Inhalt

2.1 Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge} \end{array}$$

Bei uns meist:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)

$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)

$\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

($f(x) = x - x^2$, $\mathcal{E} = \emptyset$, $g_1(x) = x^2 - 1$, $\mathcal{I} = \{1\}$, $\Omega = \mathbb{R}$)

(P2) $\min x - x^2$ s.t. $-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

(f, $\mathcal{E}$, Ω w.o., $g_1(x) = -1 - x$, $g_2(x) = x - 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2\}$)

(P3) $\min x - x^2$ s.t. $x \in [-1, 1]$ *($\mathcal{I} = \mathcal{E} = \emptyset$, $\Omega = [-1, 1]$)*

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$(P)\quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x)=0 & i\in\mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} \\ & g_i(x)\le 0 & i\in\mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} \\ & x\in\Omega & & \text{Grundmenge} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Restriktionen}$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x\in\Omega : h_i(x)=0, i\in\mathcal{E}, g_j(x)\le 0, j\in\mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P)=\emptyset$*, heißt das Problem* (P) *unzulässig.*
- $v(P) := \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x)$ *ist der Optimalwert von* (P)*.*
  Falls $v(P)=-\infty$ *heißt das Problem* (P) *unbeschränkt.*
  Für unzulässiges (P) *ist* $v(P)=\infty$*.*

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2\le 1,\ x\in\mathbb{R}$ $\mathcal{X}=[-1,1]$, $v(P1)=-2$,
ebenso (P2) $(-1\le x\le 1,\ x\in\mathbb{R})$ *und (P3)* $(x\in[-1,1])$*.*
(P4) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 = 1,\ x\in\mathbb{R}$ $\mathcal{X}=\{-1,1\}$, $v(P4)=-2$

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array}$$

Definition

- *$x \in \mathcal{X}(P)$ ... heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = v(P)$ heißt (globale) Optimallösung (also $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$)*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung $U(x)$ um x gibt mit $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$*

Beispiel

(P1-P3) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$
globale OL: $x \in \{-1\}$, *lokale OL:* $x \in \{-1, 1\}$
(P4) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$ *??? ebenso*

Beachte:
Optimalwert gibt es nur einen, Optimallösungen u.U. viele!

Oft wird Optimalwert/lösung mit einem $*$ gekennzeichnet, z.B.:

$$f^* = f(x^*) = \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Es bezeichnet

- $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x) : x \in \mathcal{X}\}$ die eindeutige Optimallösung (wenn wir schon wissen, dass es genau eine gibt),
- $\operatorname{Argmin}\{f(x) : x \in \mathcal{X}\}$ die Menge aller Optimallösungen (diese kann auch leer sein).

Optimal ist nicht steigerungsfähig,
„noch optimaler“ ist sinnlos und schlechter Sprachgebrauch!

Inhalt

2.2 Überblick über spezielle Klassen von Optimierungsproblemen

Verfahren gibt es nur für eingeschränkte Problemklassen,
diese unterscheiden sich nach

- den Eigenschaften der Funktionen f, g_i, h_i
- den Eigenschaften der Grundmenge Ω
- der Form, in der die Problemdaten gegeben sind
- den Ansprüchen an die Lösung (lokal/global/multikriteriell)

Verfahren/Löser für viele wichtige Problemklassen gibt es auf dem

NEOS Server for Optimization

Nichtlineare Optimierung (NonLinear Programming)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & f(x) & \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} \\ & x \in \Omega & \end{array}$$

f, g_i, h_i	„hinreichend glatt“, $C_1(\mathbb{R}^n)$ oder $C_2(\mathbb{R}^n)$, d.h., mindestens einmal oder zweimal stetig differenzierbar,
$\mathcal{E}$ und $\mathcal{I}$	endliche Mengen (unendlich: „Semiinfinite Opt.“) falls $\mathcal{E} = \mathcal{I} = \emptyset$: freie/unrestringierte Optimierung sonst restringierte Optimierung oder Opt. mit Nebenbed.
$\Omega = \mathbb{R}^n$	(meist)
Ziel:	lokales Optimum (aber oft schon Zulässigkeit schwer!)
Anw.:	Optimalsteuerung, Shape Optimization, Parameterschätzung (nichtlin.), Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, . . .
Verf.:	für lokal gute Konvergenz: Newton, Quasinewton, . . . zur Suche lokaler Mulden: Line-Search, Trust-Region, CG, . . .
Input:	Unterroutinen für Funktionswert, Gradient, (Hessematrix)
Größe :	einige 100 bis einige 1000 Variablen (mehr bei spez. Struktur)

Konvexe Optimierung (Convex Optimization)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{unter} & Ax = b \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & x \in \mathcal{C} \end{array}$$

f, g_i	konvexe Funktionen
$Ax = b$	nur lineare Gleichungsnebenbedingungen!
	falls f, g_i glatt $\rightarrow$ smooth convex opt.
	falls f, g_i nicht notw. diffb. $\rightarrow$ nonsmooth convex opt.
$\mathcal{I}$	endliche Menge
$\mathcal{C}$	„einfache“ konvexe Menge (Box[=Intervall], $\mathbb{R}^n$, ...)

Ziel:	globales Optimum
Anw.:	Portfolio Design, Experimental Design,
	Optimalsteuerung, Signal Processing,
	Berechnung von Schranken für nichtlineare Probleme, ...
Verf.:	smooth: Newton, Quasinewton, ...
	nonsmooth: Subgradienten-, Bündel-Verfahren
Input:	Unterroutinen für Funktionswert, (Sub)Gradient, (Hessematrix)
Größe :	einige 100 bis einige 10000 Var. (mehr bei spez. Struktur)

Konvexe Opt. mit Struktur (Structured Convex Opt.)

Minimiere	$q(x)$
unter	$Ax = b$
	$x \in \mathcal{K}$

$q(\cdot)$	lineare (affine) oder konvex-quadratische Zielfunktion
	$q(x) = c^T x$ ($+\frac{1}{2}x^T Qx$ mit Q symmetrisch positiv semidefinit)
$Ax = b$	lineare Gleichungs- oder auch Ungleichungsnebenbedingungen
$\mathcal{K}$	konvexe Kegel spezieller Struktur
	q linear, $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$: Lineare Opt. (Linear Programming)
	q linear, $\mathcal{K} = \mathcal{Q}^n_+$: Second Order Cone Opt. (SOCP)
	q linear, $\mathcal{K} = S^n_+$: Semidefinite Opt. (SemiDefnite P.)
	q quadrat., $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$: (Konvexe) Quadratische Opt. (QP)
Ziel:	globales Optimum in „kurzer“ Zeit
Anw.:	Portfolio Design, Experimental Design,
	Optimalsteuerung, Signal Processing,
	Berechnung von Schranken für ganzz. Probleme, ...
Verf.:	LP, SOCP, SDP, QP: Innere-Punkte-Verf. (Newton)
	LP: Simplex
Input:	Koeffizienten der Matrizen und Vektoren (evtl. Kegeltyp)
Größe :	einige 1000 bis Millionen Variablen

Ganzzahlige Optimierung (Integer Programming)

Minimiere	$c^T x$
unter	$Ax \leq b$
	$x \in \mathbb{Z}^n$

$c^T x$	lineare Zielfunktion
$Ax \leq b$	lineare Gleichungs- oder auch Ungleichungsnebenbedingungen
$x \in \mathbb{Z}^n$	nur ganzzahlige Lösungen! verwandte Varianten:
	Binary Integer P.: $x \in \{0,1\}^n$ (≈ kombinatorische Opt.)
	Mixed Integer P.: $x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$
	Mixed Integer NonLinear P.: f, g_i, h_i nichtlin.
Ziel:	sehr problemabhängig (meist NP-schwer), „gute“ Lösung mit Gütegarantie
Anw.:	Probleme mit Entscheidungskomponenten, z.B., Flüsse in Netzwerken, Zuweisungs-, Transport-, Standortprobleme, VLSI-Design, Basisauswahl, ...
Verf.:	konvexe/lineare Relaxation und lokale Suche/Rundungsheuristiken, exakte Lösung durch „Branch and Bound“ (effiz. Enumerieren), für sehr spezielle Probleme: exakte Algorithmen
Input:	von Koeffizienten der Matrizen bis hin zu Struktur-nutzenden Zusatzroutinen
Größe :	extrem problemabhängig, von unter 100 bis zu Millionen

Globale Optimierung (Global Optimization)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & f(x) & \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} \\ & x \in \Omega & \end{array}$$

f, g_i, h_i	hinreichend glatt von bekannter Struktur (z.B. Polynome) so dass auf Intervallen Unterschätzer konstruierbar sind
$\mathcal{E}$ und $\mathcal{I}$	(kleine) endliche Mengen
Ω	„einfache“ konvexe Menge (Box)

Ziel:	globales Optimum (!!! i.A. zu schwer, nur sehr kleine Dimension!!!)
Anw.:	kleine nichtlineare Optimalsteuerungsprobleme ...
Verf.:	Branch and Bound: pro Intervall der Unterteilung untere Schranken durch Lösung konvexer Relaxation und obere Schranken durch NLP-Löser
Input:	algebraische Beschreibung der Funktionen
Größe :	etwa 10-30 Variable (je nach spez. Struktur u.U. auch mehr)

Einige weitere Klassen/Forschungsgebiete

Meist durch spezielle Anwendungsforderungen motiviert:

Multikriterielle Optimierung (Mehrziel-Opt.):

- Bspe: Portfolio soll Gewinn maximieren und Risiko minimieren, Auto soll möglichst schnell mit möglichst wenig Treibstoff fahren, größte Stabilität bei geringstem Materialeinsatz, etc.
- Darstellung konkurrierender Ziele durch $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine durch einen spitzen Kegel induzierte Partialordnung auf $\mathbb{R}^m$.
- „Pareto-optimale Lösung“: bzgl. Partialordnung nicht verbesserbar
- Für m klein, Berechnung der „Paretofront“, sonst Rückführung auf Standardverf. durch Skalarisierung (gewichtete Linearkombination) oder lexikographisches Optimieren mittels neuer Nebenbedingungen

Ableitungsfreie Optimierung (derivative-free opt.):

- Es ist jeweils nur $f(x)$ bestimmbar (wird durch Simulation, Messung, Bohrung, etc. ermittelt), aber keine Ableitungsinformation
- $f(x)$ billig: numerisches Differenzieren oder Verf. von Nelder-Mead
- $f(x)$ teuer: Modellerstellende Verfahren (Kriging, Powell, . . .)

Einige weitere Klassen/Forschungsgebiete

Stochastische Optimierung:

- Statistische Daten in Entscheidungen einbeziehen: Ein-/Ausschalten von Kraftwerken für stochstisches Verbrauchsmodell, Portfoliooptimierung für stochastische Finanzmodelle, Logistik-Optimierung nach stochastischem Bedarfsmodell
- oft Einteilung in gewichtete mehrstufige Szenarien, rekursives Lösen mit Standardverfahren

Robuste Optimierung:

- Gegen Datenunsicherheit, Mindestanforderungen, oder Ungenauigkeiten in der realen Umsetzung absichern: leichteste Brücke für unterschiedliche Lasten, Entwurf von Antennen-Arrays, Mindestproduktionskapazitäten bei Maschinenausfällen
- geschickte Modellierung erlaubt oft den Einsatz von Standardverfahren