

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

---

Fakultät für Mathematik

Professur Algorithmische und Diskrete Mathematik

# Diplomarbeit

Einbettung von Graphen mit geringer Verzerrung

Jens Fankhänel

Betreuer: Prof. Dr. C. Helmberg

**Jens Fankhänel**

Einbettung von Graphen mit geringer Verzerrung

Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik

Technische Universität Chemnitz

# Inhaltsverzeichnis

<b>0 Ausführliche Aufgabenstellung</b>	<b>5</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2 Begriffe und Notationen</b>	<b>9</b>
2.1 Graphen . . . . .	9
2.2 Distanzräume und Metriken . . . . .	12
2.3 Einbettungen metrischer Räume . . . . .	14
2.4 Vektorräume . . . . .	15
2.5 Einbettungen in Vektorräume . . . . .	16
2.6 Abschätzungen für das Wachstum einer Funktion . . . . .	17
2.7 Matrizen und Kegel . . . . .	18
2.8 Einige Graphenklassen . . . . .	20
2.9 Distanzreguläre Graphen . . . . .	20
2.10 Minoren . . . . .	21
2.11 Logarithmen . . . . .	21
2.12 Die Definition der Expanderkonstanten . . . . .	21
2.13 Eigenschaften der Expander-Graphenfamilien . . . . .	22
2.14 Markov-Ketten und Erwartungswerte . . . . .	23
<b>3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung</b>	<b>24</b>
3.1 Einbettungen in den $\ell_\infty$ . . . . .	24
3.2 Allgemeine Ergebnisse verschiedener Autoren zu Einbettungen in Banachräume . . . . .	25
3.3 Einfache Abschätzungen für die Operatornormen $\ \Lambda\ $ , $\ \Lambda'\ $ und $\ \Lambda''\ $ . . . . .	29
3.4 Dimensionsreduktion ohne Vergrößerung der Verzerrung . . . . .	31
3.5 Berechnung einer optimalen Einbettung in den euklidischen Raum . . . . .	32
3.6 Das duale Programm . . . . .	33
3.7 Einbettung distanzregulärer Graphen in den euklidischen Raum . . . . .	37
3.8 Einbettung weiterer Graphenklassen in den euklidischen Raum . . . . .	39
3.9 Einbettungen in den $\ell_1$ . . . . .	41
3.10 Einbettung einiger Graphenklassen in den $\ell_1$ . . . . .	45
3.11 Einbettung einer endlichen Punktmenge eines Banachraumes in einen anderen Banachraum . . . . .	47
<b>4 Einbettungen in Banachräume mit kleiner Dimension</b>	<b>49</b>
4.1 Das Johnson-Lindenstrauss-Lemma . . . . .	49
4.2 Weitere Ergebnisse . . . . .	51
<b>5 Graphen mit großer Tailenweite</b>	<b>54</b>
5.1 Einige Eigenschaften von Graphen mit großer Tailenweite . . . . .	54
5.2 Abschätzungen für die Dimension einer Einbettung eines Graphen mit großer Tailenweite . . . . .	55
5.3 Abschätzungen für die Verzerrung einer Einbettung eines Graphen mit großer Tailenweite . . . . .	57

*Inhaltsverzeichnis*

5.4	Vergleich der Abschätzungen mit allgemeinen Resultaten anderer Autoren	59
5.5	Konstruktion regulärer Graphen mit großer Tailleweite . . . . .	59
5.6	Algebraische Eigenschaften von Graphen mit großer Tailleweite . . . . .	61
5.7	Optimale Einbettungen von Graphen mit großer Tailleweite in den $\ell_2$ .	61
5.8	Optimale Einbettungen von Graphen mit großer Tailleweite aus einer Kantenexpander- Graphenfamilie in den $\ell_1$ . . . . .	63
5.9	Weitere Vergleiche mit einem eigenen Resultat . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den <math>\ell_2</math> und in den <math>\ell_1</math></b>	<b>66</b>
6.1	Ein einfacher Ansatz für den euklidischen Raum . . . . .	66
6.2	Erhaltung aller Kantenlängen . . . . .	69
6.3	Vergleich der $\ell_2$ -Einbettungen mit den Resultaten anderer Autoren . . .	73
6.4	Vergleich mit semidefiniter Programmierung . . . . .	74
6.5	Einbettungen beliebig gewichteter Kreise in den Raum $\ell_1$ mit geringer Verzerrung . . . . .	75
6.6	Einbettungen beliebig gewichteter Kreise in den Raum $\ell_1$ mit kleiner Dimension . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Einbettung eines gleichgewichteten vollständigen Graphen in die hyperboli- sche Ebene</b>	<b>82</b>
<b>8</b>	<b>Einbettung von Graphen in Graphen</b>	<b>85</b>
<b>9</b>	<b>Ausblick</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>Hinweise zu den Programmen auf CD-ROM</b>	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Weitere Graphiken zur Einbettung gewichteter Kreise in den euklidischen Raum</b>	<b>89</b>
<b>C</b>	<b>Die wichtigsten Notationen im Überblick</b>	<b>91</b>
	Literaturverzeichnis	93

# 0 Ausführliche Aufgabenstellung

Bettet man die Knotenmenge eines Graphen in einen metrischen Raum ein, so hat man zwei unterschiedliche Metriken auf dieser Knotenmenge - zum einen die Abstandsmetrik des Graphen, zum anderen die Metrik des Raumes. Die Einbettung verzerrt also die Abstandsverhältnisse der Graphenmetrik zu jenen in der Metrik des einbettenden Raumes.

Ziel der Diplomarbeit ist die Untersuchung von Schranken für die kleinstmögliche Verzerrung von Einbettungen von Graphen in den  $\mathbb{R}^n$ . Hierzu sind geeignete Präzisierungen des Begriffes „Verzerrung“ vorzunehmen.

Eine Übersicht über bisher bekannte Schranken soll gegeben und möglichst durch einen eigenen Beitrag abgerundet werden. Dabei ist besonderes Augenmerk auf Graphen mit großer Tailenweite und hohem Minimalgrad zu legen.

## Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. C. Helmberg und Herrn Dr. F. Göring für ihre Hinweise zur Verbesserung meiner Diplomarbeit und zur Behebung von Fehlern.

# 1 Einleitung

Seit ungefähr 80 Jahren wird die Einbettung metrischer Räume in andere metrische Räume mathematisch untersucht. Da endliche metrische Räume äquivalent zu endlichen, positiv gewichteten Graphen sind, besteht kein wesentlicher Unterschied zur Einbettung von Graphen in metrische Räume. Viele wissenschaftliche Arbeiten der letzten 30 Jahre verwenden eher die Notation der Graphen, knüpfen aber im Grunde an die früheren Ergebnisse der Einbettung metrischer Räume an.

Bettet man einen Graphen in einen bestimmten metrischen Raum ein, so kann man nicht erwarten, dass die Distanzen aller Knotenpaare erhalten bleiben. Das gilt - abgesehen von  $\ell_\infty$ -Räumen - selbst dann, wenn der einbettende Raum ein hochdimensionaler Vektorraum ist. In vielen Fällen kommt man um eine Verzerrung der Distanzen nicht herum. Wissenschaftler aus verschiedenen Gebieten der Mathematik waren und sind mit dem Forschungszweig der Einbettung von Graphen oder metrischen Räumen beschäftigt. Ihre Arbeiten umfassen Funktionalanalysis, Graphentheorie, Kombinatorik, lineare Algebra, Stochastik und Topologie. Mathematiker aus den meisten dieser verschiedenen Gebiete betrachten die Einbettung von Graphen aus ihren jeweiligen Blickwinkeln und mit den ihnen vertrauten Methoden. Viele wissenschaftliche Arbeiten geben aus theoretischen Überlegungen untere und obere Schranken für die Verzerrung einer optimalen Einbettung oder auch für die Dimension des einbettenden Raumes an. Mitunter beschränkt sich der Autor dabei auf bestimmte Graphenklassen. Andere Arbeiten bestimmen die optimale Einbettung bestimmter Graphenklassen oder decken Zusammenhänge zwischen der optimalen Verzerrung und anderen Eigenschaften der einzubettenden Graphen auf.

Aber nicht nur die wissenschaftlichen Beiträge zur Einbettung von Graphen sind vielfältig, sondern sie hat auch verschiedene Anwendungsgebiete. Hier sollen nur einige von ihnen erwähnt werden:

*Statistische Datenanalyse:* Hat man eine Menge statistischer Datenpunkte gegeben, so möchte man sie so gruppieren, dass „nahe beieinander liegende“ Datenpunkte derselben Gruppe und „weit entfernte“ Datenpunkte unterschiedlichen Gruppen zugeordnet werden. Die Einbettung der Datenpunktmenge in einen Vektorraum kann das Finden einer „günstigen“ Gruppierung erleichtern. Mehr Informationen zu diesem Thema findet man in [77] und [67].

*Schnittprobleme:* Die Bestimmung eines minimalen Schnitts in einem Mehrgüter-Netzwerk ist ein NP-schweres Problem, weshalb man keine effiziente Lösung erwarten kann. Darum ist man im Allgemeinen mit einer Approximation zufrieden. Andererseits ist es möglich, einen maximalen Mehrgüter-Fluss effizient zu berechnen. Die Einbettung des dem Netzwerk zugrunde liegenden Graphen in einen Vektorraum, der mit der Manhattannorm ausgestattet ist, liefert eine obere Schranke für das Verhältnis zwischen dem minimalen Schnitt und dem maximalen Fluss. Im Abschnitt 3.9 dieser Arbeit ist mehr über dieses Thema zu lesen.

*Separierungsprobleme:* Das Knotenseparations-Problem für einen Graphen kann wie folgt formuliert werden: Finde einen minimalen Knotenseparator, so dass die separierten Knotenmengen gleich groß sind. Dieses Problem ist NP-vollständig, weshalb man keine effiziente Lösung erwarten kann. Aber die Einbettung des Graphen in einen Vektorraum ermöglicht eine Approximation dieses Problems (siehe [67]). Das folgende Beispiel ist eine praktische technische Anwendung des Knotenseparations-Problems.

*VLSI-Design:* Das Problem ist, die Bauelemente auf einem Chip so anzuordnen, dass alle Bauelemente auf den Chip passen und die Längen der Verbindungswege minimiert

## 1 Einleitung

werden. Der Chip wird als Graph modelliert, wobei die Knoten den Bauelementen und die Kanten den Verbindungen zwischen den Bauelementen entsprechen. Für diesen Graphen wird ein Knotenseparations-Problem gelöst. Das Gleiche tut man rekursiv für die separierten Knotenmengen und den Separator (siehe [90]).

In Kapitel 2 dieser Arbeit werden wichtige Begriffe erklärt, darunter auch die bereits erwähnten Begriffe der Einbettung sowie der Verzerrung. In den Kapiteln 3 und 4 werden Ergebnisse anderer Autoren zu den Einbettungen von Graphen zusammengefasst. Das Kapitel 5 ist besonders den Graphen mit großer Tailenweite gewidmet. Innerhalb dieses Kapitels, in den Abschnitten 5.2 und 5.3 stelle ich auch das wichtigste eigene Ergebnis im Rahmen dieser Diplomarbeit vor. Danach beschreibe ich in den Kapiteln 6 und 7 weitere eigene Resultate. In Kapitel 8 werden Einbettungen von Graphen in Graphen kurz angesprochen, und Kapitel 9 enthält einen kurzen Ausblick.



## 2 Begriffe und Notationen

### 2.1 Graphen

In dieser Arbeit geht es um gewichtete Graphen. Dabei handelt es sich um geordnete Tripel  $G = (V, E, w)$ , wobei  $V = V(G)$  die Menge der *Knoten* (oder *Ecken*),  $E = E(G)$  die Menge der *Kanten* und  $w$  eine Funktion über der Menge der Kanten in die Menge  $\mathbb{R}_+$  der positiven reellen Zahlen ist. Eine Kante  $e \in E(G)$  ist eine zweielementige Teilmenge der Knotenmenge  $V(G)$ .  $w = w(E)$  nennt man eine *Gewichts-* oder *Längenfunktion*. Die einzelnen Funktionswerte  $w(e)$  ( $e \in E$ ) nennt man das *Gewicht* oder die *Länge* einer Kante.

Man sagt, die Kante  $e = \{u, v\}$  *verbindet* die Knoten  $u, v \in V$ . Zwei Knoten heißen *benachbart* oder *adjazent*, falls sie durch eine Kante verbunden sind. Ein Knoten  $v \in V$  und eine Kante  $e \in E$  heißen *inzident*, falls  $v \in e$ . Der *Grad*  $\vartheta(v)$  (oder die *Valenz*) eines Knotens  $v \in V$  ist die Anzahl der mit ihm inzidenten Kanten.

In dieser Arbeit werden nur echt positive Kantengewichte zugelassen und, mit Ausnahme des Abschnitts 5.5, nur endliche Graphen (das heißt Graphen mit endlicher Knoten- und Kantenzahl) betrachtet. Ein Graph wird auch kurz mit  $G = (V, E)$  bezeichnet, wenn die Gewichtsfunktion keine Rolle spielt oder wenn alle Kantengewichte 1 sind. Ein Graph  $G = (V, E)$  hat den *Minimalgrad*  $\delta(G)$ , falls  $\vartheta(v) \geq \delta(G) \quad \forall v \in V$  und es einen Knoten  $u \in V$  gibt mit  $\vartheta(u) = \delta(G)$ .  $G$  hat den *Maximalgrad*  $\Delta(G)$ , falls  $\vartheta(v) \leq \Delta(G) \quad \forall v \in V$  und es einen Knoten  $\tilde{u} \in V$  gibt mit  $\vartheta(\tilde{u}) = \Delta(G)$ . Der durchschnittliche Knotengrad  $\tilde{\Delta}(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist das arithmetische Mittel seiner Knotengrade. Offensichtlich gilt:

$$2 \cdot |E| = \tilde{\Delta}(G) \cdot |V| \tag{2.1}$$

**Beweis:**  $\tilde{\Delta}(G) \cdot |V|$  ist die Summe aller Knotengrade. Dabei wird jede Kante genau zweimal gezählt. ■

Die folgenden Definitionen sind an [61] angelehnt:

**Definition 2.1** *Ein Teilgraph eines Graphen  $G = (V(G), E(G))$  ist ein Graph  $H = (V(H), E(H))$  mit  $V(H) \subseteq V(G)$  und  $E(H) \subseteq E(G)$ . Man sagt auch:  $G$  enthält einen Teilgraphen  $H$ . Man nennt  $H$  einen induzierten Teilgraphen von  $G$ , wenn  $H$  ein Teilgraph von  $G$  ist und  $E(H) = \{\{x, y\} \in E(G) : x, y \in V(H)\}$ . Dieses  $H$  ist der von  $V(H)$  induzierte Teilgraph von  $G$ . Dafür schreibt man auch  $H = G[V(H)]$ .*

**Definition 2.2** *Sei  $G$  ein Graph. Eine Kantenfolge  $W$  in  $G$  ist eine Folge  $(v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$ , wobei  $k \geq 0$ ,  $v_i \in V(G)$  für  $i = 1, \dots, k+1$  und  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$  für  $i = 1, \dots, k$ .  $v_1$  und  $v_{k+1}$  heißen die Endknoten der Kantenfolge. Gilt zusätzlich  $e_i \neq e_j$  für alle  $1 \leq i < j \leq k$ , so heißt  $W$  ein Spaziergang in  $G$ . Gilt auch*

## 2 Begriffe und Notationen

noch  $v_1 = v_{k+1}$ , so heißt der Spaziergang  $W$  geschlossen.

**Definition 2.3** Ein Weg ist ein Graph  $P = (\{v_1, \dots, v_{k+1}\}, \{e_1, \dots, e_k\})$  mit der Eigenschaft, dass  $v_i \neq v_j$  für  $1 \leq i < j \leq k+1$  und die Folge  $(v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$  ein Spaziergang ist. Es wird  $P$  auch ein Weg von  $v_1$  nach oder zu  $v_{k+1}$  oder auch ein  $v_1$ - $v_{k+1}$ -Weg genannt. Die Knoten  $v_2, \dots, v_k$  sind die inneren Knoten von  $P$ .

Ein Kreis ist ein nichtleerer Graph  $(\{v_1, \dots, v_k\}, \{e_1, \dots, e_k\})$  mit den Eigenschaften, dass die Folge  $(v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k, v_1)$  ein (geschlossener) Spaziergang mit  $v_i \neq v_j$  für  $1 \leq i < j \leq k$  und  $k \geq 3$  ist.

Ist ein Weg oder Kreis ein Teilgraph von  $G$ , so spricht man von einem Weg oder Kreis in  $G$ .

Der Kreis mit  $m$  Kanten wird auch mit  $C_m$  bezeichnet.

Die Länge eines Weges ist in dieser Arbeit die Summe der Längen seiner Kanten.

**Definition 2.4** Die Länge  $\omega(W)$  einer Kantenfolge  $W = (v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k+1})$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  definiert man durch 
$$\omega(W) = \sum_{i=1}^k w(e_i).$$

Eine Kantenfolge  $\tilde{W}$  mit den Endknoten  $v_1, v_{k+1} \in V(G)$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  hat minimale Länge, wenn für alle Kantenfolgen  $W$  mit den Endknoten  $v_1$  und  $v_{k+1}$  im Graphen  $G$  gilt:  $\omega(W) \geq \omega(\tilde{W})$ .

**Definition 2.5** Für  $\tilde{E} \subseteq E(G)$  setzt man 
$$w(\tilde{E}) := \sum_{e \in \tilde{E}} w(e).$$

Man setzt  $\text{dist}_G(u, v) = \infty$ , falls es keinen  $u$ - $v$ -Weg im Graphen  $G$  gibt. Anderenfalls bezeichnet  $\text{dist}_G(u, v)$  den minimalen Wert von  $w(E(P))$  über alle  $u$ - $v$ -Wege  $P$  in  $G$ .

$\text{dist}_G(u, v)$  ist die Länge eines kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$  und wird auch Distanz der Knoten  $u$  und  $v$  genannt. Für jeden Graphen  $G = (V, E, w)$  ist damit eine Funktion  $\text{dist}_G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  definiert, die Distanzfunktion genannt wird. Diese Funktion ist offensichtlich symmetrisch, das heißt, es gilt:  $\text{dist}_G(u, v) = \text{dist}_G(v, u) \quad \forall u, v \in V(G)$ .

**Beobachtung 2.6** Jede endliche Kantenfolge mit den Endknoten  $v_1, v_{k+1} \in V$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  enthält einen Spaziergang mit den Endknoten  $v_1$  und  $v_{k+1}$ , und jeder Spaziergang mit den Endknoten  $V \ni u_1 \neq u_{k+1} \in V$  enthält einen  $u_1$ - $u_{k+1}$ -Weg.

**Beweis:** Sei  $(v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k+1})$  eine endliche Kantenfolge in  $G = (V, E)$ . Falls  $e_i \neq e_j \quad \forall 1 \leq i < j \leq k$ , so ist die Kantenfolge ein Spaziergang.

Anderenfalls setze zunächst  $q := k$  und  $u_1 := v_1$ . Solange Indizes  $i, j$  mit  $1 \leq i < j \leq q$  und  $e_i = e_j$  existieren, werden bestimmte Knoten und Kanten aus der Kantenfolge entfernt, wobei jeweils zwei Fälle zu unterscheiden sind:

**1. Fall:**  $v_i = v_j$ . Entferne  $v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, e_{j-1}$  aus der Kantenfolge. Setze  $v_a := v_{a+j-i}$ ,  $e_a := e_{a+j-i} \quad \forall a \in \{i, i+1, \dots, q-j+i\}$  und  $q := q-j+i$ .

**2. Fall:**  $v_{i+1} = v_j$ . Entferne  $v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_j, e_j$  aus der Kantenfolge. Setze  $v_a := v_{a+j+1-i}$ ,  $e_a := e_{a+j+1-i} \quad \forall a \in \{i, i+1, \dots, q-j-1+i\}$  und  $q := q-j-1+i$ .

## 2 Begriffe und Notationen

Da in jedem solchen Schritt mindestens ein Knoten und mindestens eine Kante entfernt wird, erhalten wir nach endlich vielen Schritten einen Spaziergang mit den Endknoten  $u_1$  und  $v_{k+1}$ .

Sei nun  $(u_1, \tilde{e}_1, u_2, \dots, u_{k+1})$  ein Spaziergang in  $G$  mit  $u_1 \neq u_{k+1}$ . Falls  $u_i \neq u_j \quad \forall 1 \leq i < j \leq k$ , so ist der Spaziergang ein Weg.

Anderenfalls setze zunächst  $q := k$  und  $v_1 := u_1$ . Solange Indizes  $i, j$  mit  $1 \leq i < j \leq q$  und  $u_i = u_j$  existieren, entferne  $u_i, \tilde{e}_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, \tilde{e}_{j-1}$  aus dem Spaziergang. Setze  $u_a := u_{a+j-i}, \tilde{e}_a := \tilde{e}_{a+j-i} \quad \forall a \in \{i, i+1, \dots, q-j+i\}$  und  $q := q-j+i$ . Da in jedem solchen Schritt mindestens drei Knoten und mindestens drei Kanten entfernt werden, erhält man nach endlich vielen Schritten einen  $v_1$ - $u_{k+1}$ -Weg. ■

**Folgerung 2.7** *Eine Kantenfolge minimaler Länge mit den Endknoten  $u \neq v \in V$  in einem endlichen Graphen  $G = (V, E, w)$  mit positiven Kantenlängen ist ein kürzester  $u$ - $v$ -Weg.*

**Beweis:** Eine unendliche Kantenfolge in einem endlichen Graphen ist immer unendlich lang und kann damit nicht die minimale Länge haben. Sei nun eine kürzeste Kantenfolge mit den Endknoten  $u, v \in V$  gegeben. Nach Beobachtung 2.6 enthält diese Kantenfolge einen  $u$ - $v$ -Weg, der nicht länger sein kann als die Kantenfolge. Dabei ist die Länge der Kantenfolge nach dem Beweis der Beobachtung 2.6 genau dann minimal, wenn die Kantenfolge der Weg selbst ist. Jeder andere  $u$ - $v$ -Weg ist auch eine Kantenfolge mit den Endknoten  $u, v \in V$  und darum nicht kürzer als die gegebene Kantenfolge. ■

Unter einem *gleichgewichteten* Graphen versteht man den Graphen  $G = (V, E, w)$  mit  $w \equiv K$ , wobei  $K$  eine Konstante ist. Wenn in dieser Arbeit nichts anderes angegeben ist, soll  $K = 1$  sein. Es soll noch bemerkt werden, dass  $\text{dist}_G(u, v) > K$  ist, falls  $\{u, v\} \notin E$ .

**Definition 2.8** *Sei  $G$  ein Graph. Gibt es einen  $u$ - $v$ -Weg für alle  $u, v \in V(G)$ , so heißt  $G$  zusammenhängend; sonst heißt  $G$  unzusammenhängend. Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen sind seine Zusammenhangskomponenten.*

**Definition 2.9** *Ein zusammenhängender Graph ohne Kreise (als Teilgraph) heißt Baum. Ein Knoten vom Grad höchstens gleich eins in einem Baum heißt Blatt. Ein Graph ohne Kreise heißt Wald.*

Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind offensichtlich Bäume. Mit  $g(G)$  wird in dieser Arbeit die *Taillenweite* eines gleichgewichteten Graphen  $G = (V, E)$  bezeichnet. Nach [32] ist die Taillenweite die kleinste Anzahl der Kanten eines Kreises in einem Graphen  $G = (V, E)$ . Enthält ein Graph keinen Kreis, wird  $g(G) = \infty$  gesetzt. Der *Durchmesser* eines Graphen  $G = (V, E, w)$  ist die maximale Distanz zweier Knoten in  $G$ . Er wird mit  $\text{diam}(G)$  bezeichnet. Es gilt:

$$\text{diam}(G) \geq \text{dist}_G(u, v) \quad \forall u, v \in V(G).$$

Hier sind noch einige Definitionen nach [61]:

## 2 Begriffe und Notationen

**Definition 2.10** Sei  $G$  ein Graph und  $X, Y \subseteq V(G)$ .  
Man setzt  $E(X, Y) := \{\{x, y\} \in E(G) : x \in X \setminus Y, y \in Y \setminus X\}$ .

**Definition 2.11** Die Menge der Nachbarn von  $X \subseteq V$  ist  $\Gamma(X) := \{v \in V(G) \setminus X : E(X, \{v\}) \neq \emptyset\}$ .

**Definition 2.12** Ein Knoten mit Grad 0 heißt *isoliert*.  
Ein Graph, für den alle Knoten den Grad  $k$  haben, heißt *k-regulär*.

## 2.2 Distanzräume und Metriken

Mit  $|X|$  wird die Kardinalität einer endlichen Menge  $X$ , mit  $2^X$  die Potenzmenge der Menge  $X$  bezeichnet. Das Mengensystem aller zweielementigen Teilmengen einer Grundmenge  $X$  wird mit  $\binom{X}{2}$  bezeichnet.

Ein *Distanzraum* ist nach [31] ein geordnetes Paar  $(X, \rho)$ , das aus einer Grundmenge  $X$  und einer *Distanzfunktion*  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  besteht und folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} (D1) \quad & \rho(x, x) = 0 \quad \forall x \in X \\ (D2) \quad & \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Symmetrie}) \end{aligned}$$

In dieser Arbeit wird ein Distanzraum  $(X, \rho)$  mitunter auch nur mit  $X$  bezeichnet, wenn klar ist, welche Distanzfunktion zu diesem Raum gehört.

Eine symmetrische Funktion  $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  über einer endlichen Menge  $X$  mit  $f(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$  kann als ein Vektor mit  $\binom{|X|}{2}$  Komponenten geschrieben werden: Sei  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und  $k \in \{1, 2, \dots, \binom{n}{2}\}$ ; dann kann man die  $k$ -te Komponente von  $f$  eindeutig festlegen:

$$\begin{aligned} & f_k = f(x_i, x_j) \\ \text{mit} \quad & 1 \leq i < j \leq n \\ \text{und} \quad & k = \binom{j-1}{2} + i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Umgekehrt beschreibt der Vektor  $[f_k]_{k=1}^{\binom{n}{2}}$  die symmetrische Funktion  $f$  eindeutig. Insbesondere kann die Metrik  $\rho$  eines Distanzraumes  $(X, \rho)$  als Vektor mit  $\binom{|X|}{2}$  Komponenten aufgefasst werden.

Die Funktion  $\rho$  eines Distanzraumes  $(X, \rho)$  wird nach [31] eine *Halbmetrik* genannt, falls zusätzlich die *Dreiecksungleichung* gilt:

$$(D3) \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$$

In diesem Fall wird  $(X, \rho)$  als *halbmetrischer Raum* bezeichnet.

Ein halbmetrischer Raum  $(X, \rho)$  heißt *metrischer Raum* ([31]), falls zusätzlich gilt:

## 2 Begriffe und Notationen

$$(D4) \quad \rho(x, y) = 0 \implies x = y \quad \forall x, y \in X$$

In diesem Fall nennt man  $\rho$  eine *Metrik*.

Die Knotenmenge  $V$  eines (positiv) gewichteten Graphen  $G = (V, E, w)$  bildet zusammen mit der Distanzfunktion des Graphen einen metrischen Raum  $(V, \text{dist}_G)$ . (D1), (D2) und (D4) sind offensichtlich erfüllt, und  $\text{dist}_G(v_1, v_2)$  kann für alle Knotenpaare  $v_1, v_2 \in V(G)$  wegen der Definition der Distanzfunktion eines Graphen für keinen Knoten  $u \in V(G)$  größer als  $\text{dist}_G(v_1, u) + \text{dist}_G(u, v_2)$  sein. Dies impliziert (D3). Umgekehrt kann jeder metrische Raum  $(X, \rho)$  endlicher Kardinalität durch einen endlichen gewichteten Graphen  $G = (V, E, w)$  dargestellt werden. Dazu setze man  $V := X$ ,  $E = \binom{X}{2}$  und  $w(\{u, v\}) := \rho(u, v) \quad \forall \{u, v\} \in E$ . Enthält dieser Graph eine Kante  $\tilde{e} = \{v_1, v_2\}$  und einen weiteren  $v_1$ - $v_2$ -Weg  $\tilde{P}$  (der mindestens zwei Kanten enthalten muss) mit

$$w(\{v_1, v_2\}) = w(E(\tilde{P})),$$

so heißt die Kante  $\tilde{e}$  *redundant*.

**Beobachtung 2.13** *Eine redundante Kante kann aus einem Graphen entfernt werden, ohne die Metrik zu verändern.*

**Beweis:** Für einen kürzesten  $x$ - $y$ -Weg  $P$  ( $x, y \in V$ ) können zunächst zwei Fälle unterschieden werden:

1. **Fall:**  $P$  enthält nicht die Kante  $\tilde{e}$ . Dieser Fall ist trivial.
2. **Fall:**  $P$  enthält die Kante  $\tilde{e}$ . Ersetzt man in  $P$  die Kante  $\tilde{e}$  durch den Weg  $\tilde{P}$  erhält man eine endliche Kantenfolge, die nicht länger als  $P$  ist. Nach Folgerung 2.7 ist diese Kantenfolge ein  $x$ - $y$ -Weg. ■

Die Distanzfunktion  $\text{dist}_G$  eines Graphen  $G = (V, E)$  kann wie in (2.2) als ein Vektor mit  $\binom{|V|}{2}$  Komponenten geschrieben werden.

Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum und  $Y$  eine nichtleere Teilmenge von  $X$ . Dann kann man gemäß [79] folgende Distanzen definieren:

$$\begin{aligned} \rho(Y, x) &:= \inf_{y \in Y} \rho(y, x) && \forall x \in X; \\ \text{und} \quad \rho_Y(x, z) &:= |\rho(Y, x) - \rho(Y, z)| && \forall x, z \in X. \\ \implies \rho_Y(x, z) &\leq \rho(x, z) && \forall x, z \in X. \end{aligned}$$

Eine Kugel  $B_\rho(x, r) \subseteq X$  (mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $x \in X$ ) ist wie folgt definiert:

$$B_\rho(x, r) := \{z \in X : \rho(x, z) \leq r\}.$$

Ein *Schnitt* in einem endlichen metrischen Raum  $(X, \rho)$  ist eine echte Teilmenge  $S \subset X$  mit  $S \neq \emptyset$ .  $\mathcal{S}(X) = 2^X \setminus \{\emptyset, X\}$  ist die Menge aller Schnitte in  $X$ . Analog ist  $\mathcal{S}(V) = 2^V \setminus \{\emptyset, V\}$  die Menge aller Schnitte in einem Graphen  $G = (V, E)$ .

## 2.3 Einbettungen metrischer Räume

Seien  $(X, \rho)$  und  $(X', \rho')$  zwei metrische Räume mit  $|X| \leq |X'|$ . Eine *Einbettung* des Raumes  $(X, \rho)$  in den Raum  $(X', \rho')$  ist eine injektive Funktion  $\varphi : X \rightarrow X'$ .

Die Zahl

$$\|\varphi\|_{Lip} := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\rho'(\varphi(x), \varphi(y))}{\rho(x, y)} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\})$$

heißt nach [44], [68] und [69] *Expansion*, nach [22] *Lipschitz-Konstante* oder gemäß [88] *Lipschitznorm* der Einbettung  $\varphi$ .

Sei  $Y = \varphi(X) \subseteq X'$  das Bild der Einbettung  $\varphi$ . Da eine Einbettung immer injektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ . Die Zahl

$$\|\varphi^{-1}\|_{Lip} := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\rho(x, y)}{\rho'(\varphi(x), \varphi(y))} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\})$$

heißt Lipschitz-Konstante der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  oder gemäß [44], [68] und [69] *Schrumpfung* der Einbettung  $\varphi$ . In dieser Arbeit werden die Begriffe „Lipschitzkonstante“ oder „Lipschitznorm“ nicht weiter verwendet.

Schließlich ist die Zahl

$$\zeta(\varphi, (X, \rho)) := \|\varphi\|_{Lip} \cdot \|\varphi^{-1}\|_{Lip} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\})$$

nach [44], [68] und [69] die *Verzerrung* der Einbettung  $\varphi$ .

Offensichtlich gilt:  $\zeta(\varphi, (X, \rho)) \geq 1$  für alle Einbettungen.

Falls

$$\|\varphi\|_{Lip} = \|\varphi^{-1}\|_{Lip} = 1$$

so heißt die Einbettung  $\varphi$  gemäß [31] *isometrisch* oder *Isometrie*, und es gilt dann:

$$\rho'(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Falls die Verzerrung  $\zeta(\varphi, (X, \rho)) = 1$  ist, so ist die Einbettung nur bis auf einen konstanten Faktor isometrisch, d. h. es gibt ein  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , so dass

$$\rho'(\varphi(x), \varphi(y)) = \alpha \cdot \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Wegen der Äquivalenz zwischen endlichen gewichteten Graphen und endlichen metrischen Räumen, lässt sich die Einbettung von endlichen gewichteten Graphen auf

## 2 Begriffe und Notationen

die Einbettung endlicher metrischer Räume zurückführen und umgekehrt. Mit dem gleichen Konzept kann man auch die Einbettung von Graphen in Graphen untersuchen. In dieser Arbeit ist  $\zeta(\varphi, G)$  die Verzerrung einer Einbettung  $\varphi$  des Graphen  $G = (V, E, w)$ .

Gemäß [96] heißt eine Einbettung  $\varphi : (X, \rho) \longrightarrow (X', \rho')$  *exakt*, wenn gilt:

$$\rho(x, y) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \implies \rho'(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho'(\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y})) \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in X.$$

## 2.4 Vektorräume

Ein *Vektorraum* (bzw. ein *linearer normierter Raum*) ist ein geordnetes Tripel  $(X, \mathbb{K}, \|\cdot\|)$  aus einer Grundmenge  $X$ , einem Zahlkörper  $\mathbb{K}$  und einer Funktion  $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , die folgende Axiome erfüllt:

- (N1)  $\|x\| = 0 \iff x = 0,$
- (N2)  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} \quad (\text{Linearität}),$
- (N3)  $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\| \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$

Jeder normierte Raum ist mit

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \tag{2.3}$$

auch ein metrischer Raum. In dieser Arbeit werden nur reelle Vektorräume betrachtet ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).

Die Elemente eines Vektorraumes heißen *Vektoren*. Die *Dimension* eines Vektorraumes  $Z$  ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in ihm und wird mit  $\dim(Z)$  bezeichnet.

Eine wichtige Klasse normierter Räume sind die  $\ell_p^d$ -Räume mit  $1 \leq p \leq \infty, d \in \mathbb{N}$  und  $\ell_p^d = (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$ . Dabei sind die Normen  $\|\cdot\|_p$  wie folgt definiert:

$$\|x\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |x_i|^p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|, & p = \infty; \end{cases}$$

wobei  $x_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $x$  ist. Die Normen  $\|\cdot\|_p$  heißen auch *Hölder- $p$ -Normen*. Eine andere Bezeichnung für  $\|x\|_\infty$  ist *Maximumnorm*. Die Hölder-1-Norm wird auch als *Manhattannorm* und die Hölder-2-Norm als *euklidische Norm* bezeichnet.

In dieser Arbeit wird die Bezeichnung  $\ell_p$ -Raum verwendet, wenn die Dimension des Raumes nicht festgelegt oder beschränkt sein soll. Alle  $\ell_p$ -Räume sind Banachräume. Weitere Informationen über Banachräume findet der Leser in [49] und [100].

Eine Kugel  $B_p(x, r) \subseteq \mathbb{R}^d$  (mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^d$ ) in der Norm  $\|\cdot\|_p$  ist wie eine Kugel im metrischen Raum definiert, wobei (2.3) verwendet wird.  $B_2(x, r)$  ist eine  $\dim(x)$ -dimensionale *euklidische Kugel*,  $B_1(x, r)$  ein Kreuzpolytop und  $B_\infty(x, r)$  ein  $\dim(x)$ -dimensionaler Würfel (mit Kantenlänge  $2r$ ). Der Index  $p$

## 2 Begriffe und Notationen

wird auch weggelassen, wenn die Norm des Raumes klar ist oder nicht festgelegt sein soll.

Mit  $V_p^d$  wird in dieser Arbeit das  $d$ -dimensionale Volumen der Kugel  $B_p(0, 1)$  bezeichnet.

Alle  $\ell_p$ -Räume sind äquivalent zu bestimmten Banach-Minkowski-Räumen mit einer konvexen zentralsymmetrischen Eichfigur. Banach-Minkowski-Räume werden in [60] ausführlich erklärt. So entspricht der  $\ell_2^d$  dem  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum, d. h. dem Banach-Minkowski-Raum mit der gewöhnlichen Einheitskugel als Eichfigur. Der Raum  $\ell_\infty^d$  entspricht dem  $d$ -dimensionalen Banach-Minkowski-Raum mit dem Würfel  $[-1, 1]^d$  als Eichfigur.

Analog zu den Kugeln in  $\ell_p^d$ -Räumen wird in dieser Arbeit mit  $B_Z(x, r)$  eine Kugel des Banach-Minkowski-Raumes  $Z$  mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $r$  bezeichnet, und mit  $V_Z$  ist das Volumen der  $\dim(Z)$ -dimensionalen Einheitskugel (oder Eichfigur)  $B_Z(0, 1)$  im Banach-Minkowski-Raum  $Z$  gemeint.

Eine weitere wichtige Klasse linearer normierter Räume sind Banach-Minkowski-Räume, deren Einheitskugel ein zentralsymmetrisches Polytop ist. Eine solche Einheitskugel  $B_{Polytop}(0, 1)$  kann durch eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{t \times d}$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^t$  ( $t \in \mathbb{N}$  vollständig beschrieben werden:

$$B_{Polytop}(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$$

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass dieses Ungleichungssystem irredundant ist, das heißt, es gibt keinen Index  $1 \leq i \leq t$ , so dass ein Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}_+^t$  mit  $\lambda_i = 0$  existiert, so dass  $\lambda^T A = A_{i,\cdot}$ , und  $\lambda^T b \geq b_i$ . Da man ferner annehmen kann, dass die Einheitskugel volldimensional ist, können alle Zeilen so skaliert werden, dass

$$b_i = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \tag{2.4}$$

Somit wird die Einheitskugel eindeutig durch die Matrix  $A$  beschrieben, und man kann  $B_{Polytop}(0, 1) =: B_A(0, 1)$  setzen. Da die Einheitskugel zentralsymmetrisch ist, gibt es zu jeder Zeile  $A_{i,\cdot}$  genau eine Zeile  $A_{j,\cdot} = -A_{i,\cdot}$  mit  $i \neq j$ . Die Zeilen  $i$  und  $j$  beschreiben zwei „gegenüber liegende“ Facetten der Einheitskugel und definieren ein gemeinsames Funktional  $|A_{i,\cdot}x| = |A_{j,\cdot}x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Die durch die Einheitskugel definierte Norm eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^d$  ist nach [67]:

$$\|x\|_A := \max_{1 \leq k \leq m} |A_{k,\cdot}x|$$

Die *affine Hülle* einer Punktmenge  $X \subseteq \ell_2^d$  ist der kleinste affine Unterraum  $U \subseteq \ell_2^d$ , mit  $X \subseteq U$ .

## 2.5 Einbettungen in Vektorräume

Eine Einbettung eines metrischen Raumes  $(X, \rho)$  bzw. eines gewichteten Graphen  $G = (V, E, w)$  in einen  $\ell_p$ -Raum wird in dieser Arbeit *optimal* genannt, wenn sie ohne Berücksichtigung der Dimension die kleinstmögliche Verzerrung unter allen möglichen Einbettungen des Raumes  $(X, \rho)$  bzw. des Graphen  $G$  in den  $\ell_p$  hat. Diese



## 2 Begriffe und Notationen

kleinstmögliche Verzerrung wird in dieser Arbeit mit  $\zeta_p(X, \rho)$  bzw.  $\zeta_p(G)$  bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} \zeta_p(X, \rho) &\leq \zeta(\varphi, (X, \rho)) && \text{für jede Einbettung } \varphi : X \longrightarrow \ell_p; \\ \zeta_p(G) &\leq \zeta(\varphi, G) && \text{für jede Einbettung } \varphi : G \longrightarrow \ell_p. \end{aligned}$$

Die Verzerrung  $\zeta_p(G)$  wird auch *optimal* für eine Einbettung des Graphen  $G$  in den  $\ell_p$  genannt.

Mit  $\zeta_p(n)$  wird kleinstmögliche Verzerrung für beliebige Graphen mit  $n$  Knoten und beliebige metrische Räume mit  $n$  Punkten unter allen Einbettungen in den Raum  $\ell_p$  bezeichnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_p(n) &\geq \zeta_p(X, \rho) && \text{für jeden metrischen Raum } X \text{ mit } |X| = n; \\ \zeta_p(n) &\geq \zeta_p(G) && \text{für jeden Graphen } G = (V, E) \text{ mit } |V| = n. \end{aligned}$$

Hat eine Einbettung die kleinstmögliche Verzerrung in den Raum  $\ell_p^d$ , so wird sie in dieser Arbeit *optimal in der Dimension  $d$*  genannt. Diese dimensions-optimale Verzerrung wird in dieser Arbeit mit  $\zeta_p^d(X, \rho)$  bzw.  $\zeta_p^d(G)$  bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} \zeta_p^1(X, \rho) &\geq \zeta_p^2(X, \rho) \geq \cdots \geq \zeta_p^\infty(X, \rho) = \zeta_p(X, \rho); \\ \zeta_p^1(G) &\geq \zeta_p^2(G) \geq \cdots \geq \zeta_p^\infty(G) = \zeta_p(G). \end{aligned}$$

Mit  $\zeta_p^d(n)$  wird die kleinstmögliche Verzerrung für beliebige Graphen mit  $n$  Knoten und beliebige metrische Räume mit  $n$  Punkten unter allen Einbettungen in den Raum  $\ell_p^d$  bezeichnet. Es gilt:

$$\zeta_p^d(n) \geq \zeta_p^d(X, \rho) \quad \text{für jeden metrischen Raum } X \text{ mit } |X| = n.$$

## 2.6 Abschätzungen für das Wachstum einer Funktion

Wichtig für diese Arbeit sind auch Abschätzungen für das Wachstum von Funktionen, die über der Menge der natürlichen Zahlen definiert sind. Die folgende Definition ist an [1] angelehnt:

**Definition 2.14** *Es seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen von der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen in die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Dann gelten folgende Notationen:*

$$\begin{aligned} f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) &\iff \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N}; \text{ so dass } |f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0. \\ f(n) \in \Omega(g(n)) &\iff \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N}; \text{ so dass } |f(n)| \geq C \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0. \\ f(n) \in \Theta(g(n)) &\iff \exists C_1, C_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}; \text{ so dass } C_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq C_2 \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Ein Algorithmus heißt nach [93] *effizient*, wenn er polynomielle Laufzeit hat, das heißt, wenn es eine Konstante  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass die Laufzeit des Algorithmus in  $\mathcal{O}(t^k)$  liegt. Dabei ist  $t$  die Länge der Eingabe, das heißt die Anzahl der Bits der Eingabe.

Es gibt mehrere Algorithmen-Klassen, für die keine effizienten Algorithmen bekannt sind. Dazu gehören die Klasse der NP-vollständigen und die Klasse der NP-schweren Probleme, die in [61] definiert werden. Hat man Probleme dieser Art zu lösen, so ist man oft schon mit einer Approximation zufrieden, falls sich diese effizient berechnen lässt.

## 2.7 Matrizen und Kegel

Die Transponierte einer Matrix  $A$  wird mit  $A^T$  bezeichnet, und  $I_n$  ist die Einheitsmatrix der Ordnung  $n$ .

Die folgenden Definitionen sind an [53] angelehnt:

$\mathcal{S}^n$  bezeichne die Menge der *symmetrischen Matrizen* der Ordnung  $n$ , das heißt:

$$A = A^T \quad \forall A \in \mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$\mathcal{S}^n$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  mit einer Dimension von  $\binom{n+1}{2}$ .

**Definition 2.15**  $A \in \mathcal{S}^n$  heißt *positiv semidefinit* ( $A \succeq 0$ ), falls  $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

$A \in \mathcal{S}^n$  heißt *positiv definit* ( $A \succ 0$ ), falls  $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Die Menge der *positiv semidefiniten Matrizen* der Ordnung  $n$  wird mit  $\mathcal{S}_+^n$ , die Menge der *positiv definiten Matrizen* der Ordnung  $n$  mit  $\mathcal{S}_{++}^n$  bezeichnet.

**Definition 2.16** Eine Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt *Kegel*, falls  $\lambda(x + y) \in K \quad \forall x, y \in K, \lambda \in \mathbb{R}_+$ .

Nach [53] stammt folgender Satz von Féjer:

**Satz 2.17** Eine Matrix  $Q \in \mathcal{S}^n$  ist genau dann *positiv semidefinit*, wenn  $\sum_{i,j=1}^n p_{ij} \cdot q_{ij} \geq 0$  für alle Matrizen  $P \in \mathcal{S}_+^n$ .

Linial, London und Rabinovich gaben in [67] einen einfachen Beweis des Satzes von Féjer:

**Beweis:** Zunächst habe  $P \in \mathcal{S}_+^n$  den Rang 1, also ist  $P = x \cdot x^T$  für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n p_{ij} \cdot q_{ij} &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \cdot q_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n x^T Q x \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist  $Q$  positiv semidefinit.

Ist andererseits  $Q$  positiv semidefinit, und habe  $P$  den Rang 1, dann ist

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij} \cdot q_{ij} \geq 0.$$

Der allgemeine Fall folgt aus der Tatsache, dass jede Matrix  $P \in \mathcal{S}_+^n$  eine nichtnegative Linearkombination von positiv semidefiniten Rang-1-Matrizen ist. ■

Nach [53] ist leicht zu sehen, dass  $\mathcal{S}_+^n$  ein Kegel im Raum der symmetrischen Matrizen ist.

Mit  $\mathcal{Q}_n$  wird in dieser Arbeit die Menge der positiv semidefiniten Matrizen der Ordnung  $n$  und Zeilensumme null bezeichnet.

## 2 Begriffe und Notationen

Die *Adjazenzmatrix*  $A$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist nach [1] wie folgt definiert:

$$A \in \{0, 1\}^{|V| \times |V|}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist jede Adjazenzmatrix symmetrisch. Die Eigenwerte der Adjazenzmatrix  $A$  eines Graphen  $G = (V, E)$  werden auch kurz als *Eigenwerte des Graphen* bezeichnet.

$\mathbf{1}$  ist in dieser Arbeit der Vektor, in dem alle Komponenten 1 sind. Gemäß [74] liegen alle Eigenwerte eines  $k$ -regulären Graphen  $G$  im Intervall  $[-k, k]$ , und der größte Eigenwert von  $G$  ist  $k$ , wobei  $\mathbf{1}$  der zugehörige Eigenvektor ist.

Mitunter betrachtet man auch die Laplacematrix  $L$  bzw. die normierte Laplacematrix  $\hat{L}$  eines Graphen, die nach [29] wie folgt definiert sind:

$$l_{ij} = \begin{cases} \delta(v_i), & i = j; \\ -1, & \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\hat{l}_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \quad \wedge \quad \delta(v_i) > 0; \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta(v_i) \cdot \delta(v_j)}}, & \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäß [26] liegen alle Eigenwerte der normierten Laplacematrix eines Graphen im Intervall  $[0, 2]$ , und der kleinste Eigenwert der normierten Laplacematrix ist 0 (mit dem zugehörigen Eigenvektor  $\mathbf{1}$ ). Somit ist die normierte Laplacematrix eines Graphen immer positiv semidefinit, aber nie positiv definit.

Für einen  $k$ -regulären Graphen gilt:

$$\hat{L} = I_{|V|} - \frac{1}{k} \cdot A, \tag{2.5}$$

Für einen gleichgewichteten Graphen  $G = (V, E)$  und jedes  $i \in \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$  kann man auch die  *$i$ -te Adjazenzmatrix*  $A^{(i)}$  definieren:

$$A^{(i)} \in \{0, 1\}^{|V| \times |V|}$$

$$a_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{dist}_G(v_j, v_k) = i \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen beliebig gewichteten Graphen  $G = (V, E, w)$  benötigt man manchmal die *Distanzmatrix*  $D$ , die wie folgt definiert ist:

$$d_{ij} = \text{dist}_G(v_i, v_j).$$

## 2.8 Einige Graphenklassen

Mit  $K_n$  wird der *vollständigen* Graph mit  $n$  Knoten bezeichnet, das heißt:

$$G = (V, E) = K_n \iff |V| = n \quad \wedge \quad E = \binom{V}{2}.$$

Eine *Bipartition* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist nach [61] eine Partition der Knotenmenge  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ , so dass keiner der beiden von  $V_1$  und  $V_2$  induzierten Teilgraphen eine Kante hat. Ein Graph heißt nach [61] *bipartit*, wenn er eine Bipartition besitzt. Mit  $K_{n_1, n_2}$  wird der *vollständige bipartite* Graph mit der Bipartition  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ ,  $|V_1| = n_1$  und  $|V_2| = n_2$  bezeichnet, das heißt:

$$G = (V, E) = K_{n_1, n_2} \iff \begin{aligned} V &= V_1 \dot{\cup} V_2 \quad \wedge \\ |V_1| &= n_1, \quad |V_2| = n_2 \quad \wedge \\ E &= \{\{u, v\} \mid u \in V_1, v \in V_2\}. \end{aligned}$$

Zwei Graphen  $G = (V, E, w)$  und  $G' = (V', E', w')$  heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Funktion  $f: V \rightarrow V'$  gibt mit  $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$  und  $w(\{u, v\}) = w'(\{f(u), f(v)\}) \quad \forall \{u, v\} \in E$ . Gemäß [32] unterscheidet man meist nicht zwischen isomorphen Graphen. In diesem Sinne ist  $K_{n_1, n_2} = K_{n_2, n_1}$ . Der *Hyperwürfel*  $Q_d$  ist nach [1] ein Graph  $G = (V, E)$  mit

$$\begin{aligned} V &= \{0, 1\}^d \quad \text{und} \\ E &= \{\{u, v\} \mid \exists i \in \{1, \dots, d\} : u_i \neq v_i \quad \wedge \quad u_j = v_j \quad \forall j \in \{1, \dots, d\} \setminus i\}. \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung der Hyperwürfel sind die *Hamminggraphen*. Der Hamminggraph  $H(q, d)$  hat die Knotenmenge  $X^d$ , wobei  $X$  eine endliche Grundmenge der Kardinalität  $q \geq 2$  ist. Zwei Knoten des Hamminggraphen sind genau dann adjazent, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden.

## 2.9 Distanzreguläre Graphen

Ein zusammenhängender, gleichgewichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt gemäß [96] *distanzregulär*, falls für alle  $i \in \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$  nichtnegative ganzzahlige Konstanten  $a_i, b_i$  und  $c_i$  existieren, so dass für alle Knoten  $x, y \in V$  mit  $\text{dist}_G(x, y) = i$  gilt:

$$\begin{aligned} a_i &= |\{z \in V : \text{dist}_G(x, z) = 1 \quad \wedge \quad \text{dist}_G(y, z) = i\}|; \\ b_i &= |\{z \in V : \text{dist}_G(x, z) = 1 \quad \wedge \quad \text{dist}_G(y, z) = i + 1\}|; \\ c_i &= |\{z \in V : \text{dist}_G(x, z) = 1 \quad \wedge \quad \text{dist}_G(y, z) = i - 1\}|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Zahl  $k_i := |\{y \in V : \text{dist}_G(x, y) = i\}|$  heißt  *$i$ -ter Knotengrad* von  $G$  und ist unabhängig von  $x$ .

## 2 Begriffe und Notationen

In distanzregulären Graphen  $G = (V, E)$  gilt für die  $i$ -ten Adjazenzmatrizen die folgende Beziehung

$$A^{(1)}A^{(i)} = c_{i+1}A^{(i+1)} + a_iA^{(i)} + b_{i-1}A^{(i-1)} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, \text{diam}(G) - 1\}. \quad (2.7)$$

Darum lässt sich jede Matrix  $A^{(i)}$  ( $i \in \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ ) als ein Polynom der Adjazenzmatrix  $A = A^{(1)}$  ausdrücken.

Beispiele für distanzreguläre Graphen sind die gleichgewichteten Hamminggraphen (siehe Abschnitt 2.8).

Weitere Beispiele sind die gleichgewichteten Johnsongraphen: Sei  $Y$  eine Menge mit  $\nu \geq 2\mu$  Elementen. Der *Johnsongraph*  $J(\nu, \mu)$  hat nach [96] alle Teilmengen von  $Y$  mit genau  $\mu$  Elementen als Knotenmenge. Zwei Knoten  $x$  und  $y$  sind genau dann adjazent, wenn  $|x \cap y| = \mu - 1$ .

### 2.10 Minoren

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $\emptyset \neq X \subset V$ . Eine *Kontraktion* von  $X$  beinhaltet nach [61] erstens das Weglassen aller Knoten aus  $X$  und aller Kanten aus  $G[X]$  und zweitens das Hinzufügen eines Knotens  $x$  sowie das Ersetzen aller nichtleeren Kantenmengen  $F_v = \{\{u, v\} \in E \mid u \in X\}$  mit  $v \in V \setminus X$  durch eine einzige Kante  $\{v, x\}$ . Im Unterschied zu [61] werden in dieser Arbeit keine Mehrfachkanten zugelassen.

$\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  ist nach [61] ein *Minor* des Graphen  $G = (V, E)$ , falls  $\tilde{G}$  durch eine Folge von Operationen der folgenden Art aus  $G$  entsteht: Löschen eines Knotens, Löschen einer Kante oder Kontraktion einer Kante.

### 2.11 Logarithmen

$\log(\cdot)$  ist in dieser Arbeit der Logarithmus zur Basis 2;  $\ln(\cdot)$  ist der natürliche Logarithmus.

### 2.12 Die Definition der Expanderkonstanten

Die *Knotenexpansions-Konstante* oder kurz *Expanderkonstante*  $\Phi = \Phi(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist nach [81] wie folgt definiert:

$$\Phi(G) = \min_{\substack{\emptyset \neq U \subset V \\ |U| \leq \frac{|V|}{2}}} \frac{|\{v \in V \setminus U \mid \exists \{u, v\} \in E \text{ mit } u \in U\}|}{|U|} \quad (2.8)$$

Ähnlich ist die *Kantenerpansions-Konstante* oder kurz *Cheegerkonstante*  $\text{Ch} = \text{Ch}(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  (gemäß [26]) definiert:

$$\text{Ch}(G) = \min_{\substack{\emptyset \neq U \subset V \\ |U| \leq \frac{|V|}{2}}} \frac{|E(U, V \setminus U)|}{|U|}$$

## 2 Begriffe und Notationen

Sei  $\Delta = \Delta(G)$  der Maximalgrad des Graphen  $G$ . Dann gilt offensichtlich

$$\Phi(G) \leq \text{Ch}(G) \leq \Delta(G) \cdot \Phi(G). \quad (2.9)$$

Sei  $\mathcal{G} := (G_k)_{k \in N}$  eine Familie von Graphen über einer endlichen oder abzählbaren Indexmenge  $N$ . Falls

$$\Phi(\mathcal{G}) := \inf_{i \in N} \Phi(G_i) > 0,$$

so heißt  $\mathcal{G}$  eine (*Knoten-*) *Expander-Graphenfamilie*. Falls  $\Phi(\mathcal{G}) = 0$  gibt, heißt  $\mathcal{G}$  eine *Nichtexpander-Graphenfamilie*.

Falls

$$\text{Ch}(\mathcal{G}) := \inf_{i \in N} \text{Ch}(G_i) > 0,$$

so heiße  $\mathcal{G}$  *Kantenexpander-Graphenfamilie*.

Eine Graphenfamilie  $\mathcal{G} := (G_i)_{i \in N}$  heiße in dieser Arbeit  $k$ -regulär, wenn jeder Graph  $G \in \mathcal{G}$   $k$ -regulär ist. Der Minimalgrad  $\delta(\mathcal{G})$  und der Maximalgrad  $\Delta(\mathcal{G})$  einer Graphenfamilie  $\mathcal{G}$  seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{G}) &= \inf_{G \in \mathcal{G}} \delta(G), \\ \Delta(\mathcal{G}) &= \sup_{G \in \mathcal{G}} \Delta(G). \end{aligned}$$

Eine Graphenfamilie soll in dieser Arbeit gleichgewichtet heißen, falls jeder Graph  $G \in \mathcal{G}$  gleichgewichtet ist.

Solange  $\Delta(\mathcal{G}) < \infty$ , ist wegen (2.9) eine Graphenfamilie  $\mathcal{G}$  genau dann eine Expander-Graphenfamilie, wenn sie eine Kantenexpander-Graphenfamilie ist. Insbesondere ist der Begriff der  $k$ -regulären Expander-Graphenfamilie quivalent zum Begriff der  $k$ -regulären Kantenexpander-Graphenfamilie.

### 2.13 Eigenschaften der Expander-Graphenfamilien

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n := |V|$ .

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  seien die Eigenwerte seiner Adjazenzmatrix  $A = A_G$  und  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$  die Eigenwerte seiner Laplacematrix  $L = L_G$ . Falls  $G$   $k$ -regulär ist, gilt:

$$\begin{aligned} L &= k \cdot I_n - A; \\ \implies \mu_i &= k - \lambda_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Gemäß [26] und [29] gilt stets  $\mu_1 = 0$  und, falls der Graph  $G$   $k$ -regulär ist,  $\lambda_1 = k$ . Der Eigenwert  $\mu_2 = \mu_2(G)$  ist positiv mit der Expanderkonstanten  $\Phi(G)$  korreliert. Nach [29] gilt:

## 2 Begriffe und Notationen

$$\begin{aligned} \Phi(G) &\geq \frac{2 \cdot \mu_2(G)}{\Delta(G) + 2 \cdot \mu_2(G)} \\ \text{und} \quad \mu_2(G) &\geq \frac{\Phi^2(G)}{4 + 2\Phi^2(G)}; \end{aligned} \tag{2.11}$$

wobei  $\Delta(G)$  der Maximalgrad des Graphen  $G$  ist.

Daraus folgt, dass  $\Phi(G) > 0 \iff \mu_2(G) > 0$  und, falls  $G$   $k$ -regulär ist:

$\Phi(G) > 0 \iff \lambda_2(G) < k$ . Wegen (2.9) gelten diese Beziehungen auch für die Cheegerkonstante. Gemäß [23] ist eine  $k$ -reguläre Graphenfamilie  $\mathcal{G} = (G_i)_{i=1}^\infty$  genau dann eine Kantenexpander-Graphenfamilie, wenn  $\limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_2(G_i) < k$ .

Graphen mit einer positiven Expanderkonstanten haben auch einen „kleinen“ Durchmesser. Nach [50] gilt für  $k$ -reguläre Graphen  $G = (V, E)$ :

$$\lambda_2(G) < \frac{k}{2} \implies \text{diam}(G) \in \mathcal{O}(\log |V|).$$

### 2.14 Markov-Ketten und Erwartungswerte

Sei  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  eine endliche Grundmenge. Eine *symmetrische Markov-Kette* ist gemäß [70] eine Folge von Zuständen  $(Z_t)_{t=0}^\infty$  mit  $Z_t \in X \quad \forall t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , die mit einer symmetrischen stochastischen Matrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (das heißt mit nicht-negativen Einträgen und Zeilensumme 1) ausgestattet ist, wobei  $p_{ij}$  die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $Z_{t+1} = x_j$  unter der Bedingung  $Z_t = x_i$  (unabhängig von  $t$ ) ist. Ferner sollen die Ereignisse  $Z_0 = x_i$  für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{n}$  eintreten.  $P$  heißt *Übergangs-* oder *Transitionsmatrix*.

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße  $Z$  wird in dieser Arbeit mit  $\mathbb{E}Z$  bezeichnet.

# 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

## 3.1 Einbettungen in den $\ell_\infty$

Nach [79] bewies zuerst Fréchet, dass sich jeder metrische Raum  $(X, \rho)$  endlicher Kardinalität isometrisch in den Raum  $\ell_\infty^{|X|}$  einbetten lässt. Dazu soll er jedem Punkt  $x \in \{1, 2, \dots, |X|\} = X$  die Koordinaten:

$$\varphi(x) = (\rho(x, y))_{y=1}^{|X|} \tag{3.1}$$

gegeben haben. Linial, London und Rabinovich wandten diese Einbettung 1995 in [67] auf gewichtete Graphen  $G = (V, E, w)$  an. Das heißt:

$$\varphi(v) = (\text{dist}_G(v, u))_{u=1}^{|V|} \quad \forall v \in \{1, \dots, |V|\} = V$$

Sie argumentierten, dass einerseits:

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(u)\|_\infty &= \max_k |[\varphi(v)]_k - [\varphi(u)]_k| \\ &\geq |[\varphi(v)]_u - [\varphi(u)]_u| \\ &= \text{dist}_G(u, v) - 0 \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} |[\varphi(v)]_{\bar{v}} - [\varphi(u)]_{\bar{v}}| &= |\text{dist}_G(u, \bar{v}) - \text{dist}_G(v, \bar{v})| \\ &\leq \text{dist}_G(u, v) \quad \forall u, v, \bar{v} \in V \end{aligned}$$

wegen der Dreiecksungleichung.

Ferner zeigen Linial, London und Rabinovich in dem gleichen Aufsatz, dass man für die isometrische Einbettung einiger Graphenklassen in den  $\ell_\infty$  mit einer kleineren Dimension auskommt.

**Satz 3.1** *Bäume können isometrisch in den  $\ell_\infty^d$  mit  $d \leq \left\lceil \frac{1}{\log 3 - 1} \cdot \log |V| \right\rceil$  eingebettet werden.*

**Beweisskizze nach [67]:** Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass jeder Baum  $T = (V, E)$  einen zentralen Knoten  $z \in V$  besitzt, so dass keine Zusammenhangskomponente von  $G[V \setminus \{z\}]$  mehr als  $\frac{2}{3} \cdot |V|$  Knoten enthält. Darum kann man zwei Teilbäume



### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$T_1, T_2$  in  $T$  mit  $|V(T_1)| \leq \frac{2}{3} \cdot |V|$ ,  $|V(T_2)| \leq \frac{2}{3} \cdot |V|$  und  $V(T_1) \cap V(T_2) \subseteq \{z\}$  auswählen.

Seien die Teilbäume  $T_1, T_2$  bereits isometrisch durch die Funktion  $\varphi_1, \varphi_2$  in die Räume  $\ell_\infty^{k_1}$  und  $\ell_\infty^{k_2}$  eingebettet. Dabei kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\varphi_1(z) = 0$ , falls  $z \in V(T_1)$ , und  $\varphi_2(z) = 0$ , falls  $z \in V(T_2)$  ist<sup>1</sup>. Dann kann man den Baum  $T$  durch eine Funktion  $\varphi$  isometrisch in den  $\ell_\infty^k$  mit  $k = \max\{k_1, k_2\} + 1$  wie folgt einbetten:

$$[\varphi(v)]_i = \begin{cases} [\varphi_1(v)]_i, & v \in T_1 \quad \wedge \quad i \leq k_1 \\ [\varphi_2(v)]_i, & v \in T_2 \quad \wedge \quad i \leq k_2 \\ \text{dist}_T(z, v), & v \in T_1 \quad \wedge \quad i = k \\ -\text{dist}_T(z, v), & v \in T_2 \quad \wedge \quad i = k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis folgt nun durch rekursive Anwendung dieser Technik. ■

Der gleichgewichtete vollständige Graph  $K_n$  kann nach [67] isometrisch in den  $\ell_\infty^d$  mit

$$d = \lceil \log n \rceil \tag{3.2}$$

eingebettet werden, wobei man die Knoten des Graphen auf die Ecken des Würfels  $[0, 1]^d$  abbildet.

Winkler zeigte 1983 in [102], dass ein gleichgewichteter Graph  $G = (V, E)$  isometrisch auf die Ecken des Würfels  $[0, 1]^{|V|-1} \subset \ell_\infty^{|V|-1}$  abgebildet werden kann.

## 3.2 Allgemeine Ergebnisse verschiedener Autoren zu Einbettungen in Banachräume

Bourgain fand 1985 ein sehr grundlegendes Resultat, das die Größenordnung einer Verzerrung einer optimalen Einbettung in einen beliebigen  $\ell_p$ -Raum mit  $1 \leq p \leq \infty$  nach oben abschätzt. Bourgain zeigte zunächst in [19] die Gültigkeit dieser Schranke für den  $\ell_1$  und den  $\ell_2$ :

**Proposition 3.2** *Jeder metrische Raum  $(X, \rho)$  endlicher Kardinalität kann mit einer Verzerrung in  $\mathcal{O}(\log |X|)$  in den euklidischen Raum  $\ell_2$  eingebettet werden.*

**Beweis nach [19]:** Für jede natürliche Zahl  $t$  sei  $\mathcal{P}_t$  das Mengensystem aller Teilmengen von  $X$  mit  $t$  Elementen und  $\mathcal{P} = 2^X \setminus \{\emptyset\}$ . Bourgain verwendet dann folgende Proposition:

**Proposition 3.3** *Es gibt eine positive Konstante  $C$ , so dass für alle  $x, z \in X$ :*

$$\rho(x, z) \leq C \cdot \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}_t} \rho_Y(x, z);$$

wobei  $\rho_Y(x, z)$  wie in (2.2) definiert ist.

<sup>1</sup>Falls  $z \in V(T_i)$  und  $\varphi_i(z) \neq 0$  für ein  $i \in \{1, 2\}$ , verschiebe die Einbettung  $\varphi_i$  um  $-\varphi_i(z)$ .

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

Sei

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \ell_\infty^{|\mathcal{P}|} \\ \text{mit } [f(x)]_Y &:= \rho(Y, x) & \forall x \in X, \quad Y \in \mathcal{P}. \\ \implies \|f\|_{Lip} &= 1; \end{aligned}$$

wobei  $\rho(Y, x)$  wie in (2.2) definiert ist.  
Bourgain wendet dann folgende Funktion an:

$$\begin{aligned} \Lambda : \ell_\infty^{|\mathcal{P}|} &\longrightarrow \ell_1^{|\mathcal{P}|} \\ \text{mit } [\Lambda(v)]_Y &:= \frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|} \cdot v_Y & \forall Y \in \mathcal{P}_t, \quad v \in \ell_\infty^{|\mathcal{P}|}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Operatornorm wird mit höherer Funktionalanalysis berechnet:  $\|\Lambda\| = \ln |X|$ .  
Mit Proposition 3.3 gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\Lambda \circ f\|_{Lip} &\leq \ln |X| \\ \text{und } \|(\Lambda \circ f)^{-1}\|_{Lip} &\leq C. \end{aligned}$$

Bourgain wendet dann noch folgende Funktionen an:

$$\begin{aligned} \Lambda' : \ell_\infty^{|\mathcal{P}|} &\longrightarrow \ell_2^{|\mathcal{P}|} \\ \text{mit } [\Lambda(v)]_Y &:= \sqrt{\frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|}} \cdot v_Y & \forall Y \in \mathcal{P}_t, \quad v \in \ell_\infty^{|\mathcal{P}|} \\ \Lambda'' : \ell_2^{|\mathcal{P}|} &\longrightarrow \ell_1^{|\mathcal{P}|} \\ \text{mit } [\Lambda(u)]_Y &:= \sqrt{\frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|}} \cdot u_Y & \forall Y \in \mathcal{P}_t, \quad u \in \ell_2^{|\mathcal{P}|} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Operatornormen werden mit  $\|\Lambda'\| = \|\Lambda''\| = \sqrt{\ln |X|}$  angegeben. Mit Proposition 3.3 gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\Lambda' \circ f\|_{Lip} &\leq \sqrt{\ln |X|} \\ \text{und } \|(\Lambda' \circ f)^{-1}\|_{Lip} &\leq C \cdot \sqrt{\ln |X|}. \end{aligned}$$

■

Im nächsten Abschnitt werde ich einfache Abschätzungen für die Operatornormen  $\|\Lambda\|$ ,  $\|\Lambda'\|$  und  $\|\Lambda''\|$  mit elementarer Funktionalanalysis angeben.

**Beweisideen für Proposition 3.3 aus [19]:** Für ein beliebiges Punktepaar  $\{x, z\} \in X$  werden natürliche Zahlen  $a_0 < a_1 < \dots < a_h$  und reelle Zahlen  $r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_h = \frac{\rho(x, z)}{2}$  gewählt, so dass  $|B_\rho(x, r_i)| \geq a_i$  und  $|B_\rho(z, r_i)| \geq a_i$ . Für jeden Index  $i \in \{0, 1, \dots, h\}$  wird dann ein geeigneter Index  $t \in \{1, 2, \dots, |X|\}$  genommen, so dass  $a_i \cdot t$  ungefähr  $\frac{|X|}{10}$  ist. Aus Wahrscheinlichkeits-Betrachtungen folgt dann, dass mindestens ein fester Anteil ( $c \cdot |\mathcal{P}_t|$ ) der Mengen aus  $\mathcal{P}_t$  „fern“ von  $x$  und „nahe“  $z$  (oder umgekehrt) ist.

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

Die Proposition folgt dann durch Aufsummieren über alle  $i \in \{0, 1, \dots, h\}$ . ■

Nach Matoušek ([79]) kann jede endliche Teilmenge des  $\ell_2$  isometrisch in einen  $\ell_p$ -Raum geeigneter Dimension mit einem beliebigen  $p \in [1, \infty]$  eingebettet werden, und darum gilt Bourgain's obere Schranke auch für einen  $\ell_p$ -Raum mit einem beliebigen  $p \in [1, \infty]$ . Umgekehrt kann nicht jede endliche Teilmenge des  $\ell_1$  isometrisch in den  $\ell_2$  eingebettet werden (siehe Abschnitt 3.11).

Da aber jeder metrische Raum endlicher Kardinalität sogar isometrisch in den  $\ell_\infty$  eingebettet werden kann, könnte man vermuten, dass die Verzerrung einer optimalen Einbettung in den  $\ell_p$  für wachsendes  $p \in [2, \infty]$  monoton abnimmt. Matoušek zeigte 1997 in [81] für ein Teilintervall die Richtigkeit dieser Vermutung: Es gibt nämlich eine universelle Konstante  $C$ , so dass für  $1 \leq p < \log n$  jeder gewichtete Graph  $G = (V, E, w)$  mit  $|V| = n$  mit einer Verzerrung von höchstens  $\frac{C}{p} \cdot \log n$  in den Raum  $\ell_p$  eingebettet werden kann. Der Beweis kann in [81] nachgelesen werden.

Andererseits zeigte Matoušek auch, dass Bourgain's Schranke scharf ist. Es gibt nämlich tatsächlich Graphen  $G = (V, E)$ , die nicht besser als mit einer Verzerrung in der Größenordnung von  $\log |V|$  in den euklidischen Raum eingebettet werden können. Speziell zeigte Matoušek in [81], dass für  $k$ -reguläre, gleichgewichtete Expander-Graphenfamilien  $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in N}$

**Satz 3.4** Für  $k$ -reguläre, gleichgewichtete Expander-Graphenfamilien  $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in N}$  gilt

$$\begin{aligned} \zeta_p(G_i) &\in \Omega\left(\frac{\Phi(G_i)}{pk \cdot \log k} \cdot \log |V(G_i)|\right) \\ &\subseteq \Omega\left(\frac{\Phi(\mathcal{G})}{pk \cdot \log k} \cdot \log |V(G_i)|\right) \quad \forall i \in N \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit  $1 \leq p < \infty$ .

**Beweisideen aus [81]:** Matoušek benutzt folgendes Lemma aus [54]:

**Lemma 3.5** Sei  $\mathcal{G}$  eine Expander-Graphenfamilie mit  $|V(G)| = n \quad \forall G \in \mathcal{G}$  und  $z_1, z_2, \dots, z_n$  beliebige reelle Zahlen mit Median  $\omega$ . Dann gilt für jeden Graphen  $G \in \mathcal{G}$ :

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G)} |z_i - z_j| \geq \Phi(\mathcal{G}) \cdot \sum_{i \in V(G)} |z_i - \omega| \quad (3.6)$$

An der Beziehung (3.6) ändert sich nichts, wenn man alle  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) um  $-\omega$  verschiebt. Darum folgt:

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G)} |z_i - z_j| \geq \frac{\Phi(\mathcal{G})}{n-1} \cdot \sum_{\{i,j\} \in \binom{V(G)}{2}} |z_i - z_j| \quad (3.7)$$

Durch einige Umformungen, die hier nicht explizit erwähnt werden sollen, erhält Matoušek aus (3.7) für  $k$ -reguläre Expander-Graphenfamilien und beliebige reelle Zahlen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  mit Median  $\omega$ :

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j\} \in E(G)} |z_i - z_j|^p &\geq \left(\frac{\Phi(G)}{2pk}\right)^p \cdot \frac{k}{n-1} \cdot \sum_{i \in V} |z_i - \omega|^p \\ &\geq \left(\frac{\Phi(G)}{4pk}\right)^p \cdot \frac{k}{n-1} \cdot \sum_{\{i,j\} \in \binom{V(G)}{2}} |z_i - z_j|^p. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Seien nun  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \ell_p$  beliebig. Durch Aufsummieren über alle Koordianten erhält man aus (3.8):

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G)} \|x_i - x_j\|_p^p \geq \left(\frac{\Phi(G)}{4pk}\right)^p \cdot \frac{k}{n-1} \cdot \sum_{\{i,j\} \in \binom{V(G)}{2}} \|x_i - x_j\|_p^p. \quad (3.9)$$

Die Ungleichung (3.9) gilt insbesondere auch, wenn  $x_i$  das Bild des Knotens  $i$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  innerhalb eines Graphen  $G \in \mathcal{G}$  unter einer beliebigen Einbettung des Graphen in den  $\ell_p$  ist. Da der Graph  $k$ -regulär ist, hat er genau  $\frac{kn}{2}$  Kanten und  $\frac{n(n-1)}{2}$  Knotenpaare. Daraus folgt mit Ungleichung (3.9), dass die  $\ell_p$ -Abstände der adjazenten Knotenpaare im  $p$ -ten Mittel mindestens das  $\frac{\Phi(G)}{4pk}$ -fache des  $p$ -ten Mittels der  $\ell_p$ -Abstände aller Knotenpaare ist. Damit folgt die Aussage, falls die Graphdistanzen aller Knotenpaare im  $p$ -ten Mittel  $\Omega\left(\frac{\log n}{\log k}\right)$  sind.

Sei  $b := \frac{\log(n/4)}{\log k}$ . Da der Graph  $k$ -regulär ist, haben höchstens  $\sum_{i=0}^{b-1} k^i \leq k^b = \frac{n}{4}$  Knoten eine Distanz von weniger als  $b$  von einem beliebigen, aber festen Knoten des Graphen. Darum haben mindestens  $\frac{3}{4}$  aller Knotenpaare eine Distanz von mindestens  $b = \frac{\log n - 2}{\log k} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{\log n}{\log k}$  für  $n \geq 8$ . ■

Linial, Magen und Saks bewiesen 1998 in [68], dass jeder Baum mit  $n$  Knoten mit einer Verzerrung von  $\mathcal{O}(\log \log n)$  in den Raum  $\ell_2$  eingebettet werden kann. Diese Schranke wurde 1999 von Matoušek in [82] auf  $\mathcal{O}(\sqrt{\log \log n})$  verbessert. Er bewies sogar:

**Satz 3.6** Die optimale Verzerrung bei der Einbettung von Bäumen in  $\ell_p$ -Räume mit  $p \in (1, \infty)$  liegt in  $\mathcal{O}(\sqrt[p]{\log \log n})$ .

**Beweisideen aus [82]:** Sei  $T = (V, E, w)$  ein gewichteter Baum. Maošek definiert zunächst die *Raupendimension*  $\text{cdim}(T)$  eines Baumes  $T$  rekursiv wie folgt:

- $\text{cdim}(T) = 0$ , falls  $|V(T)| = 1$ .
- $\text{cdim}(T) = k + 1$ , falls es von einem festen Knoten  $r \in V(T)$ , der die *Wurzel* des Baumes genannt wird, kantendisjunkte Wege  $P_1, P_2, \dots, P_r$  gibt, so dass die Raupendimension jeder Zusammenhangskomponente des Waldes  $W = (V(T), E(T) \setminus \bigcup_{i=1}^r E(P_i))$  kleiner oder gleich  $k$  ist.

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

Matoušek zeigt dann, dass  $\text{cdim}(T) \leq \log |V(T)|$  gilt. Entsprechend der Definition der Raupendimension wählt man einen Wurzelknoten  $r \in V$  und ein festes Wegesystem  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_d\}$ . Matoušek definiert dann eine Einbettung  $f : T \rightarrow \ell_1^d$  mit  $f(r) = 0$ , wobei jede Koordinate des  $\ell_p^d$  eineindeutig einem Weg des Wegesystems  $\mathcal{P}$  zugeordnet wird. Für jeden beliebigen Knoten  $v \in V(T)$  gibt es einen eindeutigen Weg  $P(r, v)$  in  $T$  von  $r$  nach  $v$ , und alle Kanten des Weges  $P(r, v)$  liegen auf Teilstücken gewisser Wege  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_a} \in \mathcal{P}$  mit  $a \leq \text{cdim}(T)$ . So lässt sich die Distanz der Knoten  $r$  und  $v$  wie folgt zerlegen:

$$w_k := \sum_{e \in E(P(r, v)) \cap E(P_{i_k})} w(e) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, a\}$$

$$\text{dist}_T(r, v) = \sum_{k=1}^a w_k$$

Matoušek weist dann den Koordinaten  $[f(v)]_{i_1}, [f(v)]_{i_2}, \dots, [f(v)]_{i_a}$  bestimmte Werte in Abhängigkeit von  $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_a}$  zu und kann für diese Einbettung zeigen, dass  $\zeta(f, T) \in \mathcal{O}\left(\sqrt{\log \text{cdim}(T)}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\sqrt{\log \log |V(T)|}\right)$ . ■

Für jeden Baum  $T = (V, E, w)$  und jedes  $p \in [1, \infty]$  (insbesondere auch für  $p \in [1, 2)$ ) gilt  $\zeta_p(T) \in \mathcal{O}\left(\sqrt{\log \log |V|}\right)$ , weil jede endliche Teilmenge des  $\ell_2$  isometrisch in einen  $\ell_p$ -Raum für beliebiges  $p \in [1, \infty]$  eingebettet werden kann. In Abschnitt 3.9 wird gezeigt, dass Bäume sogar isometrisch in den  $\ell_1$  eingebettet werden können.

Linial und Magen zeigten in [69], dass für eine optimale Einbettung  $\varphi$  eines gleichgewichteten Graphen  $G = (V, E)$  in den  $\ell_2$  der Quotient  $\frac{\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_2}{\text{dist}_G(u, v)}$  genau dann sein Maximum annimmt, wenn die Knoten  $u, v \in V$  adjazent sind.

### 3.3 Einfache Abschätzungen für die Operatornormen

$$\|\Lambda\|, \|\Lambda'\| \quad \text{und} \quad \|\Lambda''\|$$

Ich gebe noch einfache Abschätzungen für die Normen der Operatoren  $\Lambda, \Lambda'$  und  $\Lambda''$  aus (3.3) und (3.4) an.  $(X, \rho), \mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}_t$  für natürliche Zahlen  $t$  seien wie im Beweis von Proposition 3.2 definiert.

Sei  $v \in \ell_\infty^{|\mathcal{P}|}$  beliebig und

$$\begin{aligned} \mu &= \|v\|_\infty \\ &= \max_{Y \in \mathcal{P}} |v_Y|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \|\Lambda(v)\|_1 &= \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}} |v_Y| \\
&\leq \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}} \mu \\
&= \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t} \cdot \mu \\
&= \mu \cdot \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle Komponenten des Vektors  $v$  den gleichen Betrag haben. Die Norm des Operators  $\Lambda$  kann durch zwei Integrale abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\int_0^{|X|} \frac{1}{\eta+1} d\eta &\leq \|\Lambda\| \leq 1 + \int_1^{|X|} \frac{1}{\eta} d\eta; \\
\ln(|X|+1) &\leq \|\Lambda\| \leq 1 + \ln|X|. \\
\Rightarrow \quad \|\Lambda\| &\in \Theta(\ln|X|).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Damit ist  $\|\Lambda\|$  hinreichend genau abgeschätzt. Seien  $v$  und  $\mu$  wie in (3.10). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda'(v)\|_2^2 &= \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}} v_Y^2 \\
&\leq \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}} \mu^2 \\
&= \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t} \cdot \mu^2 \\
&= \mu^2 \cdot \sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle Komponenten des Vektors  $v$  den gleichen Betrag haben. Analog zu (3.12) ist  $\|\Lambda'\| \in \Theta\left(\sqrt{\ln|X|}\right)$ .

Sei nun  $u \in \ell_2^{|\mathcal{P}|}$  beliebig.

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda''(u)\|_1 &= \sum_{t=1}^{|X|} \sqrt{\frac{1}{t \cdot |\mathcal{P}_t|}} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}} |u_Y| \\
 &= \sum_{t=1}^{|X|} \sqrt{\frac{1}{t}} \cdot \sum_{Y \in \mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{P}_t|}} \cdot |u_Y| \\
 &\leq \sum_{t=1}^{|X|} \sqrt{\frac{1}{t}} \cdot \left( \underbrace{\sqrt{\sum_{Y \in \mathcal{P}} \frac{1}{|\mathcal{P}_t|}}}_{=1} \cdot \sqrt{\sum_{Y \in \mathcal{P}_t} |u_Y|^2} \right) \quad (\text{nach Cauchy-Schwarz}) \\
 &= \sum_{t=1}^{|X|} \sqrt{\frac{1}{t}} \cdot \sqrt{\sum_{Y \in \mathcal{P}_t} |u_Y|^2} \\
 &\leq \sqrt{\sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t}} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^{|X|} \sum_{Y \in \mathcal{P}_t} |u_Y|^2} \quad (\text{nach Cauchy-Schwarz}) \\
 &= \sqrt{\sum_{t=1}^{|X|} \frac{1}{t}} \cdot \|u\|_2.
 \end{aligned}$$

Damit ist  $\|\Lambda''\| \in \mathcal{O}\left(\sqrt{\ln |X|}\right)$  und wegen

$$\begin{aligned}
 &\Lambda = \Lambda'' \circ \Lambda' \\
 \text{folgt} &\quad \|\Lambda\| \leq \|\Lambda''\| \cdot \|\Lambda'\|; \\
 \Rightarrow &\quad C_1 \cdot \ln |X| \leq C_2 \cdot \sqrt{\ln |X|} \cdot \|\Lambda''\| \quad \text{für geeignete } C_1, C_2 > 0. \\
 \Rightarrow &\quad \|\Lambda''\| \in \Omega\left(\sqrt{\ln |X|}\right). \\
 \Rightarrow &\quad \|\Lambda''\| \in \Theta\left(\sqrt{\ln |X|}\right).
 \end{aligned}$$

### 3.4 Dimensionsreduktion ohne Vergrößerung der Verzerrung

Es soll nun wieder um Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung gehen. Eine  $n$ -elementige Punktmenge  $X$  im  $\ell_2$  spannt einen affinen Unterraum  $U$  mit  $\dim(U) \leq n - 1$  auf. Da die euklidischen Abstände zweier beliebiger Punkte invariant gegenüber Verschiebung und Drehung sind, kann man einen Punkt  $x \in X$  in den Koordinatenursprung verschieben und sich dann auf den Unterraum  $U - x$  beschränken. Man kommt mit einer Dimension von höchstens  $\dim(U) \leq n - 1$  aus, ohne die Distanzen zu verändern.

Im Banachraum  $\ell_p$  mit  $p \neq 2$  sind die Abstände zweier Punkte nicht mehr invariant gegenüber Drehungen. Aber nach [79] kann man sich auf eine Dimension von höchstens  $\binom{n}{2}$  beschränken, ohne die Abstände zweier beliebiger Punkte einer  $n$ -elementigen Punktmenge zu verändern.

### 3.5 Berechnung einer optimalen Einbettung in den euklidischen Raum

Wie kann man einen gegebenen Graphen mit optimaler Verzerrung in den euklidischen Raum einbetten? Um dies zu erklären, wird hier weitgehend [64] genutzt. Sei  $G = (V, E, w)$  ein Graph mit  $n = |V|$  Knoten und  $\varphi : G \rightarrow \ell_2^d$  eine Einbettung in den euklidischen Raum.  $M \in \mathbb{R}^{n \times d}$  sei die Koordinatenmatrix des Bildes der Einbettung in den  $\ell_2^d$  (mit irgendeiner Dimension  $d$ ), wobei die Zeile  $m_i$  der Matrix  $M$  die Koordinaten des Bildes des Knotens  $v_i \in V$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) enthält. Dann ist  $X := MM^T$  eine positiv semidefinite Matrix, und es gilt:

$$\begin{aligned} \|\varphi(v_i) - \varphi(v_j)\|_2^2 &= (m_i - m_j)^T (m_i - m_j) \\ &= x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sei ferner

$$\tilde{\zeta} := \frac{1}{\zeta^2(\varphi, G)}. \quad (3.14)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $\|\varphi\|_{Lip} = 1$  und  $\zeta(\varphi, G) = \|\varphi^{-1}\|_{Lip}$ . Anderenfalls multipliziere alle Koordinaten mit  $\frac{1}{\|\varphi\|_{Lip}}$ . Damit gilt:

$$\tilde{\zeta} \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j) \leq \|\varphi(v_i) - \varphi(v_j)\|_2^2 \leq \text{dist}_G^2(v_i, v_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Um die Verzerrung zu optimieren, kann man folgendes semidefinite Programm lösen:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{\zeta} \\ \text{s.t.} \quad & \langle E_{ij}, X \rangle \leq \text{dist}_G^2(v_i, v_j) \quad 1 \leq i < j \leq n \\ & \tilde{\zeta} \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j) - \langle E_{ij}, X \rangle \leq 0 \quad 1 \leq i < j \leq n \\ & X \succeq 0 \\ & \tilde{\zeta} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei ist  $E_{ij} := (y_i - y_j)(y_i - y_j)^T$ , wobei  $y_1, y_2, \dots, y_n$  die  $n$  Einheitsvektoren des Raumes  $\ell_2^n$  sind. Das Produkt in spitzen Klammern ist wie folgt definiert:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}.$$

Sei  $\tilde{\zeta}^*$  der Optimalwert des semidefiniten Optimierungsproblems, dann ist offensichtlich  $\zeta_2(G) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\zeta}^*}}$  die optimale Verzerrung des Graphen unter allen Einbettungen

in den  $\ell_2$ . Da eine optimale Matrix  $X^*$  des Optimierungsproblems positiv semidefinit ist, kann sie wie folgt zerlegt werden:



### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\begin{aligned} X^* &= U \Lambda U^T \\ &= \underbrace{U \sqrt{\Lambda}}_{=M^*} \cdot (U \sqrt{\Lambda})^T; \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei  $\Lambda$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte von  $X^*$  und  $U$  die Matrix mit den Eigenvektoren von  $X^*$  ist. Die Wurzel wird komponentenweise gezogen. Diese Zerlegung liefert die Koordinatenmatrix  $M^*$  einer optimalen Einbettung  $\varphi^*$  in den euklidischen Raum. Da einige Eigenwerte der Matrix  $X^*$  null sein können, kann man die entsprechenden Spalten der Matrix  $M^*$  streichen und somit die Dimension der Einbettung verringern, ohne die Verzerrung zu verändern.

So weit reichen die Ergebnisse aus [64]. Aber mir fiel später noch eine Kleinigkeit auf, die ich hier kurz erwähnen möchte:

**Beobachtung 3.7** Sei  $\mu$  die Anzahl der positiven Eigenwerte einer optimalen Matrix  $X^*$  des semidefiniten Programms (3.15). Dann hat die affine Hülle des Bildes der Einbettung, das durch die Matrix  $M^*$  (mit  $M^* (M^*)^T = X^*$ ) repräsentiert wird, entweder die Dimension  $\mu$  oder die Dimension  $\mu - 1$ .

**Beweis:** Sei  $\mu$  die Anzahl der positiven Eigenwerte einer optimalen Matrix  $X^* = U \Lambda U^T$ , wobei  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von  $X^*$  und  $U$  eine Matrix mit den Eigenvektoren von  $X^*$  ist. Dann hat die Matrix  $M^* = U \sqrt{\Lambda}$  den Rang  $\mu$ , da alle Spalten der Matrix  $U$  orthogonal sind (siehe Gleichung 3.16). Somit spannen die Zeilen der Matrix  $M^*$  einen  $\mu$ -dimensionalen Unterraum  $R$  des  $\ell_2^n$  auf. Subtrahiert man die Zeile  $m_{1,\cdot}$  von allen Zeilen der Matrix  $M^*$ , so erhält man eine Matrix  $\hat{M}$ , deren Zeilen einen Unterraum  $\hat{R}$  mit  $\dim(\hat{R}) \leq \mu$  aufspannen. Liegt  $m_{1,\cdot}$  in diesem Unterraum, so gilt:  $\dim(\hat{R}) = \dim(R) = \mu$ . Anderenfalls ist  $\dim(R) = \dim(\hat{R}) + 1$ . ■

Will man eine optimale Einbettung berechnen und gleichzeitig die Dimension der Einbettung so klein wie möglich halten, so kann man noch fordern, dass der Knoten  $v_1 \in V$  in den Koordinatenursprung eingebettet wird. Dies erreicht man, indem man noch die Nebenbedingung

$$x_{11} = 0 \quad (3.17)$$

in das semidefinite Programm (3.15) einfügt. Man zerlegt die optimale Matrix  $X^*$  wieder wie in Gleichung (3.16) und streicht alle Nullspalten aus der Matrix  $M^*$ .

## 3.6 Das duale Programm

Linial, London und Rabinovich bewiesen in [67], dass ein metrischer Raum  $(X, \rho)$  der Mächtigkeit  $|X| = n < \infty$  mit Verzerrung  $\zeta$  in den euklidischen Raum eingebettet werden kann, wenn für alle Matrizen  $Q \in \mathcal{Q}_n$  gilt:

$$\sum_{q_{ij} > 0} q_{ij} \cdot \rho^2(i, j) + \zeta^2 \cdot \sum_{q_{ij} < 0} q_{ij} \cdot \rho^2(i, j) \leq 0. \quad (3.18)$$



### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\begin{aligned}
\min_{\tilde{z}, \hat{z}} \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{z}_{ij} \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{z}_{ij} \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j) \leq -1 \\
& \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\tilde{z}_{ij} + \hat{z}_{ij}) \cdot E_{ij}}_{=: Q} \succeq 0 \\
& \tilde{z} \geq 0 \\
& \hat{z} \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Für die Einträge der Matrix  $Q$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
q_{ij} &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{z}_{ki} + \hat{z}_{ki}) + \sum_{k=i+1}^n (\tilde{z}_{ik} + \hat{z}_{ik}), & i = j \\ -\tilde{z}_{ij} - \hat{z}_{ij}, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\implies \quad & Q \cdot \mathbf{1} = 0; \\
\implies \quad & Q \in \mathcal{Q}_n.
\end{aligned}$$

Da die positiv semidefiniten Matrizen einen Kegel in  $\mathcal{S}^n$  bilden, ist auch  $\mathcal{Q}_n$  ein Kegel in  $\mathcal{S}^n$ . Also können wir eine zulässige Matrix mit dem Faktor  $\frac{1}{\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\hat{z}_{ij}| \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j)}$  multiplizieren, ohne unzulässig zu werden. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\begin{aligned}
& \tilde{z}_{ij} = 0, & \text{falls } \hat{z}_{ij} < 0; \\
\text{und} \quad & \hat{z}_{ij} = 0, & \text{falls } \tilde{z}_{ij} > 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann wegen schwacher Dualität und der Definition von  $\tilde{\zeta}$  (siehe (3.14)):

$$\underbrace{\sum_{q_{ij} > 0} q_{ij} \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j)}_{=1} + \zeta^2 \cdot \underbrace{\sum_{q_{ij} < 0} q_{ij} \cdot \text{dist}_G^2(v_i, v_j)}_{\leq -\tilde{\zeta}} \leq 0.$$

■

**Beobachtung 3.9** Für positiv gewichtete Graphen  $G = (V, E, w)$  gilt starke Dualität<sup>2</sup> zwischen dem primalen Programm (3.15) und dem dualen Programm (3.20).

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass das primale Programm eine strikt zulässige Lösung  $(X, \tilde{\zeta})$  und einen endlichen Optimalwert besitzt. Dann ist die Regularitätsbedingung von Slater erfüllt, und es gilt starke Dualität (siehe [53]).

Seien

<sup>2</sup>Das heißt, beide Programme sind zulässig und haben den gleichen Optimalwert.

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$X = \frac{\tilde{w}^2}{3} \cdot I_n$$

und 
$$\tilde{\zeta} = \frac{\tilde{w}^2}{3 \cdot \text{diam}^2(G)};$$

wobei  $\tilde{w}$  die Länge einer kürzesten Kante in  $E = E(G)$  ist. Dann ist  $X$  positiv definit,  $\tilde{\zeta} > 0$ , und alle Ungleichungsbedingungen sind strikt erfüllt.

Der Optimalwert des primalen Programms ist immer endlich, weil  $\tilde{\zeta}$  nie größer als 1 sein kann. ■

Aus der Ungleichung (3.18) folgerten Linial und Magen in [69] die Gleichung

$$\zeta_2(X, \rho) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_n} \begin{cases} \sqrt{\frac{\sum_{q_{ij} > 0} q_{ij} \cdot \rho^2(i, j)}{\sum_{q_{ij} < 0} |q_{ij}| \cdot \rho^2(i, j)}}, & \text{falls } Q \text{ einen Eintrag } q_{ij} < 0 \text{ hat;} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Dass hier wirklich Gleichheit gilt, wissen wir erst, nachdem wir die starke Dualität gezeigt haben.

Der Aufsatz [69] macht eine weitere interessante Aussage über eine dual optimale Matrix  $Q \in \mathcal{Q}_n$ :

**Aussage 3.10** Für eine Matrix  $Q \in \mathcal{Q}_n$ , die Gleichung (3.21) erfüllt, gilt:

- $q_{ij} \leq 0$  für alle Punktpaare  $x_i \neq x_j \in X$  mit  $\frac{\rho(x_i, x_j)}{\|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2} < \|\varphi^{-1}\|_{Lip}$ ;
- $q_{ij} \geq 0$  für alle Punktpaare  $x_i \neq x_j \in X$  mit  $\frac{\|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2}{\rho(x_i, x_j)} < \|\varphi\|_{Lip}$ .

Das heißt:  $q_{ij}$  ist null für alle Punktpaare  $x_i \neq x_j \in X$ , für die  $\frac{\|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2}{\rho(x_i, x_j)}$  weder minimal noch maximal wird. Diese Bedingungen können die Konstruktion einer optimalen Matrix  $Q \in \mathcal{Q}_n$  und damit die Berechnung der optimalen Verzerrung  $\zeta_2(G)$  erleichtern.

**Beweisideen aus [69]:** Sei  $x_i \neq x_j \in X$  ein beliebiges Punktpaar mit

$\frac{\rho(x_i, x_j)}{\|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2} < \|\varphi^{-1}\|_{Lip}$  gewählt. Dann kann man  $\rho^{ij}(x_i, x_j) := \|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2 \cdot \|\varphi^{-1}\|_{Lip}$  und  $\rho^{ij}(y, z) = \rho(y, z) \quad \forall \{y, z\} \neq \{x_i, x_j\}$  setzen.

Der Distanzraum  $(X, \rho^{ij})$  muss dann nicht mehr die Dreiecksungleichung erfüllen, aber er erfüllt immer noch die Bedingung (D4) aus dem Abschnitt 2.2 dieser Arbeit. Die Definition der Einbettung, der Expansion, der Schrumpfung und der Verzerrung lässt sich leicht auf solche Distanzräume erweitern. Ferner gilt für solche Distanzräume auch noch die Beziehung (3.21), weil im Beweis der Ungleichung (3.18) die Dreiecksungleichung nicht benutzt wurde. Linial und Magen folgern für die Einbettung

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$\varphi^{ij} : (X, \rho^{ij}) \rightarrow \ell_2$ , die sich von der optimalen Einbettung  $\varphi : (X, \rho) \rightarrow \ell_2$  nur durch die veränderte Distanzfunktion im Urbildraum unterscheidet:

$$\begin{aligned} & \left\| (\varphi^{ij})^{-1} \right\|_{Lip} = \|\varphi^{-1}\|_{Lip} \\ & \wedge \quad \|\varphi^{ij}\|_{Lip} \leq \|\varphi\|_{Lip}; \\ \implies & \zeta(\varphi^{ij}, (X, \rho^{ij})) \leq \zeta(\varphi, (X, \rho)). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Andererseits ist  $\rho^{ij}(x_i, x_j) > \rho(x_i, x_j)$ , und darum muss  $q_{ij} \leq 0$  gelten. Analog zeigt man den anderen Fall. ■

## 3.7 Einbettung distanzregulärer Graphen in den euklidischen Raum

Sei  $G = (V, E)$  ein distanzregulärer Graph mit  $n := |V|$  und  $A$  seine Adjazenzmatrix mit den sortierten Eigenwerten  $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$ . Ferner seien  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{\text{diam}(G)}$  Polynome, so dass gilt:

$$A^{(i)} = \nu_i(A) \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}. \quad (3.23)$$

Vallentin bewies in [96]:

#### Satz 3.11

$$\zeta_2^2(G) \geq \frac{\text{diam}^2(G) \cdot k_{\text{diam}(G)}}{k_1} \cdot \min_{2 \leq j \leq n} \left\{ \frac{k_1 - \theta_j}{k_{\text{diam}(G)} - \nu_{\text{diam}(G)}(\theta_j)} \right\}; \quad (3.24)$$

wobei  $k_1$  und  $k_{\text{diam}(G)}$  wie in Abschnitt 2.9 definiert sind. Zum Beweis bringt Vallentin zunächst folgendes Lemma:

**Lemma 3.12** *Sei  $G = (V, E)$  ein distanzregulärer Graph. Dann existiert eine exakte Einbettung in den euklidischen Raum mit optimaler Verzerrung.*

**Beweis nach [96]:** Sei  $\varphi$  eine optimale Einbettung von  $G = (V, E)$  mit  $\zeta = \zeta_2(G) = \|\varphi\|_{Lip}$  ( $\|\varphi^{-1}\|_{Lip} = 1$ ) und  $B = MM^T$  die Grammatrix wie in (3.13), so dass gilt:

$$\text{dist}_G^2(u, v) \leq b_{ii} + b_{jj} - 2b_{ij} \leq \zeta^2 \cdot \text{dist}_G^2(u, v) \quad \forall u, v \in V. \quad (3.25)$$

$\mathcal{A}$  sei die kommutative Algebra, die von den  $i$ -ten Adjazenzmatrizen  $A^{(i)}$  generiert wird ( $i = 0, 1, \dots, \text{diam}(G)$ ).  $\mathcal{A}$  heißt *Bose-Mesner-Algebra* von  $G$  und ist mit dem inneren Produkt  $\langle A, C \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot c_{ij}$  ausgestattet.

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

Vallentin definiert dann die Grammatrix  $\bar{B}$  als Projektion der Matrix  $B$  auf  $\mathcal{A}$ .  $\bar{B}$  soll eine exakte Einbettung  $\bar{\varphi}$  mit  $\zeta(\bar{\varphi}, G) = \zeta$  repräsentieren.

- $\bar{B}$  muss positiv semidefinit sein: Seien  $V_1, V_2, \dots, V_k$  die orthogonalen Eigenräume von  $\mathcal{A}$ . Die zugehörigen Projektionsmatrizen  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sind positiv semidefinit und damit  $\langle B, E_i \rangle \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Somit ist  $\bar{B} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle B, E_i \rangle}{\langle E_i, E_i \rangle} \cdot E_i$  positiv semidefinit. ✓

- $\bar{\varphi}$  muss exakt sein:  $\bar{B}$  kann auch wie folgt dargestellt werden:  

$$\bar{B} = \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} \frac{\langle B, A^{(i)} \rangle}{\langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle} \cdot A^{(i)}.$$
 Seien  $u, v \in V$  beliebig und  $\rho = \text{dist}_G(u, v)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{uv} &= \sum_{k=1}^{\text{diam}(G)} \frac{\langle B, A^{(k)} \rangle}{\langle A^{(k)}, A^{(k)} \rangle} \cdot a_{uv}^{(k)} \\ &= \frac{\langle B, A^{(\rho)} \rangle}{\langle A^{(\rho)}, A^{(\rho)} \rangle} \cdot a_{uv}^{(\rho)} \\ &= \frac{1}{|R_\rho|} \cdot \sum_{\{x,y\} \in R_\rho} b_{x,y}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

mit  $R_\rho = \{\{x, y\} \in V^2 \mid \text{dist}_G(x, y) = \rho\}$ . Aus (3.26) folgt unmittelbar, dass  $\bar{\varphi}$  eine exakte Einbettung ist. ✓

- Die Verzerrung von  $\bar{\varphi}$  soll nicht größer als die Verzerrung von  $\varphi$  sein: Aus (3.26) und (3.25) folgt:

$$\begin{aligned} \text{dist}_G^2(u, v) &\leq \frac{1}{|R_\rho|} \cdot \sum_{\{x,y\} \in R_\rho} (b_{xx} + b_{yy} - 2b_{xy}) \\ &= \bar{b}_{uu} + \bar{b}_{vv} - 2\bar{b}_{uv} \\ &\leq \zeta^2 \cdot \text{dist}_G^2(u, v) \quad \forall u, v \in V \quad \text{mit} \quad \text{dist}_G(u, v) = \rho \\ &\quad \forall \rho \in \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Beweisskizze für (3.24) nach [96]:** Es wird (3.21) verwendet und eine positiv semidefinite Matrix  $Q$  mit Zeilensumme null konstruiert. Sei dazu  $\beta \in \{1, 2, \dots, \text{diam}(G)\}$  und

$$Q_{\alpha,\beta} := (k_1 - \alpha k_\beta) \cdot A^{(0)} - A^{(1)} + \alpha \cdot A^{(\beta)}.$$

Nach (3.21) gilt dann:

$$\zeta_2^2(G) \geq \left\{ \frac{k_\beta \cdot \beta^2 \cdot \alpha}{k_1} \mid Q_{\alpha,\beta} \succeq 0 \right\}.$$

Es wird gezeigt, dass

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\alpha = \min_{2 \leq j \leq n} \left\{ \frac{k_1 - \theta_j}{k_\beta - \nu_\beta(\theta_j)} \right\};$$

hinreichend für  $Q_{\alpha,\beta} \succeq 0$  ist. Mit  $\beta := \text{diam}(G)$  folgt die Aussage. ■

Vallentin folgert aus dem in Ungleichung (3.24) vorgestellten Ergebnis:

**Satz 3.13** Für alle gleichgewichteten Hamminggraphen  $H(q, d)$  und gleichgewichteten Johnsongraphen  $J(\nu, \mu)$  gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_2(H(q, d)) &= \sqrt{d} \\ \zeta_2(J(\nu, \mu)) &= \sqrt{\mu} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Insbesondere hat also jeder gleichgewichtete Hyperwürfel  $Q_d$  eine optimale Verzerrung von  $\sqrt{d} = \sqrt{\log |V|}$  im euklidischen Raum (siehe dazu auch Abbildung 3.4).

**Beweisideen aus [96]:** Vallentin benutzt, dass die Polynome  $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{\text{diam}(G)}$  und die Eigenwerte sowohl der Hamming- als auch der Johnsongraphen bereits bekannt sind und verweist dabei auf [11]. ■

## 3.8 Einbettung weiterer Graphenklassen in den euklidischen Raum

Der gleichgewichtete vollständige Graph  $K_n$  kann offensichtlich isometrisch in den gleichseitigen  $(n - 1)$ -dimensionalen Simplex abgebildet werden.

Linial und Magen zeigten in [69], dass  $\varphi : C_n \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\varphi(v_j) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi j}{n} \\ \sin \frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix} \quad (j = 0, 1, \dots, n - 1) \tag{3.28}$$

eine optimale Einbettung des gleichgewichteten Kreises  $C_n = (\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}\} \cup \{e_n = \{v_{n-1}, v_0\}\})$  in den euklidischen Raum ist. Zum Beweis konstruierten sie eine positiv semidefinite Matrix mit Zeilensumme null und setzten sie in die Gleichung (3.21) ein. Die optimale Verzerrung des gleichgewichteten Kreises  $C_n$  mit gerader Kantenzahl  $n$  beträgt

$$\zeta(\varphi, C_n) = \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \tag{3.29}$$

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

und ist nicht größer als die rechte Seite der Gleichung (3.21). Somit muss die Einbettung  $\varphi$  optimal sein. Im Kapitel 6 dieser Arbeit wird auf diese Einbettung zurückgekommen werden.

In [69] wird auch ein ähnliches Resultat für Produkte  $H = \prod_{i=1}^m C_{n_i}$  von Kreisen bewiesen. Der *Produktgraph*  $G = \prod_{i=1}^m G_i$  hat die Knotenmenge  $V = \{(v_1, v_2, \dots, v_m) \mid v_i \in V(G_i) \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$ . Zwei Knoten  $u = (u_1, \dots, u_m)$  und  $v = (v_1, \dots, v_m)$  sind genau dann adjazent, wenn es ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  gibt mit  $\{u_j, v_j\} \in E(G_j)$  und  $u_i = v_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ .

**Satz 3.14**  $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$  mit

$$\varphi((v_1, \dots, v_m)) = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi v_1}{n_1} \\ \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_1}}{\sin \frac{2\pi v_1}{n_1}} \\ \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_1}}{\sin \frac{2\pi v_1}{n_1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \cos \frac{2\pi v_m}{n_m} \\ \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_m}}{\sin \frac{2\pi v_m}{n_m}} \\ \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_m}}{\sin \frac{2\pi v_m}{n_m}} \\ \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_m}}{\sin \frac{2\pi v_m}{n_m}} \end{bmatrix}$$

ist eine optimale Einbettung des gleichgewichteten Produktgraphen  $H$  in den euklidischen Raum.

**Beweisideen aus [69]:** Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{Lip} &= \max_{\substack{u, v \in V \\ u \neq v}} \frac{\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_2}{\text{dist}_H(u, v)} \\ &= 1; \end{aligned}$$

wobei das Maximum genau dann angenommen wird, wenn  $\{u, v\} \in E$ . Anders als bei gleichgewichteten Kreisen gerader Länge nimmt der Quotient  $\frac{\text{dist}_H(u, v)}{\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_2}$  nicht immer dann sein Maximum über allen Knotenpaaren  $u, v \in V$  mit  $u \neq v$  an, wenn  $u$  und  $v$  antipodal liegen. Um das Problem in den Griff zu bekommen, definiert Linial und Magen folgenden ganzzahligen Abstandsvektor zwischen zwei Knoten  $u, v \in V$ :

$$h(u, v) := [\text{dist}_{G_i}(u_i, v_i)]_{i=1}^m \tag{3.30}$$

Es ist klar, dass für zwei Knotenpaare  $\{u, v\}, \{\tilde{u}, \tilde{v}\} \in V^2$  mit  $h(u, v) = h(\tilde{u}, \tilde{v})$ :

$$\frac{\text{dist}_H(u, v)}{\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_2} = \frac{\text{dist}_H(\tilde{u}, \tilde{v})}{\|\varphi(\tilde{u}) - \varphi(\tilde{v})\|_2}$$



### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

gilt. Für alle möglichen solchen Abstandsvektoren  $h \in \bigotimes_{i=1}^m \left\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor\right\}$  wird dann eine positiv definite Matrix  $Q(h)$  mit Zeilensumme null definiert und gezeigt, dass

$$\sqrt{\frac{\sum_{q_{ij}(h) > 0} q_{ij}(h) \cdot \text{dist}_H^2(v_i, v_j)}{\sum_{q_{ij}(h) < 0} |q_{ij}(h)| \cdot \text{dist}_H^2(v_i, v_j)}} = \frac{\text{dist}_H(v_k, v_l)}{\|\varphi(v_k) - \varphi(v_l)\|_2} \quad \forall (v_k, v_l) \in V^2 \quad \text{mit} \quad k \neq l \quad \text{und} \quad h = h(v_k, v_l) \quad (3.31)$$

gilt. Die Verzerrung  $\zeta(\varphi, H) = \|\varphi^{-1}\|_{Lip}$  ist das Maximum über beiden Seiten der Gleichung (3.31), und nach Gleichung (3.21) ist die Optimalität der Einbettung bewiesen. ■

## 3.9 Einbettungen in den $\ell_1$

Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum endlicher Kardinalität. Nach [31] ist  $\xi_S$  eine *Schnitt-Halbmétrie* für einen Schnitt  $S \subset X$  mit  $S \neq \emptyset$ , falls gilt:

$$\xi_S(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in S \quad \vee \quad x, y \in X \setminus S \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Da  $\xi_S$  für alle  $S \in \mathcal{S}$  eine Halbmétrie ist, kann  $\xi_S$  für jedes solche  $S$  wie in (2.2) als Vektor mit  $\binom{|X|}{2}$  Komponenten geschrieben werden. Deza und Laurent zeigten in [31]:

**Proposition 3.15** *Ein metrischer Raum  $(X, \rho)$  endlicher Kardinalität kann genau dann isometrisch in den  $\ell_1$  eingebettet werden, wenn  $\rho$  als nichtnegative Linearkombination von Schnitt-Halbmétriken dargestellt werden kann.*

**Beweis nach [31]:**

$\Leftarrow$ :

Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum und

$$\rho = \sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot \xi_{S_i}$$

mit  $S_i \in \mathcal{S}(X) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}.$

Dann definiert man:

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\varphi : X \longrightarrow \ell_1^d$$

mit 
$$[\varphi(x)]_k = \begin{cases} \lambda_k, & x \in S_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x \in X;$$

$$\implies \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_1 = \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

$\implies$ :

Wegen der Additivität der Manhattannorm genügt es, die Behauptung für eine isometrische Einbettung in den  $\ell_1^1$  zu zeigen. Wir nehmen somit an, dass  $\rho(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$  für alle  $x, y \in X$  gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2) \leq \dots \leq \varphi(x_n)$  mit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Dann ist

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)) \cdot \xi_{S_i}$$

mit  $S_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ . ■

Dieses Ergebnis wurde zuerst von Assouad (1980) gefunden.

Es folgt, dass alle gewichteten Bäume isometrisch in den Raum  $\ell_1$  eingebettet werden können. Jeder Kante  $e \in E$  des Baumes  $T = (V, E, w)$  kann nämlich eindeutig ein Schnitt  $S(e) \subset V$  zugeordnet werden<sup>3</sup>. Da es in einem Baum für je zwei Knoten  $u, v \in V(T)$  genau einen  $u$ - $v$ -Weg  $P(u, v)$  gibt, gilt:

$$\begin{aligned} \text{dist}_T(u, v) &= \sum_{e \in E(P(u, v))} w(e) \\ &= \sum_{e \in E(P(u, v))} w(e) \cdot \xi_{S(e)}(\{u, v\}) \\ \implies \text{dist}_T &= \sum_{e \in E(T)} w(e) \cdot \xi_{S(e)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ein geometrischer Beweis geht wie folgt: Sei  $y_k \in \ell_1^{|V|-1}$  ( $k = 1, \dots, |V| - 1$ ) der Vektor, dessen  $k$ -te Koordinate 1 und dessen sonstige Koordinaten 0 sind,  $E(T) := \{e_1, e_2, \dots, e_{|V|-1}\}$  und  $\varphi(e_k) = w(e_k) \cdot y_k$ . Bettet man den Knoten  $u \in V$  in den Koordinatenursprung des Raumes  $\ell_1^{|V|-1}$  ein, so erhält man folgende Einbettung für alle Knoten  $v \in V$ :

$$\varphi(v) = \sum_{e \in P(u, v)} \varphi(e)$$

Es ist sofort klar, dass diese Einbettung isometrisch ist.

Deza und Laurent zeigten in [31], dass das Entscheidungsproblem, ob ein gegebener Graph  $G$  isometrisch in den  $\ell_1$  eingebettet werden kann, NP-vollständig ist. Denn Karp zeigte 1972, dass das (NP-vollständige) Partitionsproblem polynomiell auf das Problem des maximalen Schnitts reduziert werden kann. Deza und Laurent zeigten nun, dass das Problem des maximalen Schnitts polynomiell auf das Entscheidungsproblem, ob

<sup>3</sup>Ein Knoten  $v \in V$  gehöre genau dann zu  $S(e)$ , wenn es nach dem Löschen der Kante  $e$  einen  $x$ - $v$ -Weg in  $T \setminus \{e\}$  für einen festen Knoten  $x \in V$  gibt.

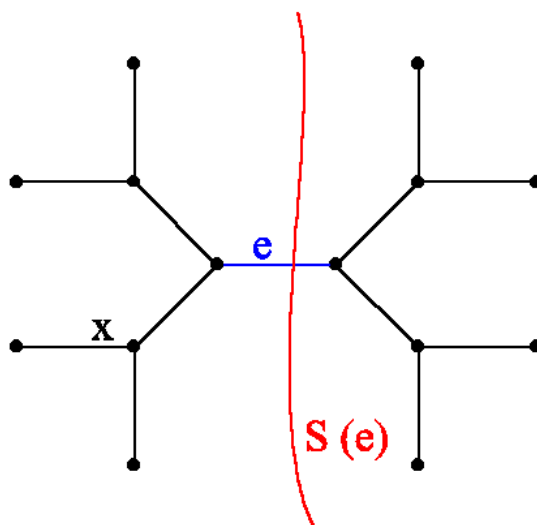


Abbildung 3.1: Eine Kante  $e$  eines Baumes und der Schnitt  $S(e)$ , der ihr eindeutig zugeordnet werden kann.

ein gegebener Graph isometrisch in den  $\ell_1$  eingebettet werden kann, reduziert werden kann.

Weitere Informationen über Entscheidungsprobleme und die Methode der polynomiellen Reduktion finden sich in [61].

Der vollständige bipartite Graph  $K_{2,3}$  kann nicht isometrisch in den Raum  $\ell_1$  eingebettet werden. Gupta, Newman, Rabinovich und Sinclair geben in [44] an, dass ein Graph genau dann isometrisch in den Raum  $\ell_1$  eingebettet werden kann, wenn er keinen  $K_{2,3}$ -Minor enthält.

Es gibt auch einen Zusammenhang zwischen der optimalen Verzerrung eines Graphen im Raum  $\ell_1$  und *Mehrgüterfluss-Problemen*. Die folgenden Definitionen sind an [67] und [44] angelehnt:

**Definition 3.16** Ein ungerichtetes Netzwerk  $\mathcal{N}$  über einem Graphen  $G = (V, E, w)$  ist ein 6-Tupel  $\mathcal{N} = (V, E, C, D, \sigma, \tau)$  mit  $|D| = |\sigma| = |\tau| =: k$ , wobei  $C : V^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine symmetrische Kapazitätsfunktion ( $C(u, v) = C(v, u) \quad \forall u, v \in V$ ),  $\sigma, \tau \subseteq V$  eine Menge von Quellen bzw. Senken mit  $\sigma_i \neq \tau_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  ist und  $D_1, D_2, \dots, D_k \in \mathbb{R}_+$  als die Nachfragen der Güter  $i = 1, \dots, k$  bezeichnet werden. Man setzt:  $C(u, v) = 0$  für alle Knotenpaare  $\{u, v\} \notin E$  und  $C(v, v) = 0$  für alle Knoten  $v \in V$ .

**Definition 3.17** Ein Fluss sei eine schiefsymmetrische Funktion  $f : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(u, v) = -f(v, u) \quad \forall u, v \in V$ . Eine Menge von Flüssen  $f_1, \dots, f_k$  heißt zulässig, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{i=1}^k |f_i(u, v)| \leq C(u, v) \quad \forall u, v \in V;$$

$$\sum_{u \in V} f_i(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{\sigma_i, \tau_i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (\text{Kirchhoffsches Gesetz}).$$

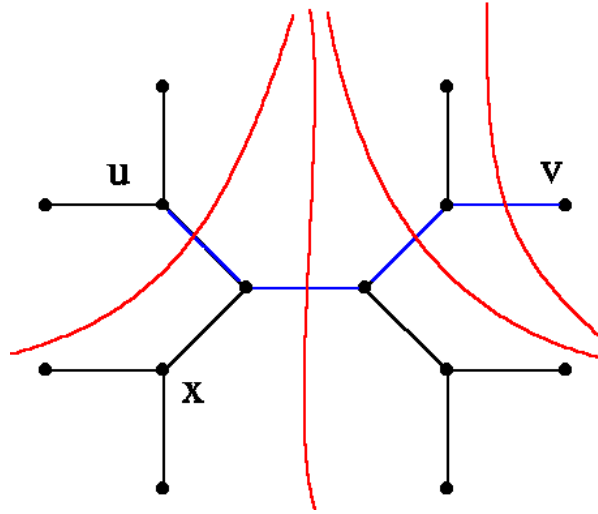


Abbildung 3.2: Der eindeutige Weg zwischen zwei Baumknoten und die Schnitte, die den Wegkanten zugeordnet werden.

Das Mehrgüterfluss-Problem über dem Netzwerk  $\mathcal{N}$  lautet nun:

$$\begin{aligned}
 & \max \lambda \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in V} f_i(\sigma_i, v) = \lambda D_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \\
 & \sum_{v \in V} f_i(v, \tau_i) = \lambda D_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \\
 & f_i(u, v) + f_i(v, u) = 0 \quad \forall u, v \in V, i \in \{1, \dots, k\} \\
 & \sum_{i=1}^k |f_i(u, v)| \leq C(u, v) \quad \forall u, v \in V \\
 & \sum_{u \in V} f_i(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{\sigma_i, \tau_i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \\
 & \lambda \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Dieses Problem kann effizient gelöst werden.

Um nun das *Problem des minimalen Schnittes* zu beschreiben, wird noch definiert:

$$\Delta_{\sigma\tau}(u, v) := \begin{cases} D_i, & \{u, v\} = \{\sigma_i, \tau_i\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.35}$$

Bei dieser Definition wird vorausgesetzt, dass es keine zwei Indizes  $i \neq j$  gibt mit  $\sigma_i = \sigma_j$  und  $\tau_i = \tau_j$ . Falls dies der Fall wäre, könnte man die beiden Güter  $i$  und  $j$  zusammenfassen.

Da  $\Delta_{\sigma\tau}$  und die Kapazitätsfunktion  $C$  symmetrisch sind und  $\Delta_{\sigma\tau}(v, v) = 0 = C(v, v) \quad \forall v \in V$ , können  $\Delta_{\sigma\tau}$  und  $C$  wie in (2.2) als Vektoren mit je  $\binom{|V|}{2}$  Komponenten geschrieben werden.

Das Problem des minimalen Schnittes im Netzwerk  $\mathcal{N}$  lautet dann:

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\min_{S \in \mathcal{S}(V)} \Xi_S = \frac{C^T \xi_S}{\xi_S^T \Delta \sigma \tau}; \quad (3.36)$$

wobei  $\Xi_S$  der Wert des Mehrgüterschnitts  $S \in \mathcal{S}(V)$  ist. Es gilt stets:

$$\Xi_S \geq \lambda. \quad (3.37)$$

Für  $k = 1$  sagt der Satz von Ford und Fulkerson, dass die Optimalwerte beider Probleme gleich sind (siehe [61]). Für  $k > 1$  kann es eine Dualitätslücke geben, die nach [44] wie folgt definiert werden kann:

$$\gamma_{\mathcal{N}} = \frac{\Xi_{S^*}}{\lambda^*}. \quad (3.38)$$

Dabei sind  $\Xi_{S^*}$  und  $\lambda^*$  die Optimalwerte der beiden Optimierungsprobleme. Nach [44] ist das Problem des minimalen Schnitts NP-schwer. Aber in [67] wurde gezeigt, dass die optimale Verzerrung  $\zeta_1(G)$  der Einbettung des Graphen  $G = (V, E, w)$  eine obere Schranke für die Dualitätslücke  $\gamma_{\mathcal{N}}$  liefert. Mit den in Abschnitt 3.2 erwähnten Resultaten gilt damit:  $\gamma_{\mathcal{N}} \in \mathcal{O}(\log |V|)$ .

Kennt man andererseits eine Dualitätslücke  $\gamma_{\mathcal{N}}$  für ein Netzwerk  $\mathcal{N}$  über dem Graphen  $G = (V, E, w)$ , so hat man folglich eine untere Schranke für die Verzerrung  $\zeta_1(G)$ .

## 3.10 Einbettung einiger Graphenklassen in den $\ell_1$

Linial, London und Rabinovich bewiesen in [67]:

**Proposition 3.18** *Ein gleichgewichteter Kreis  $C_{2m} = (V, E) = (\{v_0, v_1, \dots, v_{2m-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}\} \cup \{e_{2m} = \{v_{2m-1}, v_0\}\})$  mit gerader Kantenzahl kann isometrisch in den Raum  $\ell_1^m$  eingebettet werden.*

**Beweis nach [67]:** Sei  $y_k \in \ell_p$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) der  $k$ -te Einheitsvektor. Dann ist die Einbettung

$$\varphi : C_n \longrightarrow \ell_1^{n/2}$$

mit

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} \sum_{k=1}^i y_k, & i \leq m \\ \sum_{k=i-m+1}^m y_k, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.39)$$

offensichtlich isometrisch. ■

Ein *seriell-paralleler Graph*  $G = (V, E, w, \{s, t\})$  hat zwei ausgezeichnete Knoten  $s, t \in V$  und ist nach [44] wie folgt definiert:

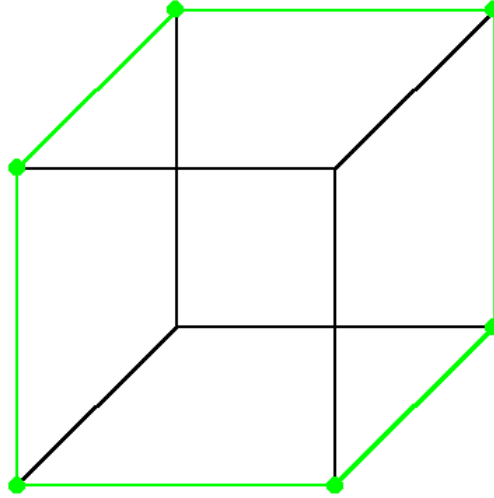


Abbildung 3.3: Isometrische Einbettung eines gleichgewichteten Kreises mit sechs Kanten (grün) in der Manhattanorm. (Der Würfel soll die räumliche Vorstellung verbessern.)

**Konstruktion 3.19** • Der Graph  $(\{s, t\}, \{e = \{s, t\}\}, w, \{s, t\})$  ist ein seriell-paralleler Graph.

- Seien  $G_1 = (V_1, E_1, w, \{s, x\})$  und  $G_2 = (V_2, E_2, w, \{x, t\})$  zwei seriell-parallele Graphen mit  $V_1 \cap V_2 = \{x\}$ . Dann ist auch  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, w, \{s, t\})$  ein seriell-paralleler Graph.
- Seien  $G_1 = (V_1, E_1, w, \{s, t\})$  und  $G_2 = (V_2, E_2, w, \{s, t\})$  zwei seriell-parallele Graphen mit  $V_1 \cap V_2 = \{s, t\}$  und  $|V_2| > 2$ . Dann ist auch  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, w, \{s, t\})$  ein seriell-paralleler Graph.

Ein seriell-paralleler Graph kann auch mit  $G = (V, E, w)$  bezeichnet werden, wenn man nicht wissen will, welche die beiden ausgezeichneten Knoten sind. Gupta, Newman, Rabinovich und Sinclair zeigten in [44]:

**Satz 3.20** Die optimale Verzerrung einer Einbettung eines seriell-parallelen Graphen  $G = (V, E, w, \{s, t\})$  in den  $\ell_1$  ist durch eine Konstante beschränkt.

$$\zeta_1(G) < 14.$$

**Beweisideen nach [44]:** Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass ein seriell-paralleler Graph auch wie folgt konstruiert werden kann:

**Konstruktion 3.21** (i)  $G_2 = (\{v_1, v_2\}, \{\hat{e} = \{v_1, v_2\}\})$  ist ein seriell-paralleler Graph.

- (ii) Sei  $G_k = (V_k, E_k)$  (mit  $k \geq 2$ ) ein seriell-paralleler Graph und  $\tilde{e} = \{x, y\}$  eine seiner Kanten. Ferner sei  $v_{k+1} \notin V_k$ . Dann ist  $G_{k+1} := (V_k \cup \{v_{k+1}\}, E_k \cup \{\{x, v_{k+1}\}, \{y, v_{k+1}\}\})$  ein seriell-paralleler Graph. Die Kante  $\tilde{e}$  heißt Vaterkante des Knotens  $v_{k+1}$ .

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

(iii) Sei  $G_n = (V_n, E_n)$  ein seriell-paralleler Graph. Dann schreiben Gupta, Newman, Rabinovich und Sinclair, dass durch Löschen einer beliebiger Kantenmenge wieder ein seriell-paralleler Graph entsteht<sup>4</sup>.

Da in diesem Beweis mit beliebig gewichteten Graphen gearbeitet wird, kann der dritte Schritt der Konstruktion 3.21 ignoriert werden. Denn eine Kante  $e = \{x, y\} \in E(G_n)$  mit  $w(e) = \text{dist}_{G-e}(x, y)$  hat keinen Einfluss auf die Metrik des Graphen (siehe Beobachtung 2.13).

Durch die Konstruktion 3.21 ohne den dritten Schritt werden die Kanten der Menge  $E_n$  streng hierarchisch geordnet. Die Knoten der Menge  $V_n$  werden halb-hierarchisch geordnet. Denn jeder Knoten  $v \in V_n \setminus \{v_1, v_2\}$  hat eine Vaterkante und damit zwei Elternknoten. Unter Ausnutzung der hierarchischen und halb-hierarchischen Strukturen des Graphen  $G_n = (V_n, E_n, w)$  konstruieren Gupta, Newman, Rabinovich und Sinclair eine neue Metrik  $\rho$  auf der Knotenmenge  $V_n$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\rho(u, v) \leq \text{dist}_{G_n}(u, v) \quad \forall u, v \in V;$
- $14 \cdot \rho(u, v) > \text{dist}_{G_n}(u, v) \quad \forall u, v \in V;$
- $\rho$  ist eine nichtnegative Linearkombination von Schnitt-Halbmetriken.

Der Beweis verwendet implizit eine Einbettung  $f : G_n \rightarrow (V_n, \rho)$  mit  $\zeta(f, G_n) < 14$ , und nach Proposition 3.15 es gibt eine isometrische Einbettung  $(V_n, \rho) \rightarrow \ell_1$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi \circ f, G_n) &\leq \zeta(f, G_n) \cdot \underbrace{\zeta(\varphi, (V_n, \rho))}_{=1} \\ &\leq 14; \end{aligned}$$

wobei  $\varphi \circ f$  die Komposition der Einbettungen  $f$  und  $\varphi$  ist (siehe dazu auch Beobachtung 6.10). ■

## 3.11 Einbettung einer endlichen Punktmenge eines Banachraumes in einen anderen Banachraum

Jeder lineare normierte Raum ist auch ein metrischer Raum. Darum kann jede endliche Punktmenge  $X$  eines Banachraumes isometrisch in den  $\ell_\infty^{|X|}$  eingebettet werden (siehe Abschnitt 3.1). Die minimale Verzerrung einer Einbettung in einen beliebigen  $\ell_p$ -Raum ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ist durch  $\mathcal{O}(\log |X|)$  beschränkt (siehe Abschnitt 3.2).

Arora, Lee und Naor zeigten in [8], dass die minimale Verzerrung einer Einbettung einer endlichen Punktmenge  $X \subset \ell_1$  in den  $\ell_2$  durch  $\mathcal{O}(\sqrt{\log |X|} \cdot \log \log |X|)$  beschränkt ist.

Es ist nicht bekannt, ob diese Schranke scharf ist. Ein ungünstigstes bekanntes Beispiel ist der  $d$ -dimensionale gleichgewichtete Hyperwürfel  $Q_d = (\{0, 1\}^d, E)$ . Er kann mit einer Verzerrung

<sup>4</sup>Der Graph muss aber zumindest zusammenhängend bleiben, um ein seriell-paralleler Graph zu sein.

### 3 Einbettungen in Banachräume mit optimaler Verzerrung

$$\begin{aligned}\zeta_1(Q_d) &= \sqrt{d} \\ &= \sqrt{\log |V(Q_d)|}\end{aligned}$$

in den  $\ell_2$  eingebettet werden. Eine optimale Einbettung ist einfach die identische Abbildung, wobei der Urbild- und der Bildraum nur verschiedene Normen haben (siehe dazu auch [34]).

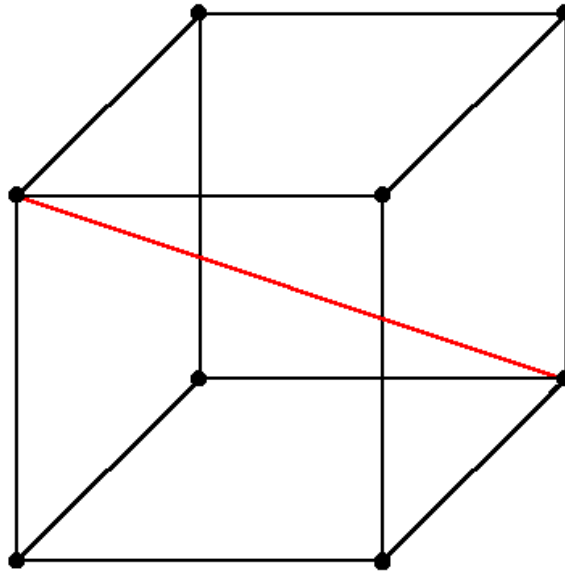


Abbildung 3.4: Eine optimale Einbettung des dreidimensionalen gleichgewichteten Hyperwürfels in den euklidischen Raum. Die Kanten werden am stärksten expandiert, die Diagonalen am stärksten geschrumpft.



## 4 Einbettungen in Banachräume mit kleiner Dimension

Mitunter sucht man keine Einbettung mit optimaler Verzerrung. Man will auch die Dimension möglichst klein halten und nimmt dafür eine gewisse Vergrößerung der Verzerrung in Kauf. In diesen Fällen möchte man wissen, wie die Verzerrung von der Dimension oder die Dimension von der Verzerrung abhängt.

### 4.1 Das Johnson-Lindenstrauss-Lemma

Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum endlicher Kardinalität und  $\zeta_2(X, \rho)$  seine optimale Verzerrung unter allen Einbettungen in den  $\ell_2$ . Johnson und Lindenstrauss zeigten 1984 in [55]:

**Lemma 4.1** Für jedes  $\tau \in (0, 1)$  gibt es eine Konstante  $K = K(\tau)$  und eine Einbettung  $\varphi : X \rightarrow \ell_2^d$  mit:

$$\zeta(\varphi) \leq \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \cdot \zeta_2(X, \rho) \quad \text{und} \\ d = K \cdot \log |X|$$

Frankl und Maehara konnten 1988 in [39] die Dimension  $d$  etwas genauer abschätzen:

**Lemma 4.2** Falls

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \text{und} \quad d = d(n, \varepsilon) = \left\lceil \frac{27 \cdot \ln |X|}{3 \cdot \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon^3} \right\rceil + 1 \quad (4.1) \\ < \sqrt{|X|},$$

dann existiert eine Einbettung  $\varphi : X \rightarrow \ell_2^{d(n, \varepsilon)}$  mit

$$\zeta(\varphi) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \zeta_2(X, \rho). \quad (4.2)$$

**Folgerung 4.3** Falls

4 Einbettungen in Banachräume mit kleiner Dimension

$$\tau \in (0, 2 - \sqrt{3})$$

$$\text{und} \quad d = d(n, \tau) = \left\lceil \frac{27 \cdot (1 + \tau^2)^3 \cdot \ln |X|}{12 \cdot \tau^2 \cdot (1 + \tau^2) - 16 \cdot \tau^3} \right\rceil + 1$$

$$< \sqrt{|X|},$$

dann gibt es eine Einbettung  $\varphi : X \longrightarrow \ell_2^{d(n, \tau)}$  mit

$$\zeta(\varphi) \leq \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \cdot \zeta_2(X, \rho).$$

**Beweis:** Seien die Bedingungen (4.1) erfüllt, und sei  $\varphi : X \longrightarrow \ell_2^{d(n, \varepsilon)}$  eine Einbettung, die (4.2) erfüllt. Dann soll gelten:

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi) &\stackrel{!}{\leq} \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \cdot \zeta_2(X, \rho); \\ \Leftrightarrow \zeta(\varphi) &\leq \sqrt{\frac{1 + 2\tau + \tau^2}{1 - 2\tau + \tau^2}} \cdot \zeta_2(X, \rho); \\ \Leftrightarrow \zeta(\varphi) &\leq \sqrt{\frac{1 + \frac{2\tau}{1 + \tau^2}}{1 - \frac{2\tau}{1 + \tau^2}}} \cdot \zeta_2(X, \rho); \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}.$$

Nach der ersten Zeile der Bedingung (4.1) muss gelten:

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\Rightarrow \frac{2\tau}{1 + \tau^2} < \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \tau^2 - 4\tau + 1 > 0.$$

Die Nullstellen der linken Seite der letzten Zeile sind  $\tau = 2 \pm \sqrt{3}$ . Somit muss  $\tau \in (0, 2 - \sqrt{3})$  sein.

Setzen wir das Ergebnis (4.3) in die zweite Zeile der Bedingung (4.1) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} d = d(n, \varepsilon) &= \left\lceil \frac{27 \cdot \ln |X|}{3 \cdot \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon^3} \right\rceil + 1 \\ &= \left\lceil \frac{27 \cdot \ln |X|}{3 \cdot \left(\frac{2\tau}{1 + \tau^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2\tau}{1 + \tau^2}\right)^3} \right\rceil + 1 \\ &= \left\lceil \frac{27 \cdot (1 + \tau^2)^3 \cdot \ln |X|}{12 \cdot \tau^2 \cdot (1 + \tau^2) - 16 \cdot \tau^3} \right\rceil + 1. \end{aligned}$$

■

Dasgupta und Gupta gaben in [30] einen einfachen Beweis des Johnson-Lindenstrauss-Lemmas.

**Beweisideen aus [30]:** Sei  $(X, \rho)$  zunächst optimal in den  $\ell_2^t$  (mit  $\zeta_2(X, \rho) = \zeta_2^t(X, \rho)$ ) eingebettet. Die Idee ist, die eingebettete Punktmenge in einen zufälligen  $d$ -dimensionalen Unterraum zu projizieren.  $P$  sei der Projektionsoperator. Dann sind die projizierten Abstände  $\|Px - Py\|_2$  „streng“ um den Erwartungswert

$\sqrt{\frac{d}{t}} \cdot \|x - y\|_2$  verteilt. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit, dass für alle  $\binom{|X|}{2}$  eingebetteten Punktepaare

$$(1 - \tau) \cdot \|x - y\|_2 \leq \sqrt{\frac{t}{d}} \cdot \|Px - Py\|_2 \leq (1 + \tau) \cdot \|x - y\|_2$$

gilt, größer als null. Darum muss es einen  $d$ -dimensionalen Unterraum des  $\ell_2^t$  mit den gewünschten Eigenschaften geben.

■

Eine deutsche Übersetzung dieses Beweises ist in [59] zu finden.

So, Ye und Zhang bewiesen 2008 das Johnson-Lindenstrauss-Lemma mit einem anderen Ansatz in [94].

## 4.2 Weitere Ergebnisse

Matoušek bewies 1992 in [79], dass für metrische Räume  $(X, \rho)$  mit  $|X| = n < \infty$  folgende Abschätzungen gelten:

**Satz 4.4** (i) Für  $1 \leq p \leq \frac{\log n}{3}$  ist  $\zeta_p^d(n) \in \mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{1+1/p}}{p}\right)$ , falls  $d \geq C_1^p \cdot (\log n)^2$  mit einer geeigneten Konstanten  $C_1$ .

(ii) Sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $d \geq C_2 \cdot (\log n)^2$  mit einer geeigneten Konstanten  $C_2$ . Dann gilt:  $\zeta_p^d \in \mathcal{O}(\log n)$ .

**Beweisideen nach [79]:** Matoušek setzt  $t := \lceil \log n \rceil + 1$  und bezeichnet für  $k = 0, 1, \dots, t - 1$  mit  $M_k$  das Mengensystem aller Teilmengen aus  $X$  mit  $2^k$  Elementen. Dann definiert Matoušek folgende Wahrscheinlichkeitsmaße über den Mengensystemen  $M_k$  ( $k = 0, 1, \dots, t - 1$ ) und  $M$ :

$$\begin{aligned} \mu_k(\{Y\}) &= \frac{1}{|M_k|} & \forall Y \in M_k, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, t - 1\}; \\ \mu(\{Y\}) &= \frac{\mu_k(\{Y\})}{t} & \forall Y \in M_k, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, t - 1\}. \end{aligned}$$

Für  $k = 0, 1, \dots, t - 1$  wird das Mengensystem  $P_k$  durch  $r := \frac{d}{t}$  unabhängige Ziehungen einer zufälligen Menge aus  $M_k$  gebildet, und es sei  $P = \bigcup_{i=0}^{t-1} P_i$ .

Für ein solches  $P$  definiert Matoušek die Einbettung

4 Einbettungen in Banachräume mit kleiner Dimension

$$\begin{aligned}
 & f : X \longrightarrow \ell_p(P) \\
 \text{mit} \quad & [f(x)]_Y = \frac{\rho(Y, x)}{\sqrt[p]{d}}, \quad Y \in P; \\
 \implies & \|f\|_{Lip} \leq 1;
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei  $\rho(Y, x)$  wie in (2.2) definiert ist.

Um das Resultat (i) zu beweisen, zeigt er, dass für ein beliebiges Punktepaar  $x, z \in X$  nur mit „geringer“ Wahrscheinlichkeit  $\left| \left\{ Y \in P_k \mid \rho_Y(x, z) \geq \frac{p \cdot \rho(x, z)}{\log n} \right\} \right|$  „zu

klein“ ist. Darum muss es ein Mengensystem  $P = \bigcup_{i=0}^{t-1} P_i$  mit

$$\begin{aligned}
 & P_i \subseteq M_i \\
 \text{und} \quad & |P_i| \leq r \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, t-1\}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

geben, so dass es für jedes Punktepaar  $x, z \in X$  einen Index  $k$  gibt mit

$\left| \left\{ Y \in P_k \mid \rho_Y(x, z) \geq \frac{p \cdot \rho(x, z)}{\log n} \right\} \right|$  „ausreichend groß“. Für dieses  $P$  wird dann

die Schrumpfung der Einbettung  $f$  mit  $\mathcal{O}\left(\frac{(\log n)^{1+1/p}}{p}\right)$  abgeschätzt.

Für das Resultat (ii) wird folgendes Lemma aus [19] verwendet:

**Lemma 4.5** *Seien  $x, z \in X$ . Dann existieren nichtnegative Zahlen  $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{t-1}$  und paarweise disjunkte Indizes  $k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$ , so dass*

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{t-1} \rho_i \geq \frac{\rho(x, z)}{3} \\
 \text{und} \quad & \mu_{k_i}(\{Y \in M_{k_i} \mid \rho_Y(x, z) \geq \rho_i\}) \geq c;
 \end{aligned}$$

wobei  $c$  eine positive Konstante ist.

Dann zeigt Matoušek, dass  $|\{Y \in P_{k_i} \mid \rho_Y(x, z) \geq \rho_i\}|$  nur mit „geringer“ Wahrscheinlichkeit „klein“ ist. Darum muss es ein Mengensystem  $P$  geben, dass die Bedingungen (4.5) erfüllt, so dass für alle Indizes  $k_i$  die Mengensysteme  $\{Y \in P_{k_i} \mid \rho_Y(x, z) \geq \rho_i\}$  „ausreichend viele“ Mengen enthalten. Für ein solches  $P$  wird die Schrumpfung der Einbettung  $f$  mit  $\mathcal{O}(\log n)$  abgeschätzt. ■

Matoušek bewies 1996 in [80] die folgenden beiden Sätze:

**Satz 4.6** (i) *Sei  $\zeta \geq 1$  die gewünschte Verzerrung. Dann gibt es eine Einbettung  $\varphi : X \longrightarrow \ell_\infty^d$  mit  $d \leq 12\zeta \cdot n^{\lceil \frac{1}{(\zeta+1)^{7/2}} \rceil} \cdot \ln n$  und  $\zeta(\varphi, (X, \rho)) \leq \zeta$ .*

(ii) *Sei  $Z$  ein Banachraum, in den alle metrischen Räume mit  $n$  Punkten mit einer Verzerrung  $\zeta \geq 1$  eingebettet werden können. Dann gilt:*

$$\dim(Z) \geq \begin{cases} c(\zeta) \cdot n^{\lceil \frac{1}{(\zeta+1)^{7/2}} \rceil}, & \zeta \in [1, 7) \cup [9, 11), \\ c(\zeta) \cdot n^{2 - \lceil \frac{1}{(\zeta+1)^{7/2}} \rceil}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $c(\zeta)$  nur von  $\zeta$  abhängt.

#### 4 Einbettungen in Banachräume mit kleiner Dimension

**Satz 4.7** Sei  $Y$  ein Banachraum, in den ein beliebiger metrischer Raum  $(X, \rho)$  endlicher Kardinalität mit einer Verzerrung  $\zeta \geq 1$  eingebettet werden kann, wobei  $Y$  von  $(X, \rho)$  abhängen darf. Dann gilt:

$$\dim(Y) \geq \begin{cases} c(\lfloor \zeta \rfloor) \cdot n^{1/\lfloor \zeta \rfloor}, & \zeta \in [2, 4) \cup [5, 6), \\ c(\lfloor \zeta \rfloor) \cdot n^{1/(2 \cdot \lfloor \zeta \rfloor)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $c(\lfloor \zeta \rfloor)$  nur vom ganzzahligen Anteil von  $\zeta$  abhängt.

# 5 Graphen mit großer Tailleweite

## 5.1 Einige Eigenschaften von Graphen mit großer Tailleweite

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit Tailleweite  $g = g(G)$  und Minimalgrad  $\delta = \delta(G)$ . Ferner sei

$$\begin{aligned} b &:= \left\lfloor \frac{g(G)}{2} \right\rfloor - 1; \\ \text{und} \quad \tilde{b} &:= \left\lfloor \frac{g(G) - 1}{2} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Diestel definiert in [32] folgende Zahl für den Graphen  $G$ :

$$n_0(\delta, g) = \begin{cases} 1 + \delta \cdot \sum_{i=0}^b (\delta - 1)^i, & \text{falls } g \text{ ungerade ist;} \\ 2 \cdot \sum_{i=0}^b (\delta - 1)^i, & \text{falls } g \text{ gerade ist} \end{cases} \tag{5.2}$$

mit  $b$  wie in Gleichung (5.1) und bringt folgendes Ergebnis von Alon, Hoory und Linial:

**Satz 5.1** *Ein Graph mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 2$  und Tailleweite  $g(G) \geq g$  hat mindestens  $n_0(\delta, g)$  Knoten.*

Die Aussage des Satzes folgt aus der Tatsache, dass der Graph  $G$  lokal wie ein Baum aussieht. Diestel folgert in [32] daraus weiter:

**Folgerung 5.2** *Für einen Graphen  $G = (V, E)$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  gilt:*

$$g(G) < 2 \cdot \log |V|. \tag{5.3}$$

**Beweis nach [32]:** Ist  $g = g(G)$  gerade, so gilt:

$$\begin{aligned} n_0(3, g) &= 2 \cdot \frac{2^{b+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{b+1} + (2^{b+1} - 2) \\ &> 2^{g/2} \end{aligned}$$

Ist  $g = g(G)$  ungerade, so gilt:

$$\begin{aligned} n_0(3, g) &= 1 + 3 \cdot \frac{2^{b+1} - 1}{2 - 1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 2^{g/2} - 2 \\ &> 2^{g/2} \end{aligned}$$

Wegen  $|V| \geq n_0(3, g)$  folgt die Behauptung. ■

Ich gebe noch eine andere Folgerung aus dem Satz 5.1 an, die für  $\delta \geq 4$  etwas schärfer ist als Folgerung 5.2:

**Folgerung 5.3** Sei  $\tilde{b}$  wie in (5.1). Dann gilt für einen Graphen  $G = (V, E)$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 2$ :

$$\log |V| > \tilde{b} \cdot \log(\delta - 1); \tag{5.4}$$

**Beweis:** Für  $g = g(G)$  gerade gilt mit (5.2):

$$\begin{aligned} n_0(\delta, g) &> 2 \cdot (\delta - 1)^b; \\ \implies \log n_0(\delta, g) &> b \cdot \log(\delta - 1) \\ &= \tilde{b} \cdot \log(\delta - 1). \end{aligned}$$

Für  $g = g(G)$  ungerade gilt mit (5.2):

$$\begin{aligned} n_0(\delta, g) &> k \cdot (\delta - 1)^b \\ &> (\delta - 1)^{b+1}; \\ \implies \log n_0(\delta, g) &> (b + 1) \cdot \log(\delta - 1) \\ &= \tilde{b} \cdot \log(\delta - 1). \end{aligned}$$

Mit dem Satz 5.1 folgt die Aussage. ■

## 5.2 Abschätzungen für die Dimension einer Einbettung eines Graphen mit großer Tailleweite

Ich komme nun zu dem wichtigsten Resultat meiner Arbeit. Dabei betrachte ich eine Einbettung eines Graphen in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  mit konvexer, zentralsymmetrischer Eichfigur<sup>1</sup> und schätze die Dimension des einbettenden Raumes in Abhängigkeit von der Tailleweite und dem Minimalgrad des Graphen sowie der Verzerrung der Einbettung nach unten ab:

<sup>1</sup> $Z$  kann insbesondere auch ein  $\ell_p$ -Raum mit  $1 \leq p \leq \infty$  sein.

## 5 Graphen mit großer Tailenweite

**Satz 5.4** Sei  $G = (V, E)$  ein gleichgewichteter Graph mit Minimalgrad  $\delta = \delta(G)$  und Tailenweite  $g = g(G)$ , und sei  $n_0(\delta, g)$  wie in (5.2). Dann gilt für eine beliebige Einbettung  $\varphi : G \rightarrow Z$  des Graphen  $G$  in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  mit konvexer, zentralsymmetrischer Eichfigur:

$$d := \dim(Z) \geq \frac{\log n_0(\delta, g)}{\log g + \log \zeta(\varphi, G)}.$$

**Beweis:** Sei  $G = (V, E)$  ein gleichgewichteter Graph mit  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $\delta = \delta(G)$ , und  $g = g(G)$ . Ferner sei  $\varphi : G \rightarrow Z$  eine Einbettung des Graphen  $G$  in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  mit konvexer, zentralsymmetrischer Eichfigur;  $n_0(\delta, g)$  wie in (5.2) und  $b$  wie in Gleichung (5.1). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $\|\varphi^{-1}\|_{Lip} = 1$  und  $\|\varphi\|_{Lip} = \zeta(\varphi, G)$  ist. Anderenfalls multipliziere alle Koordinaten mit  $\|\varphi^{-1}\|_{Lip}$ .

Denkt man sich um das Bild jedes Knotens  $v_k \in V$  eine Kugel<sup>2</sup>  $B_Z\left(\varphi(v_k), \frac{1}{2}\right)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), dann ist das Innere zweier verschiedener Kugeln  $B_Z\left(\varphi(v_i), \frac{1}{2}\right)$  und  $B_Z\left(\varphi(v_j), \frac{1}{2}\right)$  für alle  $1 \leq i < j \leq n$  disjunkt. Seien  $u, v \in V$  zwei adjazente Knoten. Falls  $g$  ungerade ist, sind mindestens  $n_0(\delta, g)$  der  $n$  Kugeln  $B_Z\left(\varphi(v_k), \frac{1}{2}\right)$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) in der größeren Kugel

$$B_Z\left(\varphi(u), \left(b + \frac{3}{2}\right) \cdot \zeta(\varphi, G)\right) = B_Z\left(\varphi(u), \frac{g}{2} \cdot \zeta(\varphi, G)\right)$$

enthalten. Falls  $g$  gerade ist, sind mindestens  $n_0(\delta, g)$  der  $n$  Kugeln  $B_Z\left(\varphi(v_k), \frac{1}{2}\right)$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) in der Vereinigung der Kugeln

$$\begin{aligned} & B_Z\left(\varphi(u), \left(b + \frac{1}{2}\right) \cdot \zeta(\varphi, G)\right) \cup B_Z\left(\varphi(v), \left(b + \frac{1}{2}\right) \cdot \zeta(\varphi, G)\right) \\ \subseteq & B_Z\left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, (b+1) \cdot \zeta(\varphi, G)\right) \\ = & B_Z\left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \frac{g}{2} \cdot \zeta(\varphi, G)\right) \end{aligned}$$

enthalten. Ein Vergleich der Volumina ergibt in beiden Fällen:

$$\left(\zeta(\varphi, G) \cdot \frac{g}{2}\right)^d \cdot V_Z \geq n_0(\delta, g) \cdot \frac{1}{2^d} \cdot V_Z; \quad (5.5)$$

$$\implies (\zeta(\varphi, G) \cdot g)^d \geq n_0(\delta, g); \quad (5.6)$$

$$\implies d \geq \frac{\log n_0(\delta, g)}{\log \zeta(\varphi, G) + \log g}. \quad (5.7)$$

■

<sup>2</sup>Was eine Kugel ist, hängt von der Eichfigur des Banach-Minkowski-Raumes  $Z$  ab.



## 5 Graphen mit großer Tailenweite

**Folgerung 5.5** Sei  $\varphi : G \rightarrow Z$  eine beliebige Einbettung eines gleichgewichteten Graphen  $G$  in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  mit konvexer, zentralsymmetrischer Eichfigur und Dimension  $d = \dim(Z)$ .

(i) Falls  $G$  den Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 3$  hat, gilt:

$$d > \frac{g(G)}{2 \cdot (\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G))}.$$

(ii) Falls  $G$  ein Element einer Graphenfamilie  $\mathcal{G}$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 3$  ist, gilt:

$$\begin{aligned} d &> \frac{\left\lfloor \frac{g(G)-1}{2} \right\rfloor \cdot \log(\delta - 1)}{\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G)} \quad \forall G \in \mathcal{G} \\ &\in \Omega \left( \frac{g(G) \cdot \log \delta}{\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G)} \right). \end{aligned}$$

**Beweis:** (i) folgt unmittelbar aus dem Satz 5.4 und dem Beweis der Folgerung 5.2.

(ii) Aus Satz 5.4 und dem Beweis der Folgerung 5.3 folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} d &> \frac{\left\lfloor \frac{g(G)-1}{2} \right\rfloor \cdot \log(\delta - 1)}{\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G)} \\ &> \frac{\frac{g(G)}{4} \cdot \frac{\log \delta}{2}}{\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G)} \quad \text{für } g(G) \geq 3, \quad \delta \geq 3 \\ &= \frac{g(G) \cdot \log \delta}{8 \cdot (\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G))} \\ &\in \Omega \left( \frac{g(G) \cdot \log \delta}{\log \zeta(\varphi, G) + \log g(G)} \right). \end{aligned}$$

■

### 5.3 Abschätzungen für die Verzerrung einer Einbettung eines Graphen mit großer Tailenweite

Es werde wieder ein Graph in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  eingebettet. Ich schätze die Verzerrung der Einbettung in Abhängigkeit von der Tailenweite und dem Minimalgrad des Graphen sowie der Dimension des einbettenden Raumes ab:

**Folgerung 5.6** Sei  $G = (V, E)$  ein gleichgewichteter Graph mit Minimalgrad  $\delta(G) = \delta$  und Tailenweite  $g = g(G)$ , und sei  $n_0(\delta, g)$  wie in (5.2). Dann gilt für eine beliebige Einbettung  $\varphi : G \rightarrow Z$  des Graphen  $G$  in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  mit konvexer, zentralsymmetrischer Eichfigur und  $\dim(Z) = d$ :

$$\zeta(\varphi, G) \geq \frac{\sqrt[d]{n_0(\delta, g)}}{g(G)}.$$

## 5 Graphen mit großer Tailenweite

**Beweis:** Es seien die Voraussetzungen des Beweises von Satz 5.4 erfüllt. Ich wende die Ungleichung (5.6) an und löse nach  $\zeta(\varphi, G)$  auf:

$$\begin{aligned} (\zeta(\varphi, G) \cdot g)^d &\geq n_0(\delta, g); \\ \implies \zeta(\varphi, G) &\geq \frac{\sqrt[d]{n_0(\delta, g)}}{g}. \end{aligned}$$

■

**Folgerung 5.7** Sei  $\varphi : G \longrightarrow Z$  eine beliebige Einbettung eines Graphen  $G$  in einen Banach-Minkowski-Raum  $Z$  mit konvexer, zentralsymmetrischer Eichfigur und  $d = \dim(Z)$ .

(i) Falls  $G$  ein gleichgewichteter Graph mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 3$  und  $g(G) = g$  ist, dann gilt:

$$\zeta(\varphi, G) > \frac{2^{g/(2d)}}{g}.$$

(ii) Sei  $\tilde{b}$  wie in Gleichung (5.1). Falls  $G$  ein gleichgewichteter Graph mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 3$  und  $g(G) = g$  ist, dann gilt:

$$\zeta(\varphi, G) > \frac{(\delta - 1)^{\tilde{b}/d}}{g}.$$

(iii) Sei  $Z$  fest und  $G$  ein beliebiges Element einer gleichgewichteten Graphenfamilie  $\mathcal{G} = (G_i)_{i=1}^{\infty}$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq \delta \geq 3$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} g(G_i) = \infty$ . Dann gilt für jedes feste  $\alpha < \frac{\log(\delta - 1)}{2 \cdot \log \delta}$ :

$$\zeta(\varphi, G) \in \Omega\left(\delta^{\alpha g(G)/d}\right) \quad \text{für } G \in \mathcal{G}.$$

**Beweis:** (i) folgt unmittelbar aus Folgerung 5.6 und dem Beweis von Folgerung 5.2.

(ii) folgt unmittelbar aus Folgerung 5.6 und dem Beweis von Folgerung 5.3.

(iii) Sei  $\gamma := \frac{\log(\delta - 1)}{2 \cdot \log \delta}$ . Nach (ii) ist

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi, G) &> \frac{(\delta - 1)^{\tilde{b}/d}}{g(G)} \\ &\geq \frac{(\delta - 1)^{(g(G)-2)/(2d)}}{g(G)} \\ &= \frac{\delta^{\gamma \cdot (g(G)-2)/d}}{g(G)} \\ &= \frac{\delta^{\gamma \cdot g(G)/d}}{g(G) \cdot \delta^{2\gamma/d}} \\ &= \delta^{\alpha \cdot g(G)/d} \cdot \underbrace{\frac{\delta^{(\gamma-\alpha) \cdot g(G)/d}}{g(G) \cdot \delta^{2\gamma/d}}}_{\geq 1 \text{ für } g(G) \text{ groß genug}}. \end{aligned}$$

■

## 5.4 Vergleich der Abschätzungen mit allgemeinen Resultaten anderer Autoren

Nach Abschnitt 3.1 kann jeder Graph isometrisch in den  $\ell_\infty$  eingebettet werden (siehe (3.1)). Satz 5.4 liefert eine untere Schranke für die Dimension einer isometrischen Einbettung eines Graphen mit großer Tailleweite in den  $\ell_\infty$ :

**Folgerung 5.8** Sei  $G = (V, E)$  ein gleichgewichteter Graph mit Minimalgrad  $\delta = \delta(G)$  und Tailleweite  $g = g(G)$ , und sei  $n_0(\delta, g)$  wie in (5.2). Dann gilt für eine isometrische Einbettung  $\varphi: G \rightarrow \ell_\infty^d$  des Graphen  $G$ :

$$d \geq \frac{\log n_0(\delta, g)}{\log g}.$$

Nach Proposition 3.2 liegt die optimale Verzerrung einer  $\ell_2$ -Einbettung eines beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  in  $\mathcal{O}(\log |V|)$ . Die Tailleweite eines beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  liegt gemäß Folgerung 5.2 ebenfalls in  $\mathcal{O}(\log |V|)$ . Damit folgt aus Satz 5.4 und Folgerung 5.2:

**Folgerung 5.9** Sei  $G = (V, E)$  ein gleichgewichteter Graph mit Minimalgrad  $\delta = \delta(G) \geq 3$  und Tailleweite  $g = g(G)$ , und sei  $n_0(\delta, g)$  wie in (5.2). Dann gilt für eine Einbettung  $\varphi: G \rightarrow \ell_2^d$  des Graphen  $G$  mit optimaler Verzerrung:

$$\begin{aligned} d &\in \Omega \left( \frac{\log n_0(\delta, g)}{\log \log |V|} \right) \\ &\subseteq \Omega \left( \frac{g}{\log \log |V|} \right). \end{aligned}$$

## 5.5 Konstruktion regulärer Graphen mit großer Tailleweite

Offensichtlich hat jeder Graph  $G = (V, E)$  eine Tailleweite  $g(G) \geq 3$ . Alle Kreise  $C_m = (V, E)$  mit  $m$  Kanten sind offensichtlich 2-regulär und haben die Tailleweite  $g(G) = m$ . Alle Hyperwürfel  $Q_d$  sind  $d$ -regulär und haben für  $d \geq 2$  die Tailleweite  $g(Q_d) = 4$ .

Komplizierter ist die Konstruktion  $k$ -regulärer Graphen  $G$  mit  $k \geq 3$  und  $g(G) \geq 5$ . Dazu muss etwas weiter ausgeholt werden.

Die folgende Definition ist an [76] angelehnt:

**Definition 5.10** Sei  $(\Gamma, \circ)$  eine Gruppe (mit der Grundmenge  $\Gamma$  und der Gruppenoperation  $\circ$ ) und  $S \subseteq \Gamma$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Cay}(\Gamma, \circ, S) &= (V, E) \\ \text{mit} \quad V &= \Gamma \\ \text{und} \quad E &= \{\{v, v \circ s\} \mid v \in \Gamma, s \in S\} \end{aligned}$$

der Cayleygraph der Gruppe  $(\Gamma, \circ)$  mit dem Erzeugendensystem  $S$ .

## 5 Graphen mit großer Tailenweite

Ein Cayleygraph  $\text{Cay}(\Gamma, \circ, S)$  hat unendlich viele Knoten, wenn  $\Gamma$  unendlich viele Gruppenelemente enthält. Solche unendlichen Graphen werden hier nur betrachtet, um endliche reguläre Graphen mit großer Tailenweite zu konstruieren. In allen anderen Kapiteln und Abschnitten dieser Arbeit sind Graphen immer endlich.

Auch die folgenden Definitionen stammen aus [76]:

**Definition 5.11** *Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann ist  $\text{SL}_2(R)$  die Gruppe der  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1 über dem Ring  $R$ , das heißt:*

$$A \in \text{SL}_2(K) \implies a_{ij} \in R \quad \forall i, j \in \{1, 2\},$$

mit der Matrixmultiplikation als Gruppenoperation.

**Definition 5.12** *Sei  $(\Gamma, \circ)$  eine Gruppe und  $S \subseteq \Gamma$ . Ein Wort über  $S$  ist eine endliche Folge  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , so dass für alle  $1 \leq i \leq n$  entweder  $f_i \in S$  oder  $f_i^{-1} \in S$ . Das Wort heißt reduziert, falls  $f_i \neq f_{i+1}^{-1}$  für alle  $1 \leq i < n$  gilt.*

Margulis verwendet in [76] das Erzeugendensystem  $S = \{A, B\}$  mit

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

um einen regulären Cayleygraphen der Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  zu erzeugen. Der Graph  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot, S)$  ist 4-regulär, denn mit jedem  $v \in V = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  sind die Kanten

$$\{v, vA\}, \quad \{v, vB\}, \quad \{v, vA^{-1}\} \quad \text{und} \quad \{v, vB^{-1}\}$$

inzident. Außerdem wird angegeben, dass es keine nichttriviale multiplikative Relation zwischen  $A$  und  $B$  gibt. Das heißt, dass zwei verschiedene reduzierte Wörter über  $S$  zwei verschiedene Matrizen in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  bestimmen<sup>3</sup>. Mit anderen Worten: Die reduzierten Wörter entsprechen genau den Wegen im Cayleygraphen  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot, S)$ , und zwei verschiedene Wege im Cayleygraphen  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot, S)$  haben höchstens einen gemeinsamen Endknoten. Es gibt somit keinen Kreis in  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot, S)$ . Dies impliziert, dass der Cayleygraph  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \cdot, S)$  ein unendlich großer 4-regulärer Wald ist.

Margulis ersetzt dann den Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen durch den Primzahlkörper  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (mit  $p \geq 3$ ). Der Cayleygraph  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{F}_p), \cdot, S)$  enthält offensichtlich Kreise, da er immer noch 4-regulär ist, aber nur endlich viele Knoten hat. Margulis beweist dann, dass

$$g(\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{F}_p), \cdot, S)) \in \Omega(\log p).$$

---

<sup>3</sup>Margulis beruft sich dazu auf [75].

## 5 Graphen mit großer Tailleweite

Auch einige weitere Autoren konstruieren reguläre Graphen mit großer Tailleweite als Cayleygraphen über Gruppen quadratischer Matrizen mit bestimmten Erzeugendensystemen. Beispiele sind [51] und [74].

Erdős und Sachs zeigten in [37], dass zu jedem  $k \geq 2$  und jedem  $g \geq 3$  ein  $k$ -regulärer Graph  $G = (V, E)$  mit Tailleweite  $g(G) = g$  existiert. Außerdem schätzten sie die minimale Knotenzahl eines solchen Graphen noch genauer ab als in Satz 5.1 (von Alon, Hoory und Linial).

### 5.6 Algebraische Eigenschaften von Graphen mit großer Tailleweite

Sei  $\tilde{b}$  wie in (5.1). Für einen gleichgewichteten  $k$ -regulären Graphen  $G = (V, E)$  und jedes  $i \in \{0, 1, \dots, \tilde{b}\}$  kann die  $i$ -te Adjazenzmatrix durch ein Polynom der Adjazenzmatrix ausgedrückt werden:

$$A^{(i)} = P_i(A)$$

mit

$$P_i(x) = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ x, & i = 1; \\ xP_1(x) - kP_0(x), & i = 2; \\ xP_{i-1}(x) - (k-1)P_{i-2}(x), & i > 2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Diese Polynome heißen nach [70] *Geronimuspolynome*, und es gilt:

$$P_i(k) = k(k-1)^{i-1} \quad \forall i > 0. \quad (5.9)$$

### 5.7 Optimale Einbettungen von Graphen mit großer Tailleweite in den $\ell_2$

In diesem und in dem folgenden Abschnitt sollen wieder Ergebnisse anderer Autoren zu Einbettungen vorgestellt werden. Diese Resultate hätten auch in Kapitel 3 aufgezählt werden können. Aber sie sollen in den Zusammenhang der Graphen mit großer Tailleweite eingeordnet werden.

Linial, Magen und Naor bewiesen 2002 in [70]:

**Satz 5.13** *Für  $k$ -reguläre Graphen mit  $k \geq 3$  ist*

$$\zeta_2(G) \in \Omega\left(\sqrt{g(G)}\right) \quad (5.10)$$

**Skizze eines Beweises nach [70]:** Linial, Magen und Naor geben gleich zwei Beweise an. Der erste Beweis verwendet Markov-Ketten, der zweite Beweis die Geronimuspolynome (siehe Abschnitt 5.1 sowie die Beziehung (3.21)).

## 5 Graphen mit großer Tailenweite

Der erste Beweis verwendet auch den Begriff des *Markov-Typs*, der in [9] eingeführt wurde: Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum und  $(Z_t)_{t=0}^\infty$  eine symmetrische Markov-Kette, die eine *zufällige Irrfahrt* in  $X$  beschreibt (das heißt: jeder Zustand ist ein Punkt  $x \in X$ .) Die reelle Zahl  $M_p(X, t)$  sei das kleinste  $C > 0$ , das folgende Ungleichung erfüllt:

$$\mathbb{E} \rho^p(Z_t, Z_0) \leq C^p \cdot t \cdot \mathbb{E} \rho^p(Z_1, Z_0). \quad (5.11)$$

Man sagt, dass  $(X, \rho)$  den Markov-Typ  $p$  hat, falls  $M_p(X) := \sup_t M_p(X, t) < \infty$ .  $M_p(X)$  wird *Markov-Typ- $p$ -Konstante* genannt. Linial, Magen und Naor geben dann einen Beweis an, dass der euklidische Raum  $\ell_2$  den Markov-Typ 2 hat und  $M_2(\ell_2) = 1$  ist (was bereits in [9] gezeigt wurde). Aus dem Ergebnis wird gefolgert:

**Folgerung 5.14** *Für jeden metrischen Raum  $(X, \rho)$  ist  $\zeta_2(X, \rho) \geq M_2(X)$ .*

Linial, Magen und Naor wählen nun eine zufällige Irrfahrt  $(Z_t)_{t=0}^\infty$  in der Knotenmenge eines gleichgewichteten  $k$ -regulären Graphen  $G = (V, E)$  mit  $k \geq 3$  und  $g = g(G)$ , wobei (in jedem Schritt) jede Kante mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{k}$  gegangen wird. Solange dabei  $t \leq \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor$ , kann man die lokale Baumstruktur des Graphen ausnutzen: In jedem Schritt wächst  $\text{dist}_G(Z_t, Z_0)$  mindestens mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{k-1}{k}$  um 1 und sinkt höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{k}$  um 1. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \text{dist}_G(Z_t, Z_0) &\geq \frac{k-2}{k} \cdot t. \\ \implies \mathbb{E} \text{dist}_G^2(Z_t, Z_0) &\geq \mathbb{E}^2 \text{dist}_G(Z_t, Z_0) \\ &\geq \left(\frac{k-2}{k}\right)^2 \cdot t^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Andererseits ist mit (5.11):

$$M_2^2(G) \cdot t \cdot \underbrace{\mathbb{E} \text{dist}_G^2(Z_1, Z_0)}_{=1} \geq \mathbb{E} \text{dist}_G^2(Z_t, Z_0). \quad (5.13)$$

Die Aussage (5.10) folgt nun mit  $t = \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor$ . ■

Für  $k$ -reguläre, gleichgewichtete Expander-Graphenfamilien  $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $k \geq 3$  lässt sich mit Abschätzung (3.5) und Ungleichung (5.3) eine schärfere Schranke angeben als in (5.10):

$$\begin{aligned}
 \zeta_2(G_i) &\geq C \cdot \frac{\Phi(G_i)}{2k \cdot \log k} \cdot \log |V(G_i)| && (\text{für ein } C > 0) \\
 &> \frac{C}{2} \cdot \frac{\Phi(G_i)}{2k \cdot \log k} \cdot g(G_i) && \forall i \in N; \\
 \implies \zeta_2(G_i) &\in \Omega\left(\frac{\Phi(G_i)}{k \cdot \log k} \cdot g(G_i)\right) && (5.14) \\
 &\subseteq \Omega\left(\frac{\Phi(G)}{k \cdot \log k} \cdot g(G_i)\right) && \forall i \in N.
 \end{aligned}$$

Es ist eine offene Frage, ob  $\zeta_2(G) \in \Omega(g(G))$  für alle Graphen  $G$  gilt.

## 5.8 Optimale Einbettungen von Graphen mit großer Tailenweite aus einer Kantenexpander-Graphenfamilie in den $\ell_1$

Es soll noch einmal an den Zusammenhang zwischen  $\ell_1$ -Einbettungen und Mehrgüterfluss-Problemen erinnert werden (siehe Abschnitt 3.9). In einem Netzwerk  $\mathcal{N}$  über einem Graphen  $G = (V, E, w)$  kann es eine Dualitätslücke  $\gamma_{\mathcal{N}}$  zwischen einem minimalen Mehrgüterschnitt und einem maximalen Mehrgüterfluss geben.  $\gamma_{\mathcal{N}}$  ist eine untere Schranke für  $\zeta_1(G)$ . In diesem Abschnitt seien  $C(\cdot, \cdot)$  und  $D(\cdot, \cdot)$  wie in Definition 3.16,  $\lambda$  wie in (3.34),  $\xi_S$  wie in (3.32),  $\Xi_S$  wie in (3.36) und  $\Delta_{\sigma\tau}$  wie in (3.35). Die symmetrischen Funktionen  $\xi_S$ ,  $C$  und  $\Delta_{\sigma\tau}$  können wie in (2.2) als Vektoren mit je  $\binom{|V|}{2}$  Komponenten geschrieben werden.

Leighton und Rao zeigten in [63], dass man in einem Graphen  $G = (V, E)$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  und einer positiven Cheegerkonstanten  $\text{Ch}(G)$  ein ungerichtetes Netzwerk konstruieren kann, so dass gilt:

$$\gamma_{\mathcal{N}} \in \Omega\left(\frac{\text{Ch}(G)}{\tilde{\Delta}(G)} \cdot \log |V|\right), \quad (5.15)$$

wobei  $\tilde{\Delta}(G)$  der durchschnittliche Knotengrad des Graphen  $G$  ist.

**Konstruktion und Abschätzung nach [63]:** Sei  $n = |V|$ . Leighton und Rao nehmen für jede zweielementige Knotenmenge  $X_i \subseteq V$  ein Gut  $i$ , wobei genau ein Knoten aus  $X_i$  die Quelle  $\sigma_i$  und der andere Knoten aus  $X_i$  die Senke  $\tau_i$  darstellt. Ferner setzen sie  $w \equiv 1$ ,  $D \equiv 1$  und  $C(u, v) = 1 \quad \forall \{u, v\} \in E$ . Dann ist  $\Delta_{\sigma\tau} = \mathbf{1}$ , und es gilt für einen minimalen Mehrgüterschnitt:

$$\begin{aligned}
 \Xi_S &= \min_{S \in \mathcal{S}(V)} \frac{|E(S, V \setminus S)|}{\xi_S^T \mathbf{1}} \\
 &\geq \frac{\text{Ch}(G)}{\max\{|S, V \setminus S|\}} \\
 &\geq \frac{\text{Ch}(G)}{n-1}.
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

## 5 Graphen mit großer Tailenweite

Da  $G$  den Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  hat, haben höchstens  $\frac{n}{2}$  Knoten eine Distanz kleiner als  $\log n - 2$  von einem beliebigen, aber festen Knoten  $u \in V$ . Daraus folgt, dass mindestens die Hälfte der  $\binom{n}{2}$  Güter jeweils über mindestens  $\log n - 2$  Kanten fließen. Daraus folgt für die Gesamtkapazität des Netzwerks:

$$\tilde{C}^T \cdot \mathbf{1} \geq \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \lambda \cdot (\log n - 2) \quad (5.17)$$

Nach (2.1) ist  $2 \cdot |E| = n \cdot \tilde{\Delta}(G)$  und somit:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{2 \cdot C^T \cdot \mathbf{1}}{(\log n - 2) \cdot \binom{n}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot |E|}{(\log n - 2) \cdot \binom{n}{2}} \\ &= \frac{n \cdot \tilde{\Delta}(G)}{(\log n - 2) \cdot \binom{n}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \tilde{\Delta}(G)}{(\log n - 2) \cdot (n - 1)} \\ \implies \gamma_{\mathcal{N}} &= \frac{\Xi_{S^*}}{\lambda^*} \\ &\geq \frac{\text{Ch}(G) \cdot (\log n - 2) \cdot (n - 1)}{(n - 1) \cdot 2 \cdot \tilde{\Delta}(G)} \\ &= \frac{\text{Ch}(G) \cdot (\log n - 2)}{2 \cdot \tilde{\Delta}(G)} \end{aligned}$$

Für  $n \geq 8$  folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{N}} &\geq \frac{\text{Ch}(G) \cdot \log n}{6 \cdot \tilde{\Delta}(G)} \\ &\in \Omega\left(\frac{\text{Ch}(G)}{\tilde{\Delta}(G)} \cdot \log n\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Auf die Bedingung  $w \equiv 1$  kann nachträglich wieder verzichtet werden. Diese Bedingung erleichterte nur das Zählen der Kanten. ■

Für Kantenexpander-Graphenfamilien  $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in N}$  mit Minimalgrad  $\delta(\mathcal{G}) \geq 3$  gilt wegen (5.15) auch  $\zeta_1(G_i) \in \Omega\left(\frac{\text{Ch}(G_i)}{\tilde{\Delta}(G_i)} \cdot \log |V(G_i)|\right) \quad \forall i \in N$  und analog zu (5.14):

$$\begin{aligned} \zeta_1(G_i) &\in \Omega\left(\frac{\text{Ch}(G_i)}{\tilde{\Delta}(G_i)} \cdot g(G_i)\right) \\ &\subseteq \Omega\left(\frac{\text{Ch}(\mathcal{G})}{\Delta(\mathcal{G})} \cdot g(G_i)\right) \\ &\subseteq \Omega\left(\frac{\Phi(\mathcal{G})}{\Delta(\mathcal{G})} \cdot g(G_i)\right) \quad \forall i \in N. \end{aligned} \quad (5.19)$$



## 5 Graphen mit großer Taillenweite

In der letzten Zeile der Abschätzung (5.19) wurde die linke Seite der Ungleichung (2.9) benutzt.

Es ist eine offene Frage, ob für beliebige Graphenfamilien  $(G_i)_{i=1}^{\infty}$  mit  $g(G_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$  auch  $\zeta_1(G_i)$  gegen unendlich wächst.

### 5.9 Weitere Vergleiche mit einem eigenen Resultat

Nach Abschnitt 5.7 ist  $\zeta_2(G) \in \Omega\left(\sqrt{g(G)}\right)$  für alle  $k$ -regulären Graphen  $G$  mit  $k \geq 3$ .

Für  $k$ -reguläre Expander-Graphenfamilien  $\mathcal{G}$  mit festem  $k$  ist nach den letzten beiden Abschnitten  $\zeta_1(G), \zeta_2(G) \in \Omega(g(G))$  für alle  $G \in \mathcal{G}$ .

Nach Folgerung 5.7 (iii) wächst die Verzerrung einer Einbettung eines Graphen  $G$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  sogar exponentiell mit der Taillenweite, aber nur für eine *festen Dimension*! Im Allgemeinen kann man erwarten, dass die Dimension einer optimalen Einbettung mit der Taillenweite wächst. Somit ist mit einem wesentlich langsamerem Wachstum der optimalen Verzerrung zu rechnen.

## 6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den $\ell_2$ und in den $\ell_1$

### 6.1 Ein einfacher Ansatz für den euklidischen Raum

Linial und Magen zeigten in [69], wie man gleichgewichtete Kreise optimal in den euklidischen Raum einbettet (siehe Gleichung 3.28). Basierend auf diesem Ansatz hatte ich zwei Ideen zur Erweiterung dieses Konzeptes auf beliebig positiv gewichtete Kreise. Diese Graphen haben auch eine beliebig große Tailenweite, allerdings nur den Knotengrad 2.

Der erste Ansatz ist, die Länge einer kürzesten Kante unter der Einbettung zu erhalten:

**Lemma 6.1** Sei  $C_n = C_n(w) = (V, E, w) = (\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{e_n = \{v_{n-1}, v_0\}\}, w)$  ein gewichteter Kreis,  $w^* = \min_{e \in E} w(e)$

und  $W_k = \sum_{i=1}^k w(e_i)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Dann gilt für die Einbettung

$$\varphi : C_n(w) \longrightarrow \ell_2^2$$

mit

$$\varphi(v_k) = \frac{w^*}{2 \cdot \sin \frac{w^* \cdot \pi}{W_n}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi W_k}{W_n} \\ \sin \frac{2\pi W_k}{W_n} \end{bmatrix},$$

dass die Verzerrung

$$\zeta(\varphi, C_n(w)) \leq \frac{\pi}{2}$$

ist.

**Bemerkung:** Es wird nicht behauptet, dass diese Einbettung optimal oder dimensions-optimal ist.

Zum Beweis des Lemmas benötige ich zwei Beobachtungen:

**Beobachtung 6.2** (i) Die Funktion  $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x}, & x \neq 0 \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$

ist monoton fallend im Intervall  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

(ii) Die Funktion  $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin(\pi x)}, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{\pi}, & x = 0 \end{cases}$   
 ist monoton wachsend im Intervall  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

**Beweis:** (i) Man betrachte folgendes Integral:

$$h(y) = \int_0^y \underbrace{1 - (1 + \tan^2 \eta)}_{\leq 0} d\eta \leq 0 \quad \text{für } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Integrieren liefert:

$$\begin{aligned} h(y) &= y - \tan y \leq 0 \\ \implies \cos y \cdot h(y) &= y \cdot \cos y - \sin y \leq 0 \quad \text{für } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Nun kann man  $f_1(x)$  nach  $x$  ableiten und erhält:

$$f_1'(x) = \frac{\pi x \cdot \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2}.$$

Nach der Ungleichung (6.1) ist die Ableitung  $f_1'(x) \leq 0$  für  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

Außerdem ist  $f_1\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$  wegen der Stetigkeit der Ableitung für  $x > 0$ . Für den Fall  $x = 0$  kann man zweimal die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) &= \frac{\pi x \cdot \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{-\pi^2 x \cdot \sin(\pi x)}{2x} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{-\pi^2 \cdot \sin(\pi x) - \pi^3 x \cdot \cos(\pi x)}{2} \Big|_{x=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii): Man wende die Regel von L'Hospital auf  $f_1(0)$  an:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{x} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{\pi \cdot \cos(\pi x)}{1} \Big|_{x=0} \\ &= \pi \end{aligned}$$

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

Also ist  $f_1(x)$  echt positiv im Intervall  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  und monoton fallend. Damit ist  $f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)}$  monoton wachsend.

■

**Beobachtung 6.3** Seien  $r_1, r_2$  reelle Zahlen und  $z_1, z_2$  Vektoren der Art

$$z_i = \begin{bmatrix} \cos(2r_i) \\ \sin(2r_i) \end{bmatrix} \quad (i \in \{1, 2\})$$

Dann gilt:  $\|z_1 - z_2\|_2 = 2 \cdot |\sin(r_1 - r_2)|$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \|z_1 - z_2\|_2^2 &= (\cos(2r_1) - \cos(2r_2))^2 + (\sin(2r_1) - \sin(2r_2))^2 \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(2r_1) \cdot \cos(2r_2) - 2 \cdot \sin(2r_1) \cdot \sin(2r_2) \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(2 \cdot (r_1 - r_2)) \\ &= 4 \cdot \sin^2(r_1 - r_2). \\ \implies \|z_1 - z_2\|_2 &= 2 \cdot |\sin(r_1 - r_2)|; \end{aligned}$$

weil die Norm nie negativ ist.

**Beweis des Lemmas 6.1:** Zur Vereinfachung wird jetzt gesetzt:  $\bar{W} := \frac{w^*}{W_n}$ .

Zunächst überprüft man, dass für zwei Knoten  $v_i, v_{i+1} \in V$  mit  $\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_{i+1}) = w^*$  folgt, dass  $\|\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+1})\|_2 = w^*$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+1})\|_2 &= \frac{w^*}{2 \cdot \sin(\pi \bar{W})} \cdot 2 \cdot \left| \sin \frac{\pi \cdot (W_i - W_{i+1})}{W_n} \right| \quad (\text{nach Beobachtung 6.3}) \\ &= \frac{w^*}{\sin(\pi \bar{W})} \cdot |\sin(\pi \bar{W})| \\ &= w^* \end{aligned}$$

Analog gilt für den Abstand der Bilder zweier Knoten unter der Einbettung  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi(v_i) - \varphi(v_j)\|_2 &= \frac{w^*}{2 \cdot \sin(\pi \bar{W})} \cdot 2 \cdot \left| \sin \frac{\pi \cdot (W_i - W_j)}{W_n} \right| \\ &= \frac{w^*}{2 \cdot \sin(\pi \bar{W})} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot (\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j))}{W_n} \\ \implies \|\varphi\|_{Lip} &= \max_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi \cdot \text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{W_n}}{\frac{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{W_n}}}_{=: f\left(\frac{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{W_n}\right)} \cdot \underbrace{\frac{\bar{W}}{2 \cdot \sin(\pi \bar{W})}}_{=\text{const.}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

## 6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den $\ell_2$ und in den $\ell_1$

weil die Funktion  $f$  nach Beobachtung 6.2 für  $\frac{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{W_n} \leq \frac{1}{2}$  monoton fallend ist. Es muss somit nur noch die Schrumpfung der Einbettung abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 \zeta(\varphi, C_n(w)) &= \|\varphi^{-1}\|_{Lip} \\
 &= \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2 \cdot \sin(\pi \bar{W})}{w^*} \cdot \frac{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{2 \cdot \left| \sin \frac{\pi \cdot \text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{W_n} \right|} \\
 &= \frac{\sin(\pi \bar{W})}{w^*} \cdot W_n \cdot \frac{\frac{\text{diam } C_n(w)}{W_n}}{\sin \frac{\pi \cdot \text{diam } C_n(w)}{W_n}} \\
 &\leq \frac{\sin(\pi \bar{W})}{w^*} \cdot \frac{W_n}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}} \quad (\text{nach Beobachtung 6.2}) \\
 &= \frac{\sin(\pi \bar{W})}{2\bar{W}} \\
 &\leq \frac{\sin(\pi \bar{W})}{2\bar{W}} \Bigg|_{\bar{W}=0} \quad (\text{nach Beobachtung 6.2}) \\
 &= \frac{\pi \cdot \cos(\pi \bar{W})}{2} \Bigg|_{\bar{W}=0} \quad (\text{nach L'Hospital}) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

■

Es kann leicht gezeigt werden, dass die Einbettung  $\varphi$  nicht optimal ist. Zum Beispiel kann das Dreieck  $C_3 = C_3(\{3, 4, 5\})$  mit den Kantenlängen  $\{3, 4, 5\}$  isometrisch in den  $\ell_2^2$  eingebettet werden. Unter der Einbettung  $\varphi$  beträgt die Verzerrung  $\zeta(\varphi, C_3\{3, 4, 5\}) \approx 1,22$ .

## 6.2 Erhaltung aller Kantenlängen

Der zweite Ansatz zur Einbettung beliebig gewichteter Kreise ist, jede Kantenlänge des Kreises unter der Einbettung beizubehalten:

**Satz 6.4** Sei  $C_n = C_n(w) = (V, E, w) = (\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{e_n = \{v_{n-1}, v_0\}\}, w)$  ein gewichteter Kreis und  $K = K(C_n(w)) \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , so dass

- (I)  $K \cdot w(e) \leq 1 \quad \forall e \in E$  und
- (II) a)  $\sum_{i=1}^n \arcsin(K \cdot w(e_i)) = \pi$  oder
- b)  $\sum_{i=1}^{n-1} \arcsin(K \cdot w(e_i)) = \arcsin(K \cdot w(e_n)) < \frac{\pi}{2}$ .

Dann gilt für die Einbettung  $\psi : V \longrightarrow \ell_2^2$  mit

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

$$\psi(v_k) = \frac{1}{2K} \cdot \begin{bmatrix} \cos \left( 2 \cdot \sum_{i=1}^k \arcsin(K \cdot w(e_i)) \right) \\ \sin \left( 2 \cdot \sum_{i=1}^k \arcsin(K \cdot w(e_i)) \right) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

dass die Verzerrung

$$\zeta(\psi, C_n(w)) \leq \frac{\pi}{2}$$

ist.

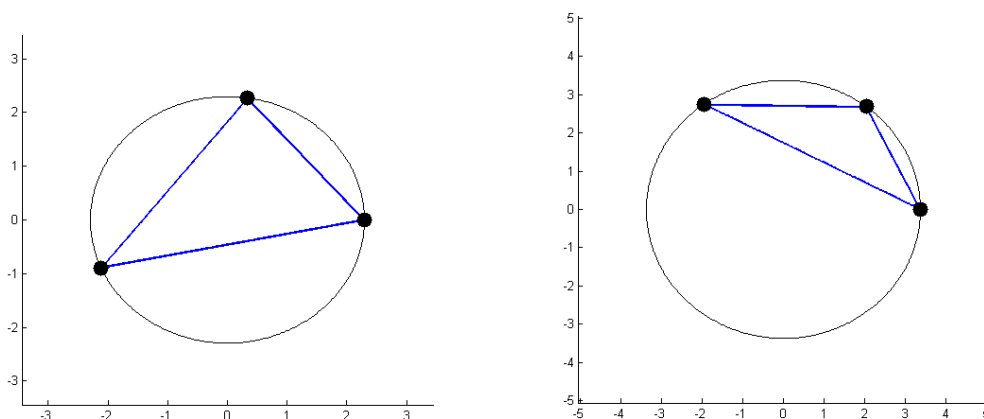


Abbildung 6.1: Die Einbettungen zweier Dreiecke mit (6.2), links der Fall (IIa), rechts der Fall (IIb) des Satzes 6.4

Nun werden einige Beobachtungen angegeben, die später als Bausteine für den Beweis des Satzes 6.4 dienen sollen:

- Beobachtung 6.5**
- (i)  $\|\psi(u) - \psi(v)\|_2 = w(\{u, v\}) \quad \forall \{u, v\} \in E(C_n(w));$
  - (ii)  $\|\psi(u) - \psi(v)\|_2 \leq \text{dist}_{C_n(w)}(u, v) \quad \forall u, v \in V(C_n(w));$
  - (iii)  $\arcsin x \geq x \quad \text{für } x \in [0, 1].$

**Beweis:** (i): Nach Beobachtung 6.3 gilt für alle  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ :

$$\begin{aligned} \|\psi(v_j) - \psi(v_{j-1})\|_2 &= \frac{1}{2K} \cdot 2 \cdot |\sin \arcsin(K \cdot w(e_j))| \\ &= w(e_j). \end{aligned}$$

Im Fall (II a) des Satzes 6.4 gilt für die Kante  $e_n = \{v_{n-1}, v_0\}$ :

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

$$\begin{aligned}
 \|\psi(v_0) - \psi(v_{n-1})\|_2 &= \frac{1}{K} \cdot \left| \sin \sum_{i=1}^{n-1} \arcsin(Kw(e_i)) \right| \\
 &= \frac{1}{K} \cdot |\sin(\pi - \arcsin(Kw(e_n)))| \\
 &= \frac{1}{K} \cdot |\sin \arcsin(Kw(e_n))| \\
 &= w(e_n).
 \end{aligned}$$

Der Fall (II b) des Satzes ist für die Kante  $e_n = \{v_{n-1}, v_0\}$  trivial.

(ii): Seien

$$P_m = \{ \{u, v\} \in V^2 \mid \text{es gibt einen kürzesten Weg von } u \text{ nach } v \text{ mit } m \text{ Kanten} \} \\
 (m = 0, 1, \dots, n-1).$$

Der Beweis folgt nun durch Induktion über die Anzahl  $m$  der Kanten eines kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$ . Für Knotenpaare aus  $P_0$  ist die Aussage trivial, und für Knotenpaare aus  $P_1$  wurde ihre Gültigkeit unter (i) gezeigt.

Gelte die Aussage nun für alle Knotenpaare aus  $P_m$  für ein  $m \leq n-2$ . Ich zeige, dass daraus die Gültigkeit der Aussage für alle Knotenpaare aus  $P_{m+1}$  folgt, falls die Menge  $P_{m+1}$  nicht leer ist:

Sei  $\{u, v\} \in P_{m+1}$ . Dann gibt es einen Knoten  $v' \in V$  mit  $\{u, v'\} \in P_m$  und  $\{v', v\} \in P_1$ . und

$$\begin{aligned}
 \text{dist}_{C_n(w)}(u, v') + \text{dist}_{C_n(w)}(v', v) &= \text{dist}_{C_n(w)}(u, v) \\
 \implies \|\psi(u) - \psi(v)\|_2 &\leq \|\psi(u) - \psi(v')\|_2 + \|\psi(v') - \psi(v)\|_2 \\
 &\leq \text{dist}_{C_n(w)}(u, v') + \text{dist}_{C_n(w)}(v', v) \\
 &= \text{dist}_{C_n(w)}(u, v)
 \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

(iii):

$$\begin{aligned}
 \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta \quad \text{für } x \in [0, 1) \\
 &\geq \int_0^x 1 d\eta \\
 &= x \quad \text{und} \\
 \arcsin(1) &= \frac{\pi}{2} > 1
 \end{aligned}$$

■

**Beobachtung 6.6** Seien  $v_i, v_j \in V(C_n(w))$  mit  $1 \leq i < j \leq n$ . Dann gibt es in  $C_n(w)$  einen Weg  $P = P(i, j)$  von  $v_i$  nach  $v_j$  mit

$$\begin{aligned}
 a = a(i, j) &:= \sum_{e \in E(P)} \arcsin(K \cdot w(e)) \\
 &\leq \frac{\pi}{2} \quad \text{und}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

$$\|\psi(v_i) - \psi(v_j)\|_2 = \frac{1}{K} \cdot \sin a(i, j). \quad (6.4)$$

**Beweis:** Seien  $v_i, v_j \in V(C_n(w))$  beliebig, aber fest. Da  $C_n(w)$  ein Kreis ist, gibt es genau zwei Wege  $P_1, P_2$  von  $v_i$  nach  $v_j$  mit

$$\begin{aligned} P_1 &= (\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}, \{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_j\}), \\ P_2 &= (\{v_i, v_{i-1}, \dots, v_0, v_{n-1}, \dots, v_j\}, \{e_i, e_{i-1}, \dots, e_1, e_n, \dots, e_{j+1}\}); \\ a_k &:= \sum_{e \in P_i} \arcsin(K \cdot w(e)) \quad (k \in \{1, 2\}). \end{aligned}$$

Im Fall (II a) des Satzes 6.4 gilt nach Beobachtung 6.3 und der Definition der  $a_i$ :

$$\begin{aligned} \|\psi(v_i) - \psi(v_j)\|_2 &= \frac{1}{K} \cdot \sin a_1 \\ &= \frac{1}{K} \cdot \sin(\pi - a_1) \\ &= \frac{1}{K} \cdot \sin a_2. \end{aligned}$$

Damit erfüllen beide Wege  $P_1$  und  $P_2$  die Gleichung (6.4), und eine der beiden Zahlen  $a_1, a_2$  muss  $\leq \frac{\pi}{2}$  sein.

Im Fall (II b) des Satzes 6.4 erfüllt der Weg  $P_1$  die Gleichung (6.4), und es ist immer  $a_1 \leq \frac{\pi}{2}$ . ■

**Beweis des Satzes 6.4:** Aus der Beobachtung 6.5 (i) und (ii) folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{Lip} &= \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\|\psi(v_i) - \psi(v_j)\|}{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sei  $\{v_i, v_j\} \in V^2$  mit  $i \neq j$  ein Knotenpaar, für das der Quotient  $\frac{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{\|\psi(v_i) - \psi(v_j)\|_2}$  sein Maximum annimmt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \zeta(\psi, C_n(w)) &= \|\psi^{-1}\|_{Lip} \\ &= \frac{\text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{\|\psi(v_i) - \psi(v_j)\|_2} \\ &= \frac{K \cdot \text{dist}_{C_n(w)}(v_i, v_j)}{\sin a(i, j)} \quad (\text{nach Beobachtung 6.6}) \\ &\leq \frac{K \cdot \sum_{e \in P(i, j)} w(e)}{\sin a(i, j)} \quad (\text{mit } P(i, j) \text{ wie in Beobachtung 6.6}) \\ &= \frac{\sum_{e \in P(i, j)} (K \cdot w(e))}{\sin a(i, j)} \\ &\leq \frac{\sum_{e \in P(i, j)} \arcsin(K \cdot w(e))}{\sin a(i, j)} \quad (\text{nach Beobachtung 6.5 (iii)}) \end{aligned}$$



## 6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den $\ell_2$ und in den $\ell_1$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a(i, j)}{\sin a(i, j)} \\
 &\leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \quad (\text{nach Beobachtung 6.6 und Beobachtung 6.2}) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

■

Enthält der Kreis  $C_n(w) = (V, E, w)$  eine Kante  $\hat{e} \in E$  mit

$$w(\hat{e}) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{e \in E} w(e), \quad (6.5)$$

so gibt es kein geeignetes  $K$ , das die Bedingungen des Satzes 6.4 erfüllt. Aber solche entarteten Kreise sollten kein Problem darstellen, weil sie sogar isometrisch in den Raum  $\ell_2^1$  eingebettet werden können und die Bedingung (6.5) in linearer Zeit (in  $\mathcal{O}(n)$ ) überprüft werden kann.

Ich schrieb das MATLAB<sup>1</sup>-Programm „WeightedCycle“, das die Zahl  $K = K(C_n(w))$  mittels Newton-Iteration berechnet. Außerdem ermittelt das Programm die Verzerrung und zeichnet eine Graphik der Einbettung nach Gleichung (6.2). Dieses Programm ist auf der CD-ROM, die dieser Diplomarbeit beiliegt, enthalten. Weitere Hinweise zu diesem Programm befinden sich im Anhang.

### 6.3 Vergleich der $\ell_2$ -Einbettungen mit den Resultaten anderer Autoren

Die Verzerrung der Einbettungen eines gewichteten Kreises  $C_n(w) = (V, E, w)$  nach Lemma 6.1 und Satz 6.4 ist durch eine Konstante beschränkt. Das ist für großes  $n$  viel besser als Bourgain's Schranke für die Verzerrung einer optimalen  $\ell_2$ -Einbettung eines beliebigen Graphen (Proposition 3.2). Die optimale Verzerrung  $\zeta(C_n(w))$  müsste aber nach (3.5) in der Größenordnung von  $\log n$  liegen, falls die Familie aller gewichteten Kreise eine Expander-Graphenfamilie wäre.

**Beobachtung 6.7** Die Familie der gewichteten Kreisgraphen ist keine Expander-Graphenfamilie.

**Beweis:** Sei  $C_n = (V, E)$  ein Kreis. Dann gibt es für jedes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$  eine Knotenmenge  $\tilde{V} \subset V$  mit  $|\tilde{V}| = k$ , so dass die Anzahl der Nachbarn  $|\Gamma(\tilde{V})| = 2$  ist. Darum gilt:

$$\begin{aligned}
 \Phi(C_n) &= \min_{\substack{\tilde{V} \subset V \\ 1 \leq |\tilde{V}| \leq n/2}} \frac{|\Gamma(\tilde{V})|}{|\tilde{V}|} \\
 &= \frac{2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>MATLAB ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks, Inc; siehe [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

■

Die Einbettungen beliebig gewichteter Kreises nach Lemma 6.1 und Satz 6.4 können auch mit der optimalen Einbettung gleichgewichteter Kreise nach (3.28) verglichen werden.

**Beobachtung 6.8** Für gleichgewichtete Kreise  $C_n$  ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ) gilt:

$$\sup_{n \geq 3} \zeta_2(C_n) = \frac{\pi}{2}.$$

**Beweis:** Zunächst soll gezeigt werden, dass die optimale  $\ell_2$ -Verzerrung gleichgewichteter Kreise monoton in  $n$  wächst. Dazu setzen wir in Gleichung (3.29)

$$\begin{aligned} \eta &:= \frac{1}{n}. \\ \zeta_2(C_{1/\eta}) &= \frac{1}{2\eta} \cdot \sin(\eta \cdot \pi). \end{aligned}$$

Nach Beobachtung 6.2 ist  $\zeta_2(C_{1/\eta})$  monoton fallend in  $\eta$ , da  $\eta \leq \frac{1}{3}$  ist.

Wir lassen nun  $\eta$  gegen null gehen und wenden die Regel von L'Hospital an:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta_2(C_{1/\eta}) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sin(\eta \cdot \pi)}{2 \cdot \eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot \cos(\eta \cdot \pi)}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

Die obere Schranke der Verzerrungen nach Lemma 6.1 und Satz 6.4 ist somit nicht schlechter als das Supremum der optimalen Verzerrungen gleichgewichteter Kreise.

## 6.4 Vergleich mit semidefiniter Programmierung

Um einen etwas besseren Eindruck von der Qualität der Einbettung nach Satz 6.4 zu bekommen, kann man das semidefinite Programm (3.15) für einige gewichtete Kreise lösen und mit der Einbettung nach (6.2) vergleichen. Um mir Tipparbeit zu ersparen, schrieb ich noch ein C++-Programm namens `SDPA_Converter` für das Betriebssystem Windows. Dieses Programm verwaltet intern einen gewichteten Graphen in Form seiner Distanzmatrix. Es kann einen zufälligen gewichteten Kreis vorgegebener Knotenzahl  $n$  generieren, indem es für jede Kreiskante eine Pseudo-Zufallszahl zieht, und die Längen der Kreiskanten anzeigt. Anschließend kann es eine Eingabedatei im SDPA-Format erzeugen, das ein semidefinites Programm nach (3.15) für den intern gespeicherten Graphen repräsentiert. Die von `SDPA_Converter` generierten Dateien schickte ich dann zum Lösen des semidefiniten Programms an die NEOS<sup>2</sup>-Solver `csdp`, `DSDP` und `pensdp`. In Tabelle 6.1 sind die vom Programm „WeightedCycle“ berechnete

<sup>2</sup><http://neos.mcs.anl.gov/neos>

## 6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den $\ell_2$ und in den $\ell_1$

Verzerrung der Einbettung (6.2) und die von den genannten NEOS-Solvern berechnete Verzerrung für einige zufällige Kreisgraphen vorgegebener Kantenzahl  $n$  gegenüber gestellt. Der Solver pensdp liefert darüber hinaus auch eine primal optimale semidefinite Matrix  $X$ , aus der man die Koordiantenmatrix  $M$  einer optimalen  $\ell_2$ -Einbettung berechnen kann. In Abbildung 6.2 wird die Einbettung (6.2) und die von pensdp berechnete optimale Einbettung in die euklidische Ebene optisch dargestellt. Weitere Abbildungen sind im Anhang dieser Arbeit zu finden.

n	Kantenlängen	Verzerrung nach (6.2)	von NEOS-Solvern berechnete Verzerrung	Bemerkung
4	21.221; 25.861; 26.544; 7.031	1.1539	1.1293	
4	25.678; 31.487; 19.359; 28.829	1.3482	1.3212	
5	19.625; 25.854; 20.355; 24.091; 19.913	1.2672	1.2558	
6	5.907; 15.136; 12.201; 19.953; 26.013; 21.628	1.3856	1.3499	
7	21.598; 29.827; 29.643; 9.341; 23.996; 2.862; 1.461	1.4487	1.37	(*)
8	3.955; 10.117; 11.795; 15.244; 18.282; 32.739; 5.996; 20.066	1.4673	1.3912	(*)

Tabelle 6.1: (\*) Der NEOS-Solver csdp konnte zwei der Optimierungsprobleme nicht lösen. Er gab für den Kreis mit sieben Knoten als primale Lösung 647.2, als duale Lösung 0.57055, für den Kreis mit acht Knoten als primale Lösung 349.6 und als duale Lösung 0.012711 an.

Wie man der Tabelle 6.1 entnehmen kann, ist die Einbettung nach Satz 6.4 nicht optimal. Aber folgende Argumente sprechen für die Einbettung nach (6.2):

- Alle gewichteten Dreiecke (Kreise mit drei Kanten), die durch (6.2) eingebettet werden können, werden isometrisch eingebettet. (Das ist klar nach dem Beweis der Beobachtung 6.6 (i).)
- Die Einbettung enthält die von Linial und Magen in [69] beschriebene Einbettung (3.28) gleichgewichteter Kreise als Spezialfall.
- Die obere Schranke der Verzerrung ist eine Konstante und nach Beobachtung 6.8 nicht schlechter als das Supremum der Verzerrungen der von Linial und Magen beschriebenen Einbettung gleichgewichteter Kreise.
- Für die Einbettung nach (6.2) muss nur eine Zahl  $K$  mittels Newton-Iteration berechnet werden, was möglicherweise schneller geht als die Lösung eines semidefiniten Programms.

## 6.5 Einbettungen beliebig gewichteter Kreise in den Raum $\ell_1$ mit geringer Verzerrung

Linial, London und Rabinovich zeigten in [67], wie man gleichgewichtete Kreise gerader Kantenzahl isometrisch in den  $\ell_1$  einbetten kann (siehe Gleichung 3.39).

## 6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den $\ell_2$ und in den $\ell_1$

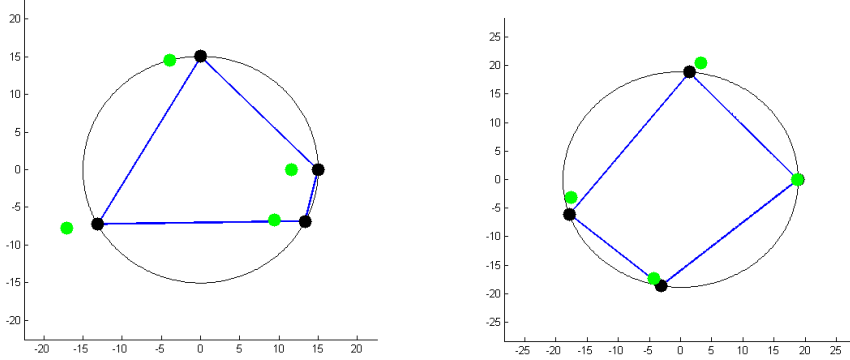


Abbildung 6.2: Die Einbettungen der beiden Vierecke (Kreise mit vier Kanten) aus der Tabelle 6.1. Die Einbettung nach Satz 6.4 ist jeweils schwarz, die vom NEOS-Solver pensdp berechnete Einbettung jeweils grün dargestellt.

Ich erweitere diesen Ansatz auf beliebig gewichtete Kreise. Dazu beschränke ich mich zunächst auf rationale Kantengewichte.

**Lemma 6.9** *Jeder gewichtete Kreis*  $C_n = C_n(w) = (V, E, w) = (\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{e_n = \{v_{n-1}, v_0\}\}, w)$  mit

$$w(e) \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\} \quad \forall e \in E$$

kann isometrisch in den Raum  $\ell_1$  eingebettet werden.

Für den Beweis des Lemmas benötige ich zunächst eine Beobachtung über die Komposition zweier Einbettungen:

**Beobachtung 6.10** *Seien  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$  und  $(Z, \rho_Z)$  drei metrische Räume mit  $|X| \leq |Y| \leq |Z|$  und  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\psi : Y \rightarrow Z$  zwei injektive Funktionen. Dann gilt:*

$$\zeta(\psi \circ \varphi, (X, \rho_X)) \leq \zeta(\varphi, (X, \rho_X)) \cdot \zeta(\psi, (Y, \rho_Y));$$

wobei  $\psi \circ \varphi$  die Komposition der Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  ist.

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\psi \circ \varphi\|_{Lip} &= \sup_{\substack{x, \tilde{x} \in X \\ x \neq \tilde{x}}} \frac{\rho_Z(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(\tilde{x})))}{\rho_X(x, \tilde{x})} \\ &= \sup_{\substack{x, \tilde{x} \in X \\ x \neq \tilde{x}}} \left( \frac{\rho_Z(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(\tilde{x})))}{\rho_Y(\varphi(x), \varphi(\tilde{x}))} \cdot \frac{\rho_Y(\varphi(x), \varphi(\tilde{x}))}{\rho_X(x, \tilde{x})} \right) \\ &\leq \sup_{\substack{y, \tilde{y} \in Y \\ y \neq \tilde{y}}} \frac{\rho_Z(\psi(y), \psi(\tilde{y}))}{\rho_Y(y, \tilde{y})} \cdot \sup_{\substack{x, \tilde{x} \in X \\ x \neq \tilde{x}}} \frac{\rho_Y(\varphi(x), \varphi(\tilde{x}))}{\rho_X(x, \tilde{x})} \\ &= \|\psi\|_{Lip} \cdot \|\varphi\|_{Lip}. \end{aligned}$$

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

Analog gilt:  $\|(\psi \circ \varphi)^{-1}\|_{Lip} \leq \|\psi^{-1}\|_{Lip} \cdot \|\varphi^{-1}\|_{Lip}$ .

$$\begin{aligned} \implies \zeta(\psi \circ \varphi, (X, \rho_X)) &= \|\psi \circ \varphi\|_{Lip} \cdot \|(\psi \circ \varphi)^{-1}\|_{Lip} \\ &\leq \|\psi\|_{Lip} \cdot \|\varphi\|_{Lip} \cdot \|\psi^{-1}\|_{Lip} \cdot \|\varphi^{-1}\|_{Lip} \\ &= \zeta(\psi, (Y, \rho_Y)) \cdot \zeta(\varphi, (X, \rho_X)) \end{aligned}$$

■

**Beweis des Lemmas:** Falls  $C_n(w)$  eine Kante  $\hat{e} \in E$  hat, die die Bedingung der Gleichung (6.5) erfüllt, so kann die Kante  $\hat{e}$  gelöscht werden, ohne die Metrik des entarteten Kreises zu verändern. Der verbleibende Weg kann isometrisch in den Raum  $\ell_1^1$  eingebettet werden.

Im Rest des Beweises wird der Fall, dass  $C_n(w)$  keine solche Kante  $\hat{e}$  enthält, untersucht. Da alle Kantengewichte positiv und rational sind, gibt es natürliche Zahlen  $h, m_1, m_2, \dots, m_n$ , so dass gilt:

$$w(e_k) = \frac{m_k}{h} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $M := \sum_{k=1}^n m_k$  eine gerade Zahl ist. (Anderenfalls multipliziere  $h$  und alle  $m_k$  mit 2.) Der Graph  $C_n(w)$  kann nun wie folgt in den gleichgewichteten Kreis  $C_M = (\tilde{V}, \tilde{E}) = (\{\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{M-1}\}, \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_M\})$  eingebettet werden:

$$\begin{aligned} f : C_n(w) &\longrightarrow C_M, \\ f(v_k) &= \tilde{v}_{s(k)} \end{aligned}$$

mit  $s(k) = \sum_{i=1}^k m_i$ .

Für die Verzerrung  $\zeta(f, C_n(w))$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \zeta(f, C_n(w)) &= \|f\|_{Lip} \cdot \|f^{-1}\|_{Lip} \\ &= h \cdot \frac{1}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Gemäß [67] kann  $C_M$  durch die Funktion  $\varphi$  aus (3.39) isometrisch in den Raum  $\ell_1$  eingebettet werden, und nach Beobachtung 6.10 gilt für die Gesamtverzerrung:

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi \circ f, C_n(w)) &\leq \zeta(f, C_n(w)) \cdot \zeta(\varphi, C_M) \\ &= 1, \end{aligned}$$

Die Multiplikation aller Koordinaten mit  $\frac{1}{h}$  verändert die Verzerrung nicht und liefert Isometrie.

■

Nun betrachte ich den allgemeinen Fall mit reellen positiven Kantenlängen.

## 6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den $\ell_2$ und in den $\ell_1$

**Satz 6.11** Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Einbettung  $\psi_\varepsilon$  des gewichteten Kreises  $C_n(w) = (V, E, w) = (\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{e_n = \{v_{n-1}, v_0\}\}, w)$  in den  $\ell_1$  mit

$$\zeta(\psi_\varepsilon, C_n(w)) < 1 + \varepsilon.$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, aber fest. Jede reelle Zahl kann beliebig genau durch eine rationale Zahl approximiert werden. Sei dazu  $\tilde{\varepsilon} := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$  und

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(e_1), \tilde{w}(e_2), \dots, \tilde{w}(e_n) \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\} \\ \text{mit} \quad & |\tilde{w}(e_k) - w(e_k)| < \tilde{\varepsilon} \cdot w(e_k) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Man kann nun den Kreis  $C_n(w)$  identisch in den Kreis  $C_n(\tilde{w})$  einbetten, wobei für die identische Einbettung  $\text{id}$  gilt:

$$\begin{aligned} \zeta(\text{id}, C_n(w)) &= \|\text{id}\|_{Lip} \cdot \|\text{id}^{-1}\|_{Lip} \\ &< (1 + \tilde{\varepsilon}) \cdot \frac{1}{1 - \tilde{\varepsilon}} \\ &\leq (1 + \tilde{\varepsilon}) \cdot (1 + 2\tilde{\varepsilon}) \\ &\leq 1 + 4\tilde{\varepsilon} \\ &\leq 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

nach Wahl von  $\tilde{\varepsilon}$ . Nach Lemma 6.9 kann  $C_n(\tilde{w})$  isometrisch in den Raum  $\ell_1$  eingebettet werden, und für die Gesamtverzerrung gilt nach Beobachtung 6.10:

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi \circ f \circ \text{id}, C_n(w)) &\leq \zeta(\text{id}, C_n(w)) \cdot \zeta(f, C_n(\tilde{w})) \cdot \zeta(\varphi, C_M) \\ &< 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

■

## 6.6 Einbettungen beliebig gewichteter Kreise in den Raum $\ell_1$ mit kleiner Dimension

Die Einbettung nach dem Beweis von Satz 6.11 kann eine sehr große Dimension benötigen. Daher schätze ich jetzt die Verzerrung für Einbettungen in den  $\ell_1^d$  ab.

**Lemma 6.12** Jeder gewichtete Kreis  $C_n = C_n(w) = (V, E, w) = (\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\} \cup \{e_n = \{v_{n-1}, v_0\}\}, w)$  kann mit einer Verzerrung  $\zeta \leq \frac{d}{d-1}$  in den Raum  $\ell_1^d$  (mit  $d \geq 2$ ) eingebettet werden.

**Beweis:** Falls  $C_n(w)$  eine Kante  $\hat{e} \in E$  hat, die die Bedingung der Gleichung (6.5) erfüllt, so kann  $C_n(w)$  nach dem Beweis von Lemma 6.9 sogar isometrisch in den  $\ell_1^1$  eingebettet werden. Habe  $C_n(w)$  also keine solche Kante  $\hat{e}$ .  
Seien

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

$$W_k := \sum_{i=1}^k w(e_i) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

und  $\bar{W} := \frac{W_n}{2}.$

Zunächst kann der Kreis  $C_n(w)$  in das Intervall  $[0, 2d]$  abgebildet werden:

$$f : C_n(w) \longrightarrow [0, 2d]$$

$$f(v_j) = \frac{d}{\bar{W}} \cdot W_j$$

Das Intervall  $[0, 2d]$  kann nun auf eine geschlossene Raumkurve des  $\ell_1^d$  abgebildet werden. Sei dazu  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, d$ ) der  $k$ -te Einheitsvektor des Raumes  $\ell_1^d$ .

$$\phi : [0, 2d] \longrightarrow \ell_1^d$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\bar{W}}{d} \cdot \left( \sum_{k \leq x} y_k + (x - \lfloor x \rfloor) \cdot y_{\lfloor x \rfloor} \right), & x \leq d \\ \frac{\bar{W}}{d} \cdot \left( \sum_{k > x-d} y_k - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot y_{\lfloor x \rfloor} \right), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $\text{dist}_{C_n(w)}(u, v) = \|\phi(f(u)) - \phi(f(v))\|_1$ , falls einer der beiden Punkte  $\phi(f(u)), \phi(f(v))$  auf einer Knickstelle der einbettenden Raumkurve liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege  $\phi(f(u))$  auf einer Knickstelle der einbettenden Raumkurve. Von diesem Punkt aus kann man bis zu einer Entfernung von  $\bar{W} \leq \text{diam } C_n(w)$  die Raumkurve entlang gehen, so dass die  $\ell_1$ -Norm gleichmäßig mit der Distanz im Graphen  $C_n(w)$  wächst.

Liege nun keiner der beiden Punkte  $\phi(f(u)), \phi(f(v))$  auf einer Knickstelle der einbettenden Raumkurve.  $z_1$  und  $z_2$  seien die beiden Knickstellen, die am nächsten zu  $\phi(f(u))$  liegen. Dann gilt für:

$$t_1 := \|z_1 - \phi(f(u))\|_1 \quad \text{und}$$

$$t_2 := \|z_2 - \phi(f(u))\|_1, \quad \text{dass}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{\bar{W}}{d}$$

ist, und die Strecke  $[z_1, z_2]$  liegt kollinear zu einem Einheitsvektor  $y_k$  (siehe Abbildung 6.3). Von den beiden Knickstellen  $z_1, z_2$  kann man entlang der Raumkurve jeweils genau  $d - 1$  Knickstellen weiter gehen, so dass gilt:

$$\|z_3 - \phi(f(u))\|_1 = \frac{d-1}{d} \cdot \bar{W} + t_1 \quad \text{und}$$

$$\|z_4 - \phi(f(u))\|_1 = \frac{d-1}{d} \cdot \bar{W} + t_2$$

6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

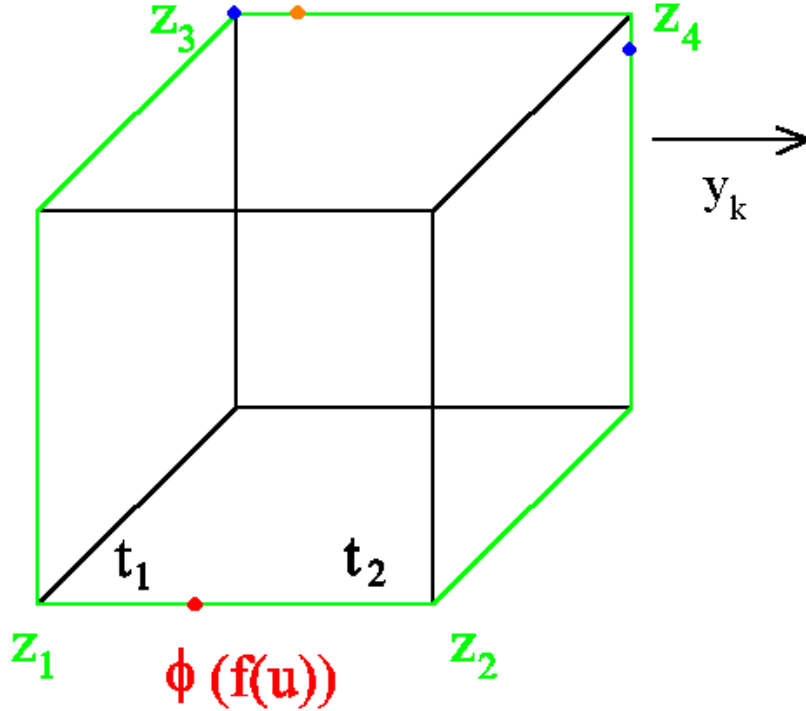


Abbildung 6.3: Einbettung eines gewichteten Kreises in den  $\ell_1^3$ . Die blauen Punkte haben jeweils den gleichen Abstand von  $\phi(f(u))$  wie ihre Urbilder von  $u$ . Der Abstand des orangefarbenen Punktes von  $\phi(f(u))$  wird in der Einbettung geschrumpft.

für zwei weitere Knickstellen  $z_3$  und  $z_4$ . Die Strecke  $[z_3, z_4]$  liegt ebenfalls kollinear zum Einheitsvektor  $y_k$ . Falls der Punkt  $\phi(f(v))$  nicht auf der Strecke  $[z_3, z_4]$  liegt, so gilt wieder  $\text{dist}_{C_n(w)}(u, v) = \|\phi(f(u)) - \phi(f(v))\|_1$ . Falls der Punkt  $\phi(f(v))$  auf der Strecke  $[z_3, z_4]$  liegt, tritt einer der folgenden Fälle ein:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{C_n(w)}(u, v) &> \frac{d-1}{d} \cdot \bar{W} + t_1 \quad \wedge \quad \|\phi(f(u)) - \phi(f(v))\|_1 < \frac{d-1}{d} \cdot \bar{W} + t_1 \quad \text{oder} \\ \text{dist}_{C_n(w)}(u, v) &> \frac{d-1}{d} \cdot \bar{W} + t_2 \quad \wedge \quad \|\phi(f(u)) - \phi(f(v))\|_1 < \frac{d-1}{d} \cdot \bar{W} + t_2. \end{aligned}$$

Somit gilt  $\|\phi \circ f\|_{Lip} \leq 1$ , und der Quotient  $\frac{\text{dist}_{C_n(w)}(u, v)}{\|\phi(f(u)) - \phi(f(v))\|_1}$  wird maximal für  $t_1 = t_2 = \frac{\bar{W}}{2d}$  und  $\text{dist}_{C_n(w)}(u, v) = \bar{W}$ .



6 Einbettung beliebig gewichteter Kreise in den  $\ell_2$  und in den  $\ell_1$

$$\begin{aligned}
 \implies \zeta(\phi \circ f, C_n(w)) &\leq \left\| (\phi \circ f)^{-1} \right\|_{Lip} \\
 &= \max_{\substack{u, v \in V \\ u \neq v}} \frac{\text{dist}_{C_n(w)}(u, v)}{\|\phi(f(u)) - \phi(f(v))\|_1} \\
 &\leq \frac{\bar{W}}{\frac{d-1}{d} \cdot \bar{W}} \\
 &= \frac{d}{d-1}
 \end{aligned}$$

Da  $v_0$  in eine Knickstelle der Raumkurve eingebettet wird gibt es mindestens eine Kante  $e = \{u, v_0\}$  mit  $\text{dist}_{C_n(w)}(u, v_0) = \|\phi(f(u)) - \phi(f(v_0))\|_1$ .  
 Also ist  $\|\phi \circ f\|_{Lip} = 1$ . ■

Wiederum kann ich nicht beweisen, dass die beschriebene Einbettung optimal in der Dimension  $d$  ist.

# 7 Einbettung eines gleichgewichteten vollständigen Graphen in die hyperbolische Ebene

Zum Schluss möchte ich noch ein Ergebnis für vollständige Graphen vorstellen. Solche Graphen haben nur die Tailenweite 3, aber einen relativ großen Knotengrad. Der  $K_n$  ist  $(n-1)$ -regulär, also ist der Minimalgrad der Familie der vollständigen Graphen in  $\Theta(n)$ , wobei  $n$  die Anzahl der Knoten eines Graphen der Familie ist. Für eine isometrische Einbettung des gleichgewichteten vollständigen Graphen  $K_n = (V, E, w)$  benötigt man im  $\ell_\infty$  eine Dimension von  $\lceil \log n \rceil$  (siehe Gleichung (3.2)). Für eine isometrische Einbettung in den euklidischen Raum benötigt man sogar eine Dimension von  $n-1$  (siehe Abschnitt 3.8). Ich werde einen solchen Graphen hier in die hyperbolische Ebene einbetten. Das Erstaunliche an meinem Ergebnis ist, dass man nur eine Dimension von 2 braucht und gleichzeitig die Verzerrung beliebig nahe an 1 annähern kann.

Im Rahmen dieser Arbeit soll auf eine Einführung in die hyperbolische Geometrie verzichtet werden. Der Leser findet zum Beispiel in [60] Informationen zu diesem Thema. Es sollen hier nur die metrischen Eigenschaften der hyperbolischen Ebene kurz erklärt werden. Ein Modell der hyperbolischen Ebene ist die obere offene Halbebene  $\mathbb{H}^2 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \right\}$ , die gemäß [3] und [24] mit folgender Metrik ausgestattet ist:

$$\rho \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2} \right) \quad \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2. \quad (7.1)$$

Dieses Modell heißt *Poincaré-Halbebenen-Modell*.

**Lemma 7.1** *Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Einbettung  $\varphi$  des gleichgewichteten vollständigen Graphen  $K_n = (V, E)$  in die Poincaré-Halbebene mit Verzerrung  $\zeta(\varphi, K_n) < 1 + \varepsilon$ .*

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Wir wählen folgende Einbettung in die Poincaré-Halbebene, die ein Modell der hyperbolischen Ebene ist:

$$\varphi : K_n \longrightarrow \mathbb{H}^2; \quad (7.2)$$

$$\varphi(v_k) = \begin{bmatrix} k \\ y \end{bmatrix} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (7.3)$$

$$\text{mit } y < \sqrt{2} \cdot n^{-1/\varepsilon}. \quad (7.4)$$

## 7 Einbettung eines gleichgewichteten vollständigen Graphen in die hyperbolische Ebene

Ferner definieren wir:

$$\begin{aligned} r(k) &= \rho(\varphi(v_i), \varphi(v_{i+k})) \\ &= \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{k^2}{y^2}\right) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-k\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

$r(k)$  ist offensichtlich eine monoton wachsende Funktion in  $k$ , weil die  $\operatorname{arcosh}$ -Funktion monoton wachsend ist. Damit gilt:

$$\|\varphi^{-1}\|_{Lip} = \max_{1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{r(k)} = \frac{1}{r(1)} \quad (7.6)$$

$$\text{und} \quad \|\varphi\|_{Lip} = \max_{1 \leq k \leq n-1} \frac{r(k)}{1} = r(n-1). \quad (7.7)$$

$$\implies \zeta(\varphi, K_n) = \|\varphi\|_{Lip} \cdot \|\varphi^{-1}\|_{Lip} = \frac{r(n-1)}{r(1)}. \quad (7.8)$$

Formen wir (7.5) etwas um, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} r(k) &= \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{k^2}{y^2}\right) \\ \underbrace{\frac{e^{r(k)} + e^{-r(k)}}{2}}_{\cosh r(k)=} &= 1 + \frac{k^2}{y^2} && \wedge \quad r(k) \geq 0 \\ \iff e^{r(k)} &= 2 + \frac{2k^2}{y^2} - e^{-r(k)} && \wedge \quad r(k) \geq 0 \quad (7.9) \\ \iff r(k) &= \ln\left(2 + \frac{2k^2}{y^2} - e^{-r(k)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{2k^2}{y^2} + \underbrace{\left(1 - e^{-r(k)}\right)}_{\in [0,1]}\right) && \wedge \quad r(k) \geq 0. \end{aligned}$$

Für  $r(1)$  folgt mit (7.4):

$$\begin{aligned} r(1) &\geq \ln\left(\frac{2}{y^2}\right) \\ &> \frac{2 \cdot \ln n}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Für  $r(n-1)$  folgt aus (7.9):

7 Einbettung eines gleichgewichteten vollständigen Graphen in die hyperbolische Ebene

$$\begin{aligned} r(n-1) &\leq \ln \left( (n-1)^2 \cdot \left( 1 + \frac{2}{y^2} + (1 - e^{-r(1)}) \right) \right) \\ &= \ln \left( 1 + \frac{2}{y^2} + (1 - e^{-r(1)}) \right) + 2 \cdot \ln(n-1) \\ &= r(1) + 2 \cdot \ln(n-1) \\ &= r(1) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot \ln(n-1)}{r(1)} \right) \\ &< r(1) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot \ln(n-1) \cdot \varepsilon}{2 \cdot \ln n} \right) \quad (\text{mit (7.10)}) \\ &< r(1) \cdot (1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (7.8) die Aussage des Lemmas. ■

## 8 Einbettung von Graphen in Graphen

Die Einbettung von Graphen in andere Graphen wurde von verschiedenen Autoren untersucht. Aus Zeitgründen kann hier nur noch auf die Literatur hingewiesen werden: [5], [86] und [88] eignen sich sehr gut als Einstieg zu diesem Thema.

## 9 Ausblick

Die Einbettung von Graphen in metrische Räume wird auch in der Zukunft ein Gegenstand der mathematischen Forschung bleiben. Denn einerseits gibt es noch ungelöste Probleme auf diesem Gebiet. Einige von ihnen sind:

- Sei  $\mathcal{G}$  eine beliebige Graphenfamilie mit Minimalgrad  $\delta(\mathcal{G}) \geq 3$  und  $\limsup_{G \in \mathcal{G}} g(G) = \infty$ . Gilt  $\zeta_2(G) \in \Omega(g(G)) \quad \forall G \in \mathcal{G}$ ? (Siehe Abschnitt 5.7.)
- Sei  $\mathcal{G} = (G_i)_{i=1}^{\infty}$  eine beliebige Graphenfamilie mit mit Minimalgrad  $\delta(\mathcal{G}) \geq 3$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} g(G_i) = \infty$ . Gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_1(G_i) = \infty$ ? (Siehe Abschnitt 5.8.)
- Sei  $G = (V, E, w)$  ein Graph, dessen Distanzfunktion als nichtnegative Linearkombination von Schnitt-Halbmetriken dargestellt werden kann. Gilt  $\zeta_2(G) = \mathcal{O}(\sqrt{\log |V|})$  für alle solchen Graphen  $G$ ? (Siehe Abschnitt 3.11.)

Andererseits gibt es bisher nur wenige Ergebnisse zur Einbettung von Graphen in projektive oder hyperbolische Räume<sup>1</sup>. Dies könnte sich künftig zu einem interessanten Forschungszweig entwickeln.

---

<sup>1</sup>Zur Definition siehe [60]

# A Hinweise zu den Programmen auf CD-ROM

In dem Ordner `MATLAB_Dateien` auf der CD-ROM befinden sich folgende M-Dateien, die in MATLAB<sup>1</sup> ausgeführt werden können:

- `BandeltDress`
- `Cayleygraph`
- `Distanzmatrix`
- `WeightedCycle`

Wenn die M-Datei „**WeightedCycle**“ installiert ist (oder die CD-ROM eingelegt und ein Pfad zu dem Verzeichnis `MATLAB_Dateien` eingerichtet ist), kann man in MATLAB folgenden Befehl eingeben:

```
[K, fall, it, Z] = WeightedCycle (w, P) .
```

$w$  muss ein Spaltenvektor mit den Längen der Kreiskanten sein. Durch  $w$  ist der Kreisgraph  $C_m(w) = (V, E, w)$  eindeutig beschrieben. Insbesondere ist  $m = |E| = |V|$  die Anzahl der Komponenten des Vektors  $w$ .  $P$  ist eine optimale Matrix des semidefiniten Programms (3.15) für den Kreisgraphen. Die Angabe von  $P$  ist nicht erforderlich. Falls man  $P$  nicht angeben will, lautet der MATLAB-Befehl einfach:

```
[K, fall, it, Z] = WeightedCycle (w) .
```

$K = K(C_m(w))$  ist die in Satz 6.4 angegebene reelle Zahl.

Der Rückgabewert „fall“ gibt an, welcher Fall des Satzes 6.4 vorliegt. Dabei steht 1 für den Fall (IIa) und 2 für den Fall (IIb) des Satzes. fall ist null, falls die Newton-Iteration nicht erfolgreich war.

Der Rückgabewert „it“ gibt die Anzahl der benötigten Iterationsschritte an.

$Z$  ist eine Matrix mit den Schrumpfungen der Knotenpaare. Ein maximaler Eintrag dieser Matrix entspricht genau der Verzerrung.

`WeightedCycle` zeichnet auch eine graphische Darstellung der Einbettung (6.2) aus Satz 6.4. Dabei wird das Bild der Knotenmenge  $V$  schwarz gezeichnet. Falls eine semidefinite Matrix  $P$  angegeben wurde, wird die Einbettung, die der Matrix  $M$  mit  $MM^T = P$  entspricht, ebenfalls gezeichnet, wobei das Bild der Knotenmenge  $V$  grün dargestellt wird. Dies ist der einzige Zweck für die Angabe einer Matrix  $P$  im Aufruf von `WeightedCycle`. Das Programm verschiebt die Einbettung, die der Matrix  $M$  entspricht, so dass der Schwerpunkt der Bilder der Knoten  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  im Koordinatenursprung liegt, dreht und spiegelt sie bei Bedarf, um einen besseren optischen Vergleich zu der Einbettung (6.2) zu ermöglichen.

Falls beim Aufruf von `WeightedCycle` eine positiv semidefinite Matrix  $P$  mit mehr als zwei positiven Eigenwerten angegeben wird, so stellen die grün gezeichneten Punkte

---

<sup>1</sup>MATLAB ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks, Inc; siehe [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

## A Hinweise zu den Programmen auf CD-ROM

nur die Projektion der Einbettung auf auf einen zweidimensionalen Unterraum dar. Sollte jemand den Programmcode von `WeightedCycle` lesen, so ist eine Besonderheit im Fall (IIb) des Satzes 6.4 zu beachten: Die Newton-Iteration zum Lösen der (eigentlich naheliegenden) Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \arcsin(K \cdot w(e_i)) - \arcsin(K \cdot w(e_n)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

konvergierte für einige Beispielgraphen nicht. Darum löst die Newton-Iteration stattdessen die Gleichung:

$$\ln \left( \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \arcsin(K \cdot w(e_i))}{\arcsin(K \cdot w(e_n))} \right) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Seitdem im Programm „`WeightedCycle`“ die Gleichung (A.1) durch die Gleichung (A.2) ersetzt wurde, konvergierte die Newton-Iteration mit allen gerechneten Beispielen. Darunter waren auch stumpfwinklige Dreiecke, die offensichtlich zu Fall (IIb) des Satzes 6.4 gehören.

Das MATLAB-Programm „**BandeltDress**“ implementiert den Algorithmus von Bandelt und Dress, der eine Graphmetrik in eine positive Linearkombination von Schnitt-Halbmetriken und eine Rest-Halbmatrik zerlegt, aus [10]. Gemäß [31] ist das Entscheidungsproblem, ob ein Graph isometrisch in den  $\ell_1$  eingebettet werden kann, NP-vollständig (siehe Abschnitt 3.9). Aber der Algorithmus von Bandelt und Dress läuft in Polynomialzeit und findet somit nicht unbedingt eine „optimale“ Zerlegung. Das heißt, dass der Algorithmus von Bandelt und Dress auch dann eine nichtverschwindende Rest-Halbmatrik liefern kann, wenn der Graph eigentlich isometrisch in den  $\ell_1$  eingebettet werden kann.

Das MATLAB-Programm „`BandeltDress`“ erwartet als Eingabe eine Distanzmatrix  $D$ . Es liefert eine Matrix  $A$  mit Schnitten, wobei jede Zeile die (mit 1 beginnenden) Knotennummern (entsprechend den Indizes der Distanzmatrix) eines Schnittes enthält. Die Zeilen von  $A$  sind mit Nullen aufgefüllt. Das Programm liefert ferner einen Spaltenvektor  $\alpha$  mit den Gewichten, die zu den Schnitten gehören, sowie eine quadratische Matrix der gleichen Ordnung wie  $D$  mit der Rest-Halbmatrik.

Das MATLAB-Programm „**Cayleygraph**“ realisiert die Konstruktion des regulären Graphen  $\text{Cay}(\text{SL}_2(\mathbb{F}_p), \cdot, S)$  mit großer Tailenweite nach [76] wie in Abschnitt 5.5. Als Eingabe wird eine Primzahl  $p$  erwartet. Zurückgeliefert werden eine Knotenliste  $V$ , eine Adjazenzmatrix  $A$  sowie die Tailenweite  $g$ . In der Knotenliste  $V$  werden die  $2 \times 2$ -Matrizen einfach hintereinander geschrieben. Für einen Index  $i$  entsprechen die Spalten  $2i - 1$  und  $2i$ , falls vorhanden, dem Knoten  $v_i \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ .

„**Distanzmatrix**“ ist ein einfaches Hilfsprogramm, das aus einer Adjazenzmatrix  $A$  eines gleichgewichteten Graphen die zugehörige Distanzmatrix  $D$  berechnet.



## B Weitere Graphiken zur Einbettung gewichteter Kreise in den euklidischen Raum

Hier kann der Leser noch die graphischen Darstellungen der Einbettungen der gewichteten Kreise  $C_m(w) = (V_m, E_m, w_m)$  mit  $m = \{5, 6, 7, 8\}$  aus Tabelle 6.1 in die euklidische Ebene betrachten. Die Bilder der Knotenmengen  $V_m$  unter der Einbettung (6.2) sind jeweils schwarz, die Bilder der Knotenmengen  $V_m$  unter der vom NEOS-Solver pensdp berechneten Einbettung grün dargestellt. Alle diese Graphiken wurden vom MATLAB<sup>1</sup>-Programm „WeightedCycle“ ausgegeben.

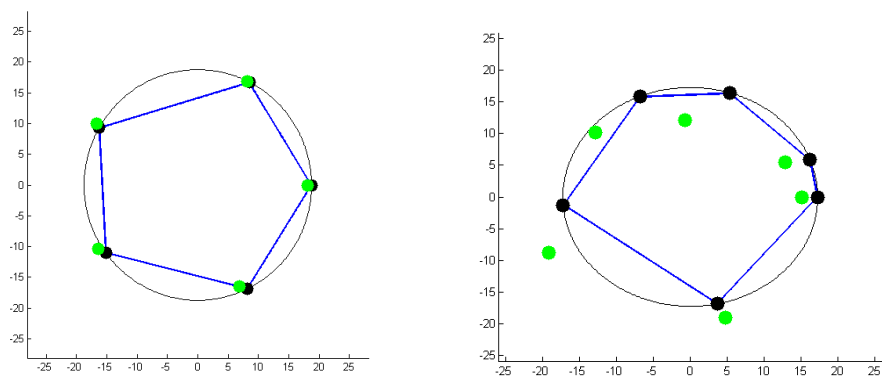


Abbildung B.1: Die Einbettung des Fünf- und des Sechsecks.

<sup>1</sup>MATLAB ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks, Inc; siehe [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

B Weitere Graphiken zur Einbettung gewichteter Kreise in den euklidischen Raum

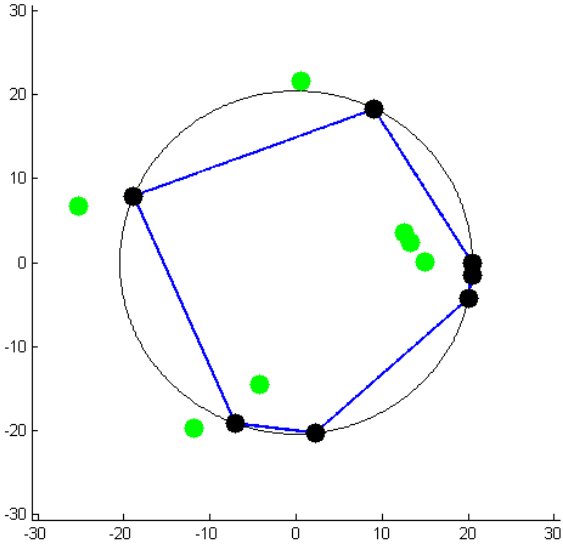


Abbildung B.2: Die Einbettung des Siebenecks.

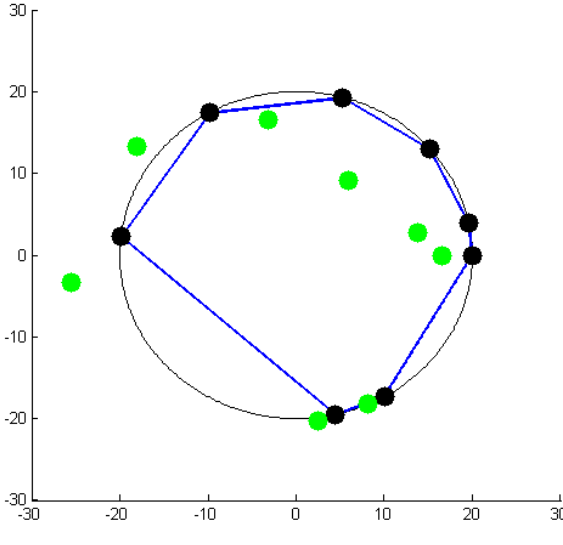


Abbildung B.3: Die Einbettung des Achtecks.

# C Die wichtigsten Notationen im Überblick

		Seite
$\mathbf{1}$	ein Vektor, dessen Komponenten alle 1 sind	
$\ x\ _p$	die $p$ -Norm des Vektors $x$	15
$\ \varphi\ _{Lip}$	die Expansion einer Einbettung $\varphi$	14
$\ \varphi^{-1}\ _{Lip}$	die Schrumpfung einer Einbettung $\varphi$	14
$\delta(G)$	der Minimalgrad des Graphen $G$	9
$\delta(\mathcal{G})$	der Minimalgrad der Graphenfamilie $\mathcal{G}$	21
$\Delta(G)$	der Maximalgrad des Graphen $G$	9
$\Delta(\mathcal{G})$	der Maximalgrad der Graphenfamilie $\mathcal{G}$	21
$\zeta(\varphi, G)$	die Verzerrung einer Einbettung $\varphi$ des Graphen $G$	14
$\zeta_p(G)$	die optimale Verzerrung einer $\ell_p$ - Einbettung des Graphen $G$	17
$\Phi(G)$	die Expanderkonstante des Graphen $G$	21
$\Phi(\mathcal{G})$	die Expanderkonstante der Graphenfamilie $\mathcal{G}$	21
$A^{(i)}$	die $i$ -te Adjazenzmatrix eines Graphen	19
$B_\rho(x, r)$	eine Kugel in einem metrischen Raum	13
$B_Z(x, r)$	eine Kugel im Banach-Minkowski-Raum $Z$	16
$C_m$	ein Kreisgraph mit $m$ Kanten	10
$C_m(w)$	ein Kreisgraph mit $m$ Kanten und der Gewichtsfunktion $w$	66
$\text{Ch}(G)$	die Cheegerkonstante des Graphen $G$	21
$\text{Ch}(\mathcal{G})$	die Cheegerkonstante der Graphenfamilie $\mathcal{G}$	21
$\text{diam}(G)$	der Durchmesser eines Graphen $G$	10
$\text{dist}_G(u, v)$	die Distanz der Knoten $u$ und $v$ im Graphen $G$	10
$E(G)$	die Kantenmenge eines Graphen $G$	9
$G = (V, E, w)$	ein gewichteter Graph	9
$g(G)$	die Tailenweite eines Graphen $G$	11
$I_n$	die Einheitsmatrix der Ordnung $n$	
$\ell_p$	ein Vektorraum mit der $p$ -Norm	15
$\ell_p^d$	der Vektorraum mit der $p$ -Norm und der Dimension $d$	15
$\mathcal{Q}_n$	der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen der Ordnung $n$ mit Zeilensumme null	18
$\mathcal{S}(X)$	die Menge aller Schnitte einer endlichen Menge $X$	13
$\mathcal{S}^n$	der Raum der symmetrischen Matrizen der Ordnung $n$	18
$\mathcal{S}_+^n$	der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen der Ordnung $n$	18
$\mathcal{S}_{++}^n$	die Menge der positiv definiten Matrizen der Ordnung $n$	18
$V(G)$	die Knotenmenge eines Graphen $G$	9
$V_Z$	das Volumen der Einheitskugel im Banach-Minkowski-Raum $Z$	16
$(X, \rho)$	ein Distanzraum, meistens ein metrischer Raum	13

## Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Chemnitz, 14. 6. 2011

---

Jens Fankhänel

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner: Diskrete Mathematik, Vieweg, 6. Auflage 2007.
- [2] M. Aigner: Graphentheorie, eine Entwicklung aus dem 4-Farben-Problem; Teubner-Verlag Stuttgart, 1984.
- [3] S. A. Albeverio, P. Exner, V. A. Geyler: Geometric phase related to point-interaction transport on a magnetic Lobachevsky plane, Letters in Mathematical Physics 55, No. 1, 9 - 16 (2001).
- [4] N. Alon and V. D. Milman: Embedding of  $\ell_\infty^k$  in finite dimensional Banach spaces, Israel Journal of Mathematics, Vol. 45, no. 4, 1983.
- [5] I. Althöfer, G. Das, D. Dobkin, D. Joseph, J. Soares: On sparse Spanners of Weighted Graphs, Discrete & Computational Geometry 9:81 - 100 (1993).
- [6] D. Amir and V. D. Milman: Unconditional and symmetric set in  $n$ -dimensional normed spaces, Israel Journal of Mathematics, Vol. 37, Nos. 1-2, 1980.
- [7] J. Arias-de-Reyna and L. Rodriguez-Piazza: Finite metric spaces needing high dimension for Lipschitz embeddings in Banach spaces, Israel Journal of Mathematics 79 (1992), 103 - 111.
- [8] S. Arora, J. R. Lee, A. Naor: Euclidean distortion and the Sparsest Cut, STOC '05, Baltimore, Maryland, USA, © 2005 ACM.
- [9] K. Ball: Markov Chains, Riesz Transforms and Lipschitz Maps, Geometric and Functional Analysis 2, p. 137 - 172 (1992).
- [10] H. Bandelt, A. W. M. Dress: A Canonical Decomposition Theory for Metrics on a Finite Set, Advances in Mathematics 92, 47 - 105 (1992).
- [11] E. Bannai, T. Ito: Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin / Cummings, Menlo Park, CA, 1984; chapter3.
- [12] Y. Bartal: Probabilistic approximation of metric spaces and its algorithmic applications (English summary), 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Burlington, VT, 1996), 184 - 193, IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1996; © Copyright American Mathematical Society 2011.
- [13] Y. Bartal: On approximating arbitrary metrics by tree metrics, STOC '98 (Dallas, Texas); 161 - 168, ACM, New York, 1999; © Copyright American Mathematical Society 2011.
- [14] H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie, De Gruyter-Lehrbuch, 1990.
- [15] C. T. Benson: Minimal regular graphs of girths eight and twelve, Canad. J. Math. 18 (1966), 1091 - 1094; © Copyright American Mathematical Society 1967, 2011.
- [16] N. L. Biggs and M. J. Hoare: The sextet construction for cubic graphs, Combinatorica 3 (2) (1983), 153 - 165.

*Literaturverzeichnis*

- [17] P. Biswal, J. R. Lee, S. Rao: Eigenvalue bounds, spectral partitioning, and metrical deformations via flows (English summary), *J. ACM* 57 (2010), no. 3, Art. 13, 23 pp., © Copyright 2011, American Mathematical Society.
- [18] B. Borchers: SDPLIB 1.2, A Library of Semidefinite Programming Test Problems, *Optimization Methods & Software* 11-12, No. 1-4, 683 - 690 (1999); ©Copyright American Mathematical Society 2011.
- [19] J. Bourgain: On Lipschitz embedding of finite metric spaces in Hilbert space, *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 52, Nos. 1-2, 1985.
- [20] J. Bourgain, V. Milman, H. Wolfson: On type of metric spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, Volume 294, Number 1, 1986.
- [21] J. Bourgain, T. Figiel, V. Milman: On Hilbertian subsets of finite metric spaces, *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 55, No. 2, 1986.
- [22] J. Bourgain: The metrical interpretation of superreflexivity in Banach spaces, *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 56, No. 2, 1986.
- [23] J. Bourgain, A. Gamburd: New results on expanders, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 342 (2006), 717 - 721.
- [24] V. Cammarota, E. Orsinger: Hitting spheres on hyperbolic spaces; arXiv: 1104.1043v1.
- [25] V. Chepoi, B. Fichet: A note on circular decomposable metrics (English summary), *Geometriae Dedicata* 69 (1998), no. 3, 237 - 240, © Copyright 2011, American Mathematical Society.
- [26] F. R. K. Chung: *Spectral graph theory*, American Mathematical Society, Providence, RI 1997.
- [27] S. M. Cioabă: On the extreme eigenvalues of regular graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 96 (2006), 367 - 373.
- [28] B. Csaba: On embedding well-separable graphs, *Discrete Mathematics* 308 (2008) 4322 - 4331, © 2007 Elsevier B. V.
- [29] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić: *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, London Mathematical Society, Student Texts 75; Cambridge University Press, 2010.
- [30] S. Dasgupta, A. Gupta: An elementary proof of the Johnson-Lindenstrauss Lemma, Technical Report, TR-99-006, International Computer Science Institute, Berkeley, California.
- [31] M. M. Deza and M. Laurent: *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer Verlag, 1997.
- [32] R. Diestel: *Graphentheorie*, Springer-Verlag 1996.
- [33] D. Ž. Djoković: Distance-Preserving Subgraphs of Hypercubes, *Journal of Combinatorial Theory (B)* 14, 263 - 267 (1973).
- [34] P. Enflo: On the nonexistence of uniform homeomorphisms between  $L_p$ -spaces, *Arkiv för Matematik*, Band 8 nr 11, 1968.
- [35] P. Enflo: On a problem of Smirnov, *Arkiv för Matematik*, Band 8 nr 12, 1969.
- [36] P. Enflo: Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, *Israel J. Math.*, Vol. 13, 1972.

*Literaturverzeichnis*

- [37] P. Erdős, H. Sachs: Reguläre Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle -Wittenberg, Math.-Naturwiss. Reihe* 12, 251 - 258 (1963), ISSN 0138 - 1504.
- [38] U. Feige: Approximating the Bandwidth via Volume Respecting Embeddings, *Journal of Computer and System Sciences* 60, 510 - 539 (2000)
- [39] P. Frankl and H. Maehara: The Johnson-Lindenstrauss Lemma and the Sphericity of Some Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 44, 355 - 362 (1988).
- [40] N. Garg, V. V. Vazirani, M. Yannakakis: Approximate Max-Flow Min-(Multi)Cut Theorems and Their Applications, *SIAM J. Comput.* Vol. 25, No. 2, pp. 235 - 251, 1996; © 1996 Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [41] W. Göhler: Formelsammlung Höhere Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 14. Auflage, 1999.
- [42] F. Göring, J. Harant, D. Rautenbach, I. Schiermeyer: Locally Dense Independent Sets in Regular Graphs of Large Girth, Technische Universität Chemnitz, Preprint 2007 - 19, Preprintreihe der Fakultät für Mathematik, ISSN 1614 - 8835.
- [43] R. L. Graham, P. M. Winkler: On Isometric Embeddings of Graphs, *Transactions of the American Mathematical Society*, Volume 288, Number 2, April 1985.
- [44] A. Gupta, I. Newman, Y. Rabinovich, A. Sinclair: Cuts, Trees and  $l_1$  Embeddings of Graphs, Carnegie Mellon University, Research Showcase, 10-1-2002.
- [45] Pinar Heggernes, Daniel Meister: Hardness and approximation of minimum distortion embeddings, *Information Processing Letters* 110 (2010) 312 - 316.
- [46] C. Helmberg: SBmethod, A C++ Implementation of the Spectral Bundle Method, Manual to Version 1.1; Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2000.
- [47] C. Helmberg: Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization, chapter 1, Habilitationsschrift, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2000.
- [48] C. Helmberg, F. Göring: Private Kommunikation, 2010 - 2011.
- [49] H. Heuser: Funktionalanalysis, Theorie und Anwendung, Teubner-Verlag Wiesbaden, 2006.
- [50] S. Hoory, N. Linial, a. Wigderson: Expander graphs and their applications, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Volume 43, Number 4, 2006, 439 - 561.
- [51] W. Imrich: Explicit construction of regular graphs without small cycles, *Combinatorica* 4 (1), (1984) 53 - 59.
- [52] K. Jansen, M. Margraf: Approximative Algorithmen und Nichtapproximierbarkeit, De-Gruyter-Lehrbuch, 2008.
- [53] F. Jarre, J. Stoer: Optimierung, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2004.
- [54] M. Jerrum, A. Sinclair: Conductance and the rapid mixing property for Markov chains: The approximation of the permanent resolved, in *Proceedings of the 20th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1988, pp. 235 - 244.
- [55] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss: Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space, *Contemporary Mathematics* 26 (1984), 189 - 206.

*Literaturverzeichnis*

- [56] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, G. Schechtman: Extensions of Lipschitz maps into Banach spaces, *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 54, No. 2, 1986.
- [57] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, G. Schechtman: On Lipschitz embedding of finite metric spaces in low dimensional normed spaces, in „Geometric Aspects of Functional Analysis“, (J. Lindenstrauss and V. Milman eds.) LNM 1267, Springer, Berlin - New York, 1987, 177 - 184.
- [58] W. B. Johnson, Assaf Naor: The Johnson-Lindenstrauss Lemma Almost Characterizes Hilbert Space, But Not Quite, *Discrete & Computational Geometry* (2010) 43; 542 - 553.
- [59] P. Kaster: Seminararbeit „Verzerrungsarme Einbettungen in hochdimensionalen Vektorräumen“, Universität Bonn, 2003.
- [60] B. Klotzek: *Euklidische und nichteuklidische Elementargeometrien*, Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [61] B. Korte, J. Vygen: *Kombinatorische Optimierung*, Springer 2008.
- [62] R. Krauthgamer, J. R. Lee: The intrinsic dimensionality of graphs, *Combinatorica* 27 (5) (2007) 551 - 585.
- [63] T. Leighton, S. Rao: Multicommodity Max-Flow Min-Cut Theorems and Their Use in Designing Approximation Algorithms, *Journal of the ACM*, Vol. 46, No. 6, November 1999, pp. 787 - 832; © 1999 ACM.
- [64] A. Lenk: Verteidigung der Diplomarbeit „Euklidische Graphenrealisierungen mit geringer Verzerrung in kleiner Dimension“.
- [65] J. Lindenstrauss: On nonlinear projections in Banach spaces, *Michigan Math. J.* 11, 1964, 263 - 287; ©Copyright American Mathematical Society 1965, 2011.
- [66] J. Lindenstrauss: A remark on  $\mathcal{L}_1$  spaces, *Israel J. Math.*, Vol. 8, 1970.
- [67] N. Linial, E. London, Y. Rabinovich: The geometry of graphs and some of its algorithmic applications, *Combinatorica* 15 (2) (1995), 215 - 245.
- [68] N. Linial, A. Magen, M. E. Saks: Low distortion Euclidean embeddings of trees, *Israel Journal of Mathematics* 106 (1998), 339 - 348.
- [69] N. Linial and A. Magen: Least-Distortion Euclidean Embeddings of Graphs: Products of Cycles and Expanders, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 79, 157 - 171 (2000).
- [70] N. Linial, A. Magen, A. Naor: Girth and Euklidian Distortion, *GAFSA Geometric and Functional Analysis*, Vol. 12 (2002) 380 - 394, Birkhäuser Verlag Basel.
- [71] N. Linial: Finite metric-spaces - combinatorics, geometry, and algorithms (English summary), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III (Beijing, 2002), 573 - 586; Higher Ed. Press, Beijing, 2002; © Copyright American Mathematical Society 2003, 2011.
- [72] N. Linial and M. Saks: The Euclidean Distortion of Complete Binary Trees, *Discrete & Computational Geometry* 29: 19-21 (2003), Springer-Verlag New York (© 2002).
- [73] N. Linial: Private Kommunikation, 2010 - 2011.
- [74] A. Lubotzky, R. Phillips, P. Sarnak: Ramanujan graphs, *Combinatorica* 8 (3) (1988), 261 - 277.



*Literaturverzeichnis*

- [75] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar: Combinatorial group theory, Interscience, N. Y., 1966.
- [76] G. A. Margulis: Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes, *Combinatorica* 2 (1) (1982), 71 - 78.
- [77] W. Matiaske: Statistische Datenanalyse mit Mikrocomputern, Oldenbourg, 1990; Kapitel 3.
- [78] J. Matoušek: Bi-Lipschitz embeddings into low-dimensional Euclidean spaces, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 31 (1990), No. 3, 589 - 600.
- [79] J. Matoušek: Note on bi-Lipschitz embeddings into normed spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 33,1 (1992) 51 - 55.
- [80] J. Matoušek: On the distortion required for embedding finite metric spaces into normed spaces, *Israel Journal of Mathematics* 93 (1996), 333 - 344.
- [81] J. Matoušek: On embedding expanders into  $l_p$  spaces, *Israel Journal of Mathematics* 102 (1997), 189 - 197.
- [82] J. Matoušek: On embedding trees into uniformly convex Banach spaces, *Israel Journal of Mathematics* 114 (1999), 221 - 237.
- [83] J. Matoušek: On Variants of the Johnson-Lindenstrauss Lemma, Wiley Inter-Science, 2008.
- [84] J. Matoušek: The number of unit distances is almost linear for most norms, *Advances in Mathematics* 26 (2011) 2618 - 2628.
- [85] S. Neupert: Diplomarbeit „Lineare Algebra und Erfüllbarkeitsalgorithmen für zufällige Formeln“, TU Chemnitz, Fakultät für Informatik, 2005.
- [86] D. Peleg, A. A. Schäffer: Graph spanners, *Journal of Graph Theory* 13 (1989), no. 1, 99 - 116, © Copyright American Mathematical Society 1990, 2011.
- [87] A. Pietsch: Theorie der Operatorenideale, *Wissenschaftliche Beiträge der Friedrich-Schiller-Universität Jena*, 1972.
- [88] Y. Rabinovich, R. Raz: Lower Bounds on the Distortion of Embedding Finite Metric Spaces on Graphs, *Discrete & Computational Geometry* 19; 79 - 94 (1998), Springer-Verlag New York Inc.
- [89] S. Rao: Small distortion and volume preserving embeddings for Planar and Euclidean metrics, SCG '99 Miami Beach Florida, © ACM 1999.
- [90] O. Schenk: Vorlesungsskript „Graph-Partitionierung“, Departement Informatik, Universität Basel, 2003.
- [91] I. J. Schoenberg: Remarks to Maurice Fréchet's article "Sur la définition axiomatique d'une classe d'espace distancié vectoriellement applicable sur l'espace de Hilbert", *Annals of Mathematics*, Vol. 36, No. 3, July, 1935.
- [92] I. J. Schoenberg: On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space, *Annals of Mathematics*, Vol. 38, No. 4, October, 1937.
- [93] U. Schöning: Algorithmik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin, 2001.
- [94] A. M. So, Y. Ye, J. Zhang: A Unified Theorem on SDP Rank Reduction, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 33, No. 4, 2008, 910 - 920.

*Literaturverzeichnis*

- [95] P. Solé: The Second Eigenvalue of Regular Graphs of Given Girth, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 56, 239 - 249 (1992).
- [96] F. Vallentin: Optimal distortion embeddings of distance regular graphs into Euclidean spaces, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 98 (2008), 95 - 104.
- [97] K. Wagner, R. Bodendiek: *Graphentheorie, Band I*, B.-I.-Wissenschaftsverlag Mannheim, 1989.
- [98] H. Walther: Über reguläre Graphen gegebener Tailenweite und minimaler Knotenzahl, *Wissenschaftliche Zeitschrift HfE Ilmenau* 11 (1965), 93 - 96.
- [99] H. Walther: Eigenschaften von regulären Graphen gegebener Tailenweite und minimaler Knotenzahl, *Wissenschaftliche Zeitschrift HfE Ilmenau* 11 (1965), 167 - 168.
- [100] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2005.
- [101] A. Weiss: Girths of bipartite sextet graphs, *Combinatorica* 4 (2-3) (1984) 241 - 245.
- [102] P. M. Winkler: Proof of the Squashed Cube Conjecture, *Combinatorica* 3 (1) (1983) 135 - 139.

Der fehlende Hinweis auf ein Copyright bedeutet nicht, dass das betreffende Buch oder der betreffende Aufsatz frei verfügbar ist. Grundsätzlich ist bei allen aufgeführten Büchern und Aufsätzen ein Urheberrecht, ein Copyright oder beides vorbehalten.

# Index

- Abschätzungen
  - für das Wachstum einer Funktion, 17
- adjazent, 9
- Adjazenzmatrix, 19
  - i-te  $\sim$ , 19
- affine Hülle, 16
- Algorithmus
  - effizienter  $\sim$ , 17
- Approximationsalgorithmus, 17
  
- Banachraum, 15
- Baum, 11
- benachbarte Knoten, 9
- Bipartition, 20
- Blatt
  - eines Baumes, 11
- Bose-Mesner-Algebra, 37
  
- Cayleygraph, 59
- Cheegerkonstante
  - eines Graphen, 21
  
- Dimension
  - eines normierten Raumes, 15
- Distanz
  - zweier Knoten, 10
- Distanzfunktion
  - eines Graphen, 10
  - eines Raumes, 12
- Distanzmatrix, 19
- Distanzraum, 12
- Dreiecksungleichung, 12
- Dualität
  - schwache  $\sim$ , 35
  - starke  $\sim$ , 35
- Durchmesser
  - eines Graphen, 11
  
- Ecke
  - eines Graphen, 9
- Eichfigur, 16
- Eigenwert
  - eines Graphen, 19
- Einbettung, 14
  - eines Johnsongraphen, 39
  - dimensions-optimale  $\sim$ , 17
  - eines gleichgewichteten Graphen, 25
  - eines Graphen mit großer Taille, 61
  - eines Hamminggraphen, 39
  - eines Kreises, 39
  - exakt  $\sim$ , 15
  - gewichteter Dreiecke, 75
  - isometrische  $\sim$ , 14, 24
  - optimale  $\sim$ , 16
  - von Bäumen, 24
    - in den euklidischen Raum, 28
- Einheitskugel, 16
- Einsenvektor, 19
- Endknoten
  - einer Kantenfolge, 9
- Expander-Graphenfamilie, 22
- Expanderkonstante
  - eines Graphen, 21
- Expansion, 14
  
- Fluss, 43
- Flussmenge
  - zulässige  $\sim$ , 43
- Funktion
  - injektive  $\sim$ , 14
  - schiefssymmetrische  $\sim$ , 43
  - symmetrische  $\sim$ , 12
  
- Geometrie
  - hyperbolische  $\sim$ , 82
- Geronimuspolynome, 61
- Gewicht
  - einer Kante, 9
- Gewichtsfunktion, 9
- Grad
  - eines Knotens, 9
- Graph, 9
  - bipartiter  $\sim$ , 20
  - distanzregulärer  $\sim$ , 20
  - gleichgewichteter  $\sim$ , 11
  - regulärer  $\sim$ , 12
  - seriell-paralleler  $\sim$ , 45
  - Teilgraph, 9
  - vollständiger  $\sim$ , 20
  - vollständiger bipartiter  $\sim$ , 20

## Index

- Wald, 11
  - zusammenhängender  $\sim$ , 11
- Graphenfamilie
  - $k$ -reguläre  $\sim$ , 22
  - gleichgewichtete  $\sim$ , 22
- Gruppe, 59
- Hölder-p-Normen, 15
- Halbmetrik, 12
- Hamminggraph, 20
- Hyperwürfel, 20
- innerer Knoten
  - eines Weges, 10
- Irrfahrt
  - zufällige  $\sim$ , 62
- Isometrie, 14
- Johnsongraph, 21
- Kante, 9
  - redundante  $\sim$ , 13
- Kantenfolge, 9
- Kapazitätsfunktion, 43
- Kardinalität
  - einer Menge, 12
- Knoten, 9
- Knotengrad
  - $i$ -ter  $\sim$ , 20
- Kontraktion
  - einer Knotenmenge, 21
- Kreuzpolytop, 15
- Kugel
  - im metrischen Raum, 13
  - im Vektorraum, 15
- Länge
  - einer Kante, 9
  - eines Weges, 10
- Längenfunktion, 9
- Laplacematrix, 19
- Laufzeit
  - polynomielle  $\sim$ , 17
- Lipschitz-Konstante, 14
- Lipschitznorm, 14
- Manhattannorm, 15
- Markov-Kette, 23
- Markov-Typ, 62
- Matrix
  - positiv definite  $\sim$ , 18
  - positiv semidefinite  $\sim$ , 18
  - symmetrische  $\sim$ , 18
- Maximalgrad
  - einer Graphenfamilie, 22
  - eines Graphen, 9
- Maximumnorm, 15
- Mehrgüterfluss-Problem, 43
- Mehrgüterschnitt, 45
- Metrik, 13
- Minimalgrad
  - einer Graphenfamilie, 22
  - eines Graphen, 9
- Minor, 21
- Nachbar
  - eines Knotens, 12
- Nachfrage, 43
- Netzwerk
  - ungerichtetes  $\sim$ , 43
- Norm, 15
  - euklidische  $\sim$ , 15
- NP-schwer, 17
- NP-vollständig, 17
- Poincaré-Halbebenen-Modell, 82
- Potenzmenge, 12
- Problem
  - des minimalen Schnittes, 44
- Produktgraph, 40
- Programm
  - duales  $\sim$ , 34
  - primales  $\sim$ , 34
  - semidefinites  $\sim$ , 32
- Quelle, 43
- Raum
  - halbmetrischer  $\sim$ , 12
  - linearer normierter  $\sim$ , 15
  - metrischer  $\sim$ , 12
- Raupendimension
  - eines Baumes, 28
- Ring
  - kommutativer  $\sim$ , 60
- Satz
  - von Alon, Hoory und Linial, 54
  - von Féjer, 18
  - von Ford und Fulkerson, 45
- Schnitt
  - eines metrischen Raumes, 13
- Schnitt-Halbmetrik, 41
- Schrumpfung, 14
- Senke, 43
- Spaziergang, 9
- Tailenweite
  - eines Graphen, 11
- Teilgraph
  - induzierter  $\sim$ , 9
- Transitionsmatrix, 23
- Valenz

## *Index*

- eines Knotens, 9
- Vaterkante, 46
- Vektorraum, 15
- Verzerrung, 14
  - Dimensions-optimale  $\sim$ , 17
  - optimale  $\sim$ , 17
- Würfel, 15
- Wachstum
  - einer Funktion, 17
- Wald, 11
- Weg, 10
- Wegesystem, 29
- Wort, 60
- Wurzel
  - eines Baumes, 28
- Zusammenhangskomponenten
  - eines Graphen, 11
  - eines Waldes, 28