzung mit Optimierungssoftware
- grobes Verständnis für Funktionsweise und Grenzen der Optimierungsverfahren

ET/IT, MB, WiWi $\rightarrow$ Anwendungen in allen drei Gebieten

Inhalt

1.1 Einleitung

Ein paar typische Beispiele für Optimierungsaufgaben:

- Losgrößenoptimierung: An welchen Tagen soll wieviel eines Produktes unter Berücksichtigung von Lagerkosten und Fixkosten pro Produktionstag erzeugt werden, damit die Bedarfe der nächsten Zeit abgedeckt sind?
- Hochregallager: Der Betreiber möchte ein Programm, das möglichst gut ein- und auslagert.
- Unit-Commitment: Energieerzeuger wollen ihre Kraftwerke so an- und ausschalten, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit der Verbrauch abgedeckt und der Gewinn möglichst groß ist.
- Parameterschätzung: für ein parametrisiertes mathematisches/ physikalisches Modell eines Objekts sollen die Parameter so bestimmt werden, dass das Modell möglichst gut das tatsächliche Verhalten des modellierten Objekts wiedergibt.
- Robotersteuerung: Wie sollen sich die Roboter bewegen, dass sie gegebene Arbeitszyklen möglichst schnell, mit geringem Energieaufwand und ohne Kollisionen erledigen?

Erste Fragen

1. Lässt sich die Aufgabe, oder zumindest die wichtigsten Aspekte, über den Computer automatisiert lösen?
2. Welche Lösungsmethodik steht mir zur Verfügung und kann ich die dafür einsetzen?
3. Wie beschreibe ich das Problem so, dass die Lösung durch den Computer auch etwas praxistaugliches liefert?

Wenn das geschafft ist:

4. Ist die Lösung schon bestmöglich, kann man mehr herausholen?
5. Wo/was muss man investieren/ändern, damit bessere Lösungen möglich werden?

Ziele dieser Vorlesung:
- Überblick über Lösungsverfahren und deren Arbeitsweise (2.)
- Anwendungsgebiete sowie Vor- und Nachteile der Verfahren (1.)
- Zusatzinformationen aus den Lösungen zur Beantwortung von (4./5.)
- in den Übungen: Wie arbeitet man konkret mit den Verfahren?
- nur nebenher: Worauf ist bei (3.) zu achten?

Ablauf bei Bearbeitung einer Aufgabe

Hauptschwierigkeit:
Der Computer tut nicht, was wir wollen, sondern was man ihm sagt! Er bearbeitet *exakt* das Problem, das man ihm stellt, und man sollte genau wissen, inwieweit sich dieses mit dem deckt, das man eigentlich lösen will.

$\rightarrow$ eine präzise mathematische Formulierung muss her!

Modellierung

Eine gute Modellbildung ist entscheidend für den Erfolg.
Viele Aufgaben sind zu komplex für eine exakte Lösung.
Dann muss die Modellierung die wesentlichsten Aspekte der Aufgabenstellung so herausarbeiten, dass das entstehende mathematische Optimierungs„problem" mit den besten verfügbaren Verfahren gerade noch (näherungsweise) lösbar ist.

Modellierung und Wahl des Verfahrens müssen gut aufeinander abgestimmt sein! $\rightarrow$ Vertrautheit mit den Verfahren ist essentiell!

Ablauf bei Bearbeitung einer Aufgabe

1. **Aufgabenstellung mit dem Praxispartner erörtern**
2. **Verbale „Problem“beschreibung (ohne Mathe!)**
   2.1 sprachlich exakte Begriffsbildung (Namen für die Objekte/Vorgänge)
   2.2 sprachlich exakte Beschreibung der technischen Nebenbedingungen
   2.3 sprachlich exakte Beschreibung der beeinflussbaren Größen
   2.4 sprachlich exakte Beschreibung der Ziele (für Lösung und Laufzeit!)
   2.5 sprachlich exakte Beschreibung der verfügbaren Daten
   2.6 mit 1. kontrollieren, falls nicht ok zurück zu 2., sonst weiter.
3. **Mathematische Modellbildung**
   3.1 Begründete grobe Entscheidung, welche Aspekte einbezogen werden
   3.2 mathematische Bezeichnungen für Objekte/Vorgänge/Entscheidungen
   3.3 Bedingungen und Ziele $\rightarrow$ (Un-)Gleichungen und Funktionen
   3.4 Abschätzung der Lösbarkeit mit einsetzbaren Verfahren, notfalls zu 3.1
   3.5 Modell verbal beschreiben, mit 1. kontrollieren, falls nicht ok zurück zu 2.
4. **Umsetzung mit einem Lösungsverfahren** (u.U. zurück zu 3.1)
5. **Test an realen Daten (!?) und Interpretation der Lösung** (zurück zu 1?)

Beispiel Losgrößenoptimierung: Problembeschreibung

Vereinfachende Annahmen:

- Es geht nur um *ein einzelnes* Produkt, es kann schadlos gelagert werden.
- Die Herstellung eines Stücks wird als ein einzelner Schritt betrachtet.
- Produktionsausfall oder Ausschuss wird nicht berücksichtigt (aber ...).

Bezeichnungen:

- Der Planungszeitraum umfasst eine geordnete Liste von Tagen.
- Pro Tag sind Produktionsmaximum und Bedarf in Stück gegeben.
- An jedem Tag wird eine festzulegende Tagesstückzahl neu produziert.
- Tage mit Tagesstückzahl echt größer als Null heißen Produktionstage.
- Die verfügbare Stückzahl eines Tages umfasst die Tagesstückzahl und die vor Produktionsbeginn vorhandene Anzahl.
- Abzug des Bedarfs von der verfügbaren Stückzahl ergibt die Lagerstückzahl.
- Je nach Tag fallen für Produktionstage Fixkosten, pro neu produziertem Stück Stückkosten und pro gelagertem Stück Lagerkosten an.

Einzuhaltende Nebenbedingungen (für jeden Tag):

- Die Tagesstückzahl ist kleiner gleich dem Produktionsmaximum.
- Verfügbare Stückzahl ist Vortages-Lagerstückzahl plus Tagesstückzahl.
- Die verfügbare Stückzahl ist größer gleich dem Bedarf.

Ziel: Kostenminimale Wahl der Tagesstückzahlen.

Wir müssen uns nun auf die (mathematische) Sprache einigen.
Um die Modellierung beginnen zu können, benötigen wir anfangs nur einfache logische Ausdrücke und Mengen.

Inhalt

1.2 Klassische Aussagenlogik

Eine (logische) Aussage ist wahr oder falsch, aber nicht beides.
Seien A und B Aussagen.

- Die Aussage "A und B" ($A \wedge B$) ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.
- Die Aussage "A oder B" ($A \vee B$) ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen von A, B wahr ist.
- Die Aussage "nicht A" ($\neg A$) ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Die Wahrheit der Einzelaussagen hänge nun von gewissen Parametern ab.

- Man sagt "A impliziert B" ($A \Rightarrow B$), wenn für jede erlaubte Parameterwahl A nur dann wahr sein kann (aber nicht sein muss), wenn schon B wahr ist (B ist notwendige Bedingung für A; A ist hinreichende Bedingung für B).
  Bsp: Taschenlampe gibt Licht $\Rightarrow$ Glühbirne ist intakt [$\not\Leftarrow$]
- Man sagt "A ist äquivalent zu B" ($A \Leftrightarrow B$), wenn für jede erlaubte Parameterwahl A genau dann wahr ist wenn auch B wahr ist (A ist hinreichend und notwendig für B, und umgekehrt).
  Bsp: Glühbirne gibt Licht $\Leftrightarrow$ durch die Glühbirne fließt Strom

Quantoren und Definitionen

Sei eine Aussage $A(p)$ potentiell von einem Parameter p abhängig.
Die Aussage $\exists p : A(p)$ ist genau dann wahr, wenn es mindestens ein wählbares p gibt, sodass $A(p)$ wahr ist.
Die Aussage $\forall p : A(p)$ ist genau dann wahr, wenn für jedes wählbare p auch $A(p)$ wahr ist.

Eine Definition führt einen Namen für ein Objekt oder eine Schreib-/Sprechweise als Ersatz für eine Aussage ein.

Wird ein Name für ein Objekt eingeführt, schreibt man gerne $:=$,

$$\text{z.B.,} \qquad 2 := 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 = 2 + 1 =: 3.$$

Führt man einen Namen für eine Aussage ein, verwendet man meist $:\Leftrightarrow$,

$$\text{z.B.,} \qquad i \text{ ist Nachfolger von (der natürlichen Zahl) } j \quad :\Leftrightarrow \quad i = j + 1.$$

Dabei steht das zu Definierende auf der Seite des Doppelpunkts.

Inhalt

1.3 Mengen

Eine Menge M enthält unterscheidbare Elemente $e \in M$, diese können durch Aufzählung oder Beschreibung angegeben werden.

$\mathbb{B} := \{0, 1\}$	$\mathbb{B}$ enthält die Elemente 0 und 1
$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$	offenes Intervall von $a \in \mathbb{R}$ bis $b \in \mathbb{R}$
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall von $a \in \mathbb{R}$ bis $b \in \mathbb{R}$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall von $a \in \mathbb{R}$ bis $b \in \mathbb{R}$

Weitere grundlegende Mengen sind

$\emptyset$	die leere Menge, sie enthält keine Elemente
$\mathbb{N}_0$	die Menge der natürlichen Zahlen mit Null
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen

Die Anzahl der Elemente (Kardinalität, Mächtigkeit) einer Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet. Ist $|M| \in \mathbb{N}_0$ (M hat endlich viele Elemente), heißt M endliche Menge.

Teilmengen und Operationen auf Mengen

Eine Menge K heißt Teilmenge einer Menge M ($K \subseteq M$), falls jedes Element von K auch Element von M ist, $K \subseteq M :\Leftrightarrow (e \in K \Rightarrow e \in M)$; gilt $K \subseteq M$ und $K \neq M$, heißt K echte Teilmenge von M (hier $K \subset M$),

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, $2^M := \{K \colon K \subseteq M\}$,

$$2^{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\,.$$

Der Schnitt zweier Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die in A und B enthalten sind, $A \cap B := \{e \colon e \in A \wedge e \in B\}$,

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}, \quad \mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}_0, \quad \{0,1\} \cap (0,1] = \{1\}.$$

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die in A oder in B (oder beiden) enthalten sind, $A \cup B := \{e \colon e \in A \vee e \in B\}$,

$$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 0\}, \quad \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-, \quad \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Für zwei Mengen A und B ist die Differenzmenge $A \setminus B$ erklärt durch $A \setminus B := \{a \in A \colon a \notin B\}$, z.B., $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}_-$, $\mathbb{Z}_- := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Mengenprodukt, Operationen mit Indexmengen

Das (kartesische) Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}. \qquad [\text{“,” ersetzt } \wedge]$$

Ein $n \in \mathbb{N}_0$ statt A oder B steht für $\{1, \ldots, n\}$, wobei $\{1, \ldots, 0\} := \emptyset$.

$$m \times n = \{(i, j) \colon i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\} \qquad [\text{meist } ij]$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und M eine Menge, dann schreiben wir

$$M^n := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ mal}} = \Big\{ \underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{\text{“}n\text{-Tupel”}} \colon a_i \in M, i \in \{1, \ldots, n\} \Big\}$$

$$\{0, 1\}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \qquad \{0, 1\}^0 = \{0, 1\}^\emptyset = \emptyset$$

Sei A_i, $i \in J$, eine Familie von Mengen mit Indexmenge J und M eine Menge,

$$\bigcap_{i \in J} A_i := \{a \colon (\forall i \in J : a \in A_i)\}, \qquad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (0, 1 + \tfrac{1}{k}) = (0, 1]$$

$$\bigcup_{i \in J} A_i := \{a \colon (\exists i \in J : a \in A_i)\}, \qquad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\tfrac{1}{k}, 1 - \tfrac{1}{k}] = (0, 1)$$

$$\bigotimes_{i \in J} A_i := \{J\text{-tupel } x \colon x_i \in A_i, i \in J\}, \qquad \bigotimes_{i \in \{\diamondsuit, \heartsuit\}} \{\clubsuit, \spadesuit\} = \{(x_\diamondsuit, x_\heartsuit) \colon \ldots\}$$

$$M^J := \bigotimes_{i \in J} M. \qquad \mathbb{R}^{\{1, \ldots, n\}} = \mathbb{R}^n$$

Das Summen- und das Produktzeichen

Das Summenzeichen $\sum$

Ist für eine Menge A eine (kommutative) Addition $+$ mit neutralem Element 0 erklärt und sind $a_1, \ldots, a_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}_0$) zu summieren,

$$\text{schreibt man } \sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \cdots + a_n \text{ und setzt } \sum_{i=1}^{0} a_i := 0.$$

Allgemeiner, für die Summe von $a_i \in A$ mit $i \in J$ für eine Indexmenge J

$$\text{schreibt man } \sum_{i \in J} a_i \text{ und setzt } \sum_{i \in \emptyset} a_i := 0$$

(für unendliches J nur, falls Ergebnis von Reihenfolge unabhängig!).

Das Produktzeichen $\prod$

Ist für eine Menge A eine (kommutative) Multiplikation $\cdot$ mit neutralem Element 1 erklärt und sind $a_1, \ldots, a_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}_0$) zu multiplizieren,

$$\text{schreibt man } \prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n \text{ und setzt } \prod_{i=1}^{0} a_i := 1.$$

Allgemeiner, für das Produkt von $a_i \in A$ mit $i \in J$ für eine Indexmenge J

$$\text{schreibt man } \prod_{i \in J} a_i \text{ und setzt } \prod_{i \in \emptyset} a_i := 1$$

(für unendliches J nur, falls Ergebnis von Reihenfolge unabhängig!).

Totalordnung, Maximum/Minimum, Supremum/Infimum

Auf einer Menge A ist eine Totalordnung $\leq$ erklärt, falls für $a, b, c \in A$

$$\begin{array}{rl} (i) & (a \leq b) \vee (b \leq a) \\ (ii) & (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Leftrightarrow a = b \\ (iii) & (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c \end{array}$$

z.B. ergibt das übliche $\leq$ eine Totalordnung für $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ aber nicht für $\mathbb{C}$.

Ist A totalgeordnet, so ist das Maximum bzw. das Minimum von $B \subseteq A$

$$\max B := \begin{cases} a \in B \text{ falls } \forall b \in B\colon a \geq b, \\ \text{sonst undefiniert,} \end{cases} \quad \min B := \begin{cases} a \in B \text{ falls } \forall b \in B\colon a \leq b, \\ \text{sonst undefiniert.} \end{cases}$$

z.B. $\max(0,1] = 1$, $\max[0,1)$ undef., $\max \mathbb{N}$ undef., $\min \mathbb{R}_+ = 0$.

Um für beliebiges $A \subseteq \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein Supremum und Infimum zu erklären, bezeichne hier $A^{\geq} := \{y \in \bar{\mathbb{R}} : y \geq a \text{ für } a \in A\}$ (analog $A^{\leq}$)

$$\sup A := \min\{a \in A^{\geq}\} \quad \text{und} \quad \inf A := \max\{a \in A^{\leq}\}$$

also $\sup(0,1] = 1 = \sup[0,1)$, $\sup \mathbb{N} = \infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Inhalt

1.4 Losgrößen: Namen im mathematischen Modell

Namen für grundlegende Objekte: [nur im LosGr Beispiel!]

Tage $D = \{1, \ldots, n_D\}$ mit $n_D \in \mathbb{N}$

(Jede Zahl sei einem Tag zugeordnet. Sie entsprechen nicht notwendig aufeinanderfolgenden realen Tagen, spätere Tage haben höhere Nummer.)

Namen und Bedeutung von Entscheidungsvariablen:

Tagesstückzahlen $x \in \mathbb{N}_0^D$ $[x = (x_1, \ldots, x_{n_D})]$

Produktionstage $y \in \{0, 1\}^D$ mit $y_i = 1 \Leftrightarrow x_i > 0$ für $i \in D$

Lagerstückzahlen $z \in \mathbb{N}_0^D$ [=verfügbar minus Bedarf]

Daten: (jeweils vorher berechnete, konstante Werte, die die Zuordnung von D zu realen Tagen berücksichtigen)

Bedarfe $b \in \mathbb{N}_0^D$

Fixkosten $c \in \mathbb{N}_0^D$

Stückkosten $d \in \mathbb{N}_0^D$

Lagerkosten $r \in \mathbb{N}_0^D$

Produktionsmaxima $p \in \mathbb{N}_0^D$

Anfangsbestand $z_0 \in \mathbb{N}_0$

Nächster Schritt: Nebenbedingungen und Zielfunktion ...

Inhalt

1.5 Funktionen

Eine Funktion $f\colon A \to B$ weist jedem Element einer Urbildmenge A genau ein Element aus einer Bildmenge B zu.

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto e^x\end{aligned} \quad \text{definiert } \exp(x) = e^x \quad \text{und} \quad \begin{aligned}\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{N}\\ x &\mapsto \max\{z \in \mathbb{Z}\colon z \leq x\}\end{aligned}$$

die *floor-function* $\lfloor x \rfloor$, die x die größte ganze Zahl kleiner gleich x zuweist. (Funktionsdefinition auch in einer Zeile möglich, $f\colon A \to B, a \mapsto f(a)$)

sup und inf sind Funktionen ($2^{\bar{\mathbb{R}}} \to \bar{\mathbb{R}}$), max und min nicht (warum?).

Das eingesetzte Element der Urbildmenge ist das Argument. Meint man die Funktion als eigenständiges Objekt, verwendet man statt des Arguments den Punkt wie in $f(\cdot)$ oder $\lfloor\cdot\rfloor$ oder schreibt nur den Namen f.

Wird das Infimum von $f\colon A \to \bar{\mathbb{R}}$ über einer Teilmenge $B \subseteq A$ gesucht, verwendet man gerne die Schreibweise

$$\inf_B f := \inf\{f(a)\colon a \in B\}.$$

$\inf_B$ kann man als Funktion auf Funktionen der Art $f\colon B \to \bar{\mathbb{R}}$ sehen ...

Mengen von Funktionen, Argmin/Argmax

Jede Funktion $f\colon A \to B$ ist gleichzeitig ein Element der Menge B^A:

$$\begin{aligned} v : \{1,\dots,n\} &\to \mathbb{R} \\ i &\mapsto v_i \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \text{ist auch} \quad v = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^{\{1,\dots,n\}} = \mathbb{R}^n,$$

und die Menge $(0,1)^{[0,1]}$ umfasst alle Funktionen $f\colon [0,1] \to (0,1)$.

Die minimierenden Argumente für beliebige Funktionen $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Argmin}_A \colon \bar{\mathbb{R}}^A &\to 2^A \\ f &\mapsto \{a \in A : f(a) = \inf\{f(b) : b \in A\}\} \end{aligned}$$

Für $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ (kurz $f(x) = x^2$) ist $\operatorname{Argmin}_{\mathbb{R}} f = \{0\}$,

für $\begin{aligned} f : (0,\infty) &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$ (kurz $f(x) = \frac{1}{x}$) ist $\operatorname{Argmin}_{(0,\infty)} f = \emptyset$.

Gleichbedeutend ist die Schreibweise $\operatorname{Argmin}_A f = \operatorname{Argmin}\{f(a)\colon a \in A\}$.
Existiert sicher ein eindeutiges min. Arg. für f über A ($|\operatorname{Argmin}_A f| = 1$), schreibt man dafür auch $\operatorname{argmin}_A f$ oder $\operatorname{argmin}\{f(a) : a \in A\}$.

Argmax und argmax werden analog definiert.

Eigenschaften von Funktionen

Für eine Menge A heißt $d\colon A^2 \to \mathbb{R}_+$ Abstand/Metrik, falls für $a, b, c \in A$

$$(i)\ d(a,b) = 0 \ \Leftrightarrow\ a = b \quad (ii)\ d(a,b) = d(b,a) \quad (iii)\ d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$

Das Paar (A, d) heißt dann metrischer Raum,
z.B. sind mit $d(a,b) = |a - b|$ $(\mathbb{N}, d)$, $(\mathbb{Z}, d)$, $(\mathbb{R}, d)$ metrische Räume.

Für $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ ist die ε-Kugel um x

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in A : d(y,x) \leq \varepsilon\}.$$

Eine Nachbarschaft/Umgebung von x enthält für ein $\varepsilon > 0$ ganz $B_\varepsilon(x)$.

Nur intuitiv:
Sind (A, d_A), (B, d_B) metrische Räume, dann heißt $f\colon A \to B$ stetig, wenn für kleine A-Nachbarschaften des Arguments der Funktionswert auch in der B-Nachbarschaft bleibt.
f heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$ auf $C \subseteq A$, falls

$$d_B(f(a), f(b)) \leq L \cdot d_A(a,b) \quad \forall a, b \in C.$$

Ist die Ableitung f' in jedem $a \in A$ erklärt, heißt f differenzierbar, ist f' stetig, heißt f stetig differenzierbar.
Ist f „oft genug“ stetig differenzierbar, nennt man f glatt.

Inhalt

1.6 Losgrößenmodell: Nebenbedingungen, Zielfunktion

Namen		Daten	
Tage	$D=\{1,\dots,n_D\}$	Bedarfe	$b\in\mathbb{N}_0^D$
Tagesstückzahlen	$x\in\mathbb{N}_0^D$	Fixkosten	$c\in\mathbb{N}_0^D$
Produktionstage	$y\in\{0,1\}^D$	Stückkosten	$d\in\mathbb{N}_0^D$
Lagerstückzahlen	$z\in\mathbb{N}_0^D$	Lagerkosten	$r\in\mathbb{N}_0^D$
		Produktionsmaxima	$p\in\mathbb{N}_0^D$
		Anfangsbestand	$z_0\in\mathbb{N}_0$

Nebenbedingungen: (über Funktionen $\mathbb{N}_0^D\times\{0,1\}^D\times\mathbb{N}_0^D\to\mathbb{R}$)
Für jeden Tag $i\in D$:

- Lagerstand konsistent mit Vortag, Produktion und Bedarf:
  $h_i(x,y,z):=z_i+b_i-x_i-z_{i-1}=0$ $\qquad[z_i=x_i+z_{i-1}-b_i]$
  ($z_i\geq 0$ erzwingt ausreichende Produktion: $b_i\leq x_i+z_{i-1}$)
- Es wird produziert $\Leftrightarrow$ es ist ein Produktionstag:
  $g_i(x,y,z):=x_i-p_iy_i\leq 0$ $\qquad[x_i\leq p_iy_i]$

Zielfunktion: Minimiere Stückkosten+Fixkosten+Lagerkosten
$f(x,y,z):=\sum_{i\in D}(d_ix_i+c_iy_i+r_iz_i)$

Gesamtmodell:

Minimiere	$f(x, y, z)$	Zielfunktion
unter	$h_i(x, y, z) = 0, \quad i \in D,$	Gleichungsnebenbed.
	$g_i(x, y, z) \leq 0, \quad i \in D,$	Ungleichungsnebenbed.
	$(x, y, z) \in \mathbb{N}_0^D \times \{0, 1\}^D \times \mathbb{N}_0^D$	Variablen, Grundmenge

Wie schwer ist dieses Optimierungsproblem zu lösen?

Nachteil:
Die Variablen sollen nur ganzzahlige Werte annehmen, alle Möglichkeiten auszuprobieren braucht zu lang, mathematisch ist es meist günstiger über kontinuierliche Gebiete bzw. stetige Funktionen zu optimieren.
$\rightarrow$ vereinfache Grundmenge vorerst zu $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^D \times [0, 1]^D \times \mathbb{R}_+^D$
(Behandlung der Ganzzahligkeit diskutieren wir erst viel später).

Vorteil:
Alle Funktionen f, g_i, h_i sind affin (linear+Konstante),
$\rightarrow$ Verfahren basierend auf linearer Algebra genügen
$\rightarrow$ besonders einfach und effizient, auch für sehr viele Variablen machbar!

Inhalt

1.7 Lineare Algebra (nur über $\mathbb{R}$ und endlichdimensional)

Eine Menge V mit "Addition" $+ : V \times V \to V$ und (Skalar-)Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ heißt Vektorraum (über $\mathbb{R}$), falls

(i) neutrale Elemente $\mathbf{0} \in V$ und 1: $\mathbf{0} + v = v + \mathbf{0}$ und $1v = v$ für $v \in V$,

(ii) zu $v \in V$ gibt es ein inverses Element $-v \in V$: $v + (-v) = \mathbf{0}$,

(iii) $u + v = v + u$ und $(u + v) + w = u + (v + w)$ für $u, v, w \in V$,

(iv) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$, $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$, $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$.

$(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ falls

(i) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $[\Rightarrow \|v\| \geq 0]$

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für $v, w \in V$,

(iii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$.

Bsp $V = \mathbb{R}^{\{\diamondsuit,\heartsuit\}}$: $v = \begin{bmatrix} v_\diamondsuit \\ v_\heartsuit \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} w_\diamondsuit \\ w_\heartsuit \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$3w - v = 3w + (-1)v = \begin{bmatrix} 3w_\diamondsuit - v_\diamondsuit \\ 3w_\heartsuit - v_\heartsuit \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bspe für Normen sind (für $v \in \mathbb{R}^{\{\diamondsuit,\heartsuit\}}$),

$$\|v\| = \sqrt{v_\diamondsuit^2 + v_\heartsuit^2} \text{ (euklidische) und } \|v\|_1 = |v_\diamondsuit| + |v_\heartsuit| \text{ (1-Norm)}.$$

In Zukunft erfolgt die Koordinatendarstellung von Vektoren (bezüglich einer gegebenen Basis) immer in "Spaltenform" (statt "Tupel").

Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Sei V ein Vektorraum. Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in V$ mit $k \in \mathbb{N}$ heißen linear unabhängig (l.u.), falls für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le k)$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^{(i)} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, k\},$$

sonst linear abhängig (l.a.). Sind sie l.u. und gilt für jedes $v^{(k+1)} \in V$, dass $v^{(1)}, \dots, v^{(k+1)}$ l.a. sind, bilden die k Vektoren eine Basis von V, die Dimension von V ist k und jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen, $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^{(i)}$.

$\rightarrow$ bzgl. Basis $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ hat v Koordinatendarstellung $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$.

Bsp. Vektorraum der Polynome vom Grad 2 (etwa $p(x) = 3 - 2x + 4x^2$): Eine Basis bilden die drei Polynome x^0, x^1, x^2

$p(x) = 3x^0 + (-2)x^1 + 4x^2$, Koeffizienten sind Koordinaten $p = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Die Koordinatendarstellung der Basisvektoren ist die kanonische Basis

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ von } \mathbb{R}^k.$$

Lineare Abbildungen, Matrizen

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$, eine Funktion $f\colon V \to W$ heißt lineare Abbildung oder linear, falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in V$

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \; [\in W].$$

Ist $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ eine Basis von V, und hat $v \in V$ Koordinaten $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, ist

$$f(v) = f(\textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_j v^{(j)}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v^{(j)}),$$

die Bilder $f(v^{(j)}) \in W$ beschreiben f vollständig.
Sei $w^{(1)}, \ldots, w^{(m)}$ eine Basis von W, $f(v^{(j)}) \in W$ habe Koordinaten $\begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{bmatrix}$,
dann sind die Koordinaten von $f(v) \in W$ bzgl. der $w^{(i)}$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{mn} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Die Matrix $B = [\beta_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschreibt f bzgl. Basen $v^{(j)}$ und $w^{(i)}$ exakt.
Die j-te Spalte $B_{\bullet,j}$ enthält die Koordinaten (bzgl. Basis $w^{(i)}$) von $f(v^{(j)})$.
Die i-te Zeile $B_{i,\bullet}$ beschreibt das Verhalten der $f(v^{(j)})$ in Richtung $w^{(i)}$.
Sind die gewählten Basen der Vektorräume V und W klar, identifiziert man V mit $\mathbb{R}^n$ und W mit $\mathbb{R}^m$, die Matrix B ist nun selbst die lineare Abbildung $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, v \mapsto w = Bv$ (jedes f ist so beschreibbar!).

Vektorraum der lin. Abbildungen, Matrixprodukt

Lineare Abb. bilden selbst einen Vektorraum: Für $f, g\colon V \to W$ linear sind

$$f+g\colon V \to W, v \mapsto f(v)+g(v) \quad \text{und} \quad \alpha f\colon V \to W, v \mapsto \alpha f(v) \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}$$

lineare Funktionen mit Nullabbildung als neutralem Element ($v \mapsto \mathbf{0}_W$).
Wähle Basen, identifiziere V mit $\mathbb{R}^n$, W mit $\mathbb{R}^m$, lin. Abb. mit $F, G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann ist $F + G := [F_{ij} + G_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\alpha F := [\alpha F_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, also beschreibt $\mathbb{R}^{m\times n}$ den Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Für $g\colon U \to V$ und $f\colon V \to W$ ist $f \circ g\colon U \to W, u \mapsto f(g(u))$ die Hintereinanderausführung. Sind f und g linear und F und G die Matrizen zu gemeinsam gewählten Basen $u^{(i)}$ $(1 \le i \le h)$, $v^{(i)}$ $(1 \le j \le n)$, $w^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$, ist $f \circ g$ linear und beschrieben durch das Matrixprodukt

$$F \cdot G\colon \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^m : u \to w = Mu = FGu \quad \text{mit} \quad M_{ij} := \textstyle\sum_{k=1}^{n} F_{ik} G_{kj},$$

$$\text{damit gilt:} \qquad M = [F\, G_{\bullet,1}, \ldots, F\, G_{\bullet,h}]$$

Die j-te Spalte $M_{\bullet,j}$ enthält die Koordinaten (bzgl. $w^{(i)}$) von $(f \circ g)(u^{(j)})$.
Das Matrixprodukt ist assoziativ, $(AB)C = A(BC)$,
im Allgmeinen (i.A.) aber nicht kommutativ, also i.A. $AB \neq BA$.

Lineare/affine Unterräume, Bild/Nullraum, Inverse

$U \subseteq V$ eines Vektorraums V heißt (linearer) Unterraum von W, falls

(i) $U \neq \emptyset$, (ii) $u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$, (iii) $u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in U$.

Jeder Unterraum ist selbst ein Vektorraum. [Bsp. $U = \{\mathbf{0}_W\}$. $\dim(U)$?]

$Y \subseteq V$ heißt affiner Unterraum von V, wenn es einen linearen Unterraum $U \subseteq V$ und $v \in V$ gibt mit $Y = v + U := \{v + u \colon u \in U\}$.

Für $f \colon V \to W$ linear ist das Bild $\mathcal{R}(f) := \{f(v) \colon v \in V\}$ Unterraum von W und der Kern oder Nullraum $\mathcal{N}(f) := \{v \colon f(v) = \mathbf{0}_W\}$ Unterraum von V.

Für $v \in V$ gilt $\forall u \in v + \mathcal{N}(f) \colon f(u) = f(v) + \mathbf{0}_W = f(v)$. Deswegen ist

$$\dim \mathcal{R}(f) = \dim V - \dim \mathcal{N}(f).$$

Sei $v^{(i)}$ eine Basis von V, dann ist $\mathcal{N}(f) = \{\mathbf{0}_V\} \Leftrightarrow f(v^{(i)})$ l.u. in W.

Ist $\mathcal{N}(f) = \{\mathbf{0}_V\}$, wird jedes $w \in \mathcal{R}(f)$ von genau einem $v \in V$ getroffen, und $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to V, w = \sum \alpha_i f(v^{(i)}) \mapsto v = \sum \alpha_i v^{(i)}$ ist linear.

Gilt $\mathcal{R}(f) = W$ und $\mathcal{N}(f) = \{\mathbf{0}_V\}$, ist f bijektiv mit inverser Abbildung f^{-1}.

Ist F die Matrix zu f, bezeichnet F^{-1} die Matrix zu f^{-1}. Mit $n = \dim V$ gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V \colon V \to V, v \mapsto v$ ist die Identität mit Matrixdarstellung

$$F^{-1}F = FF^{-1} = I \quad \text{wobei} \quad I = [e_1, \ldots, e_n], F^{-1}, F \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ist $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (“quadratisch”) invertierbar, heißt F regulär, sonst singulär.

Lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1+\cdots+\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad Ax=b$$

Der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum ist

$$\operatorname{span} A := \operatorname{span}\{A_{\bullet,i} : 1 \le i \le n\} := \{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i A_{\bullet,i} : x \in \mathbb{R}^n\} = \mathcal{R}(A),$$

das System ist genau dann lösbar wenn $b \in \mathcal{R}(A)$ (l.a. von den Spalten).
Der Rang von A ist die max. Anzahl l.u. Spalten von A, $\operatorname{Rang} A := \dim \mathcal{R}(A)$.

$$\text{System ist lösbar} \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Rang}[A,b] = \operatorname{Rang} A.$$

Das Addieren von Linearkombinationen von Gleichungszeilen zu anderen Zeilen verändert das System nicht. Für die Transponierte zu A,

$$A^T := \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \; [(A^T)_{ij} = A_{ji}] \text{ gilt } \operatorname{Rang}(A^T) = \operatorname{Rang} A.$$

Falls $\operatorname{Rang}(A) < m$, sind $m - \operatorname{Rang}(A)$ Zeilen ohne Lösungsänderung löschbar.

Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = m$, dann ist $n \geq m$, $b \in \mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A)$ und $Ax = b$ lösbar.

Für $n > m$ und eine Lösung $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ist auch jedes $x \in \bar{x} + \mathcal{N}(A)$ Lösung, die Lösungsmenge ist der affine Unterraum $\bar{x} + \mathcal{N}(A)$ mit $\dim = n - m$.

Notation: Für $B \in \{1, \dots, n\}^m$ sei $A_B := [A_{\bullet,B(1)}, \dots, A_{\bullet,B(m)}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$. $B \in \{1, \dots, n\}^m$ heißt Basis, falls A_B regulär ($\mathrm{Rang}\, A = m$) ist.

Fassen wir eine Basis B auch als Menge von Spaltenindices auf und definieren wir eine dazupassende Nichtbasis $N \in (\{1, \dots, n\} \setminus B)^{n-m}$ mit $B \cup N = \{1, \dots, n\}$ teilt sich das System in

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A_B x_B + A_N x_N = b \quad \Leftrightarrow \quad x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N).$$

Jede Wahl $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ erzwingt ein eindeutiges x_B zu einer gemeinsamen Lösung x von $Ax = b$.

Sei z.B. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung zu $x_N = \mathbf{0}_{n-m}$ ($x_B = A_B^{-1} b$), so bietet x_N eine Parametrisierung aller Lösungen des Lösungsraumes $\bar{x} + \mathcal{N}(A)$.

Algorithmisch: z.B. Gauß-Elimination bestimmt B und löst $x_B = A_B^{-1} b$.

Lineare Funktionale, Dualraum, Skalarprodukt

Ein lineares $f : V \to \mathbb{R}$ heißt lineares Funktional und mit V-Basis ist die Matrix $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Zeile $F = [F_{11}, \ldots, F_{1n}]$ (z.B. eines Systems).

Der Vektorraum der linearen Funktionale auf V heißt Dualraum zu V. Für $V = \mathbb{R}^n$ besteht der Dualraum aus den "Zeilenvektoren" $\mathbb{R}^n$,

$$\text{die Spalte } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ wird transponiert zu } c^T = [c_1, \ldots, c_n]\,.$$

Jedes lineare Funktional $c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto c(x)$ ist durch $c \in \mathbb{R}^n$ darstellbar über das

$$\text{Skalarprodukt} \qquad c^T x = [c_1, \ldots, c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i .$$

Für die euklidische Norm $\|v\| := (\sum_{i=1}^n v_i^2)^{\frac{1}{2}}$ für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$c^T x = \|c\| \|x\| \cos \alpha$$

wobei α der von c und x eingeschlossene Winkel (in der von c und x aufgespannten Ebene) ist.

Geometrische Interpretation des Skalarprodukts $c^T x$

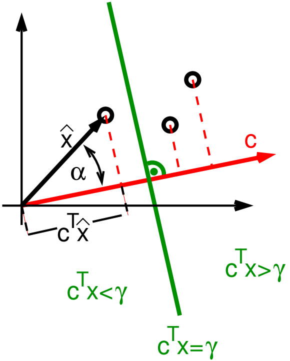
$c^T x = \|c\|\|x\| \cos\alpha$ mit α Winkel zw. c und x.

Für $\|c\| = 1$ ist (wie im Bild) $c^T x$ die Länge der Projektion von x auf die Gerade $\{\gamma c \colon \gamma \in \mathbb{R}\}$

Die Hyperebene $H_{c,\gamma} = \{x \colon c^T x = \gamma\}$ ist ein $n-1$ dimensionaler affiner Unterraum mit Normalvektor c.

$\{x \colon c^T x \leq \gamma\}$ ist der Halbraum aller Punkte, deren Projektion auf c kleiner gleich γ ist.

c ist Gradient der linearen Funktion $c^T x$ und zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.



Für $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$ ist Zeile i von $Ax = b$ gerade $a_i^T x = b_i$,

die Lösungsmenge sind alle Punkten, die auf allen Hyperebenen liegen,

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_{a_i,b_i}.$$

Inhalt

1.8 Losgrößenmodell: lineare Formulierung

Namen (Variable)		Daten (Konstante)	
Tage	$D = \{1, \dots, n_D\}$	Bedarfe	$b \in \mathbb{R}^D$
Tagesstückzahlen	$x \in \mathbb{R}^D_+$	Fixkosten	$c \in \mathbb{R}^D_+$
Produktionstage	$y \in [0,1]^D$	Stückkosten	$d \in \mathbb{R}^D_+$
Lagerstückzahlen	$z \in \mathbb{R}^D_+$	Lagerkosten	$r \in \mathbb{R}^D_+$
$(x, y, z) \to$	$\hat{x} \in \mathbb{R}^{3n_D}_+$	Produktionsmaxima	$p \in \mathbb{N}^D_0$
		Anfangsbestand	$z_0 = 0$ (in b_1)

Nebenbedingungen: Für jeden Tag $i \in D$ (nutze e_i nun n_D-dim):

- Lagerstand konsistent mit Vortag, Produktion und Bedarf:
  $h_i(x, y, z) := z_i + b_i - x_i - z_{i-1} = 0$
  $\to (a^{(i)})^T \hat{x} = b_i$ mit $(a^{(i)})^T = [e_i^T, \mathbf{0}_D^T, e_{i-1}^T - e_i^T]$ $(i \in D,\ i > 1)$
  und $(a^{(1)})^T = [e_1^T, \mathbf{0}_D^T, -e_1^T]$
- Es wird produziert $\Leftrightarrow$ es ist ein Produktionstag:
  $g_i(x, y, z) := x_i - p_i y_i \leq 0$ $[x_i \leq p_i y_i]$
  $\to (g^{(i)})^T \hat{x} \leq 0$ mit $(g^{(i)})^T = [e_i^T, -p_i e_i^T, \mathbf{0}_D^T]$ $(i \in D)$

Zielfunktion: Minimiere Stückkosten+Fixkosten+Lagerkosten
$f(x, y, z) := \sum_{i \in D} (d_i x_i + c_i y_i + r_i z_i)$
$\to \hat{c}^T \hat{x}$ mit $\hat{c}^T = [d^T, c^T, r^T]$

Gesamtmodell in linearer Formulierung

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & f(x,y,z) & \text{Zielfunktion,} \\ \text{unter} & h_i(x,y,z) = 0, \quad i \in D, & \text{Gleichungsnebenbed.,} \\ & g_i(x,y,z) \leq 0, \quad i \in D, & \text{Ungleichungsnebenbed.,} \\ & (x,y,z) \in \mathbb{N}_0^D \times \{0,1\}^D \times \mathbb{N}_0^D, & \text{Variablen, Grundmenge,} \end{array}$$

wird nun mit $A = \begin{bmatrix} (a^{(1)})^T \\ \vdots \\ (a^{(D)})^T \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} (g^{(1)})^T \\ \vdots \\ (g^{(D)})^T \end{bmatrix}$ vereinfacht zu

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & \hat{c}^T \hat{x} & \text{Zielfunktion,} \\ \text{unter} & A\hat{x} = b, & \text{Gleichungsnebenbed.,} \\ & G\hat{x} \leq \mathbf{0}_D, & \text{Ungleichungsnebenbed.,} \\ & y \leq \mathbf{1}_D, & \text{Ungleichungsnebenbed.,} \\ & \hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3n_D}, & \text{Variablen, Grundmenge } (\hat{x} \geq 0). \end{array}$$

"Lineares Optimierungsproblem", dafür existieren sehr gute Verfahren, es erzeugt aber i.A. noch keine ganzzahligen Lösungen!