



# Zufallsgrößen und Verteilungen im Mathematikunterricht

13.01.2025

## Lehrerfortbildung Stochastik

Prof. Dr. A. Pichler & Dr. D. Uhlig  
Professur Finanzmathematik  
Fakultät für Mathematik

# Aktuelles Thema

## 1. Motivation

Übersicht über die Teilgebiete der Stochastik

## 2. Empfehlungen

## 3. Zufallsvariablen

## 4. Anwendungsbeispiel

## 5. Werbung

- ▶ old-fashioned?
  - ▶ `https://trends.google.com/trends/explore?date=all&geo=DE&q=Statistik,Mathematik`
  - ▶ `https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=statistic`
- ▶ modern
  - ▶ Big Data `https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=Big%20Data`
  - ▶ Data Science  
`https://trends.google.com/trends/explore?date=all&q=Data%20Science`
- ▶ zahlreiche Anwendungen

## zahlreiche Anwendungen, I

- ▶ Statistik Finanzmärkte
- ▶ medizinische Statistik: Nachweis Medikamentenwirksamkeit, Impfung,  
...
- ▶ Stauprognosen
- ▶ Qualitätsmanagement
- ▶ Wahlprognosen
- ▶ Navigationssoftware
- ▶ autonomes Fahren, Auswertung von Sensordaten
- ▶ Prämienkalkulation
- ▶ Risikomanagement
- ▶ Überbuchungen

## zahlreiche Anwendungen, II

- ▶ E-Commerce: Vorschlagsysteme
- ▶ automatische Bilderkennung / Spracherkennung
- ▶ Klassifikation / Modellvorhersage
- ▶ Vorhersage von Großbränden
- ▶ Wetterprognose
- ▶ Analyse Klimawandel / Extremereignisse
- ▶ Prognose Solarstrom / Windenergie
- ▶ Verkaufszahlen aus Seriennummern <https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/handy-verkaufszahlen-wie-apple-mit-seriennummern-trickst-a-731692.html>
- ▶ ...

GDAXI

[2024-01-02/2025-01-09]



Jan 02 2024

Apr 02 2024

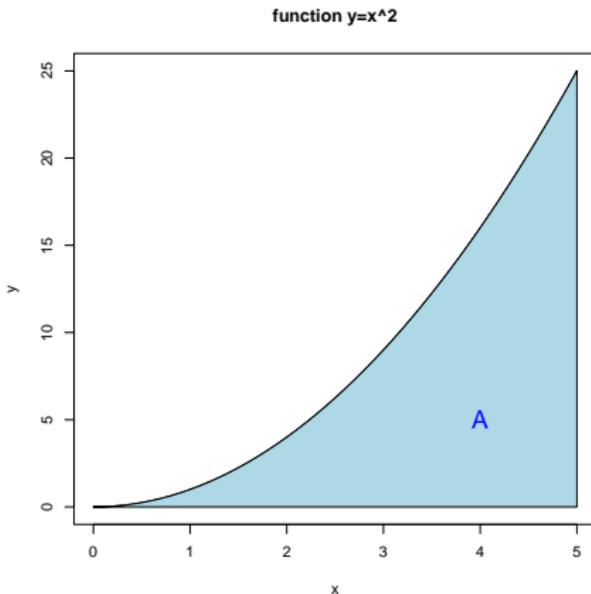
Jul 01 2024

Okt 01 2024

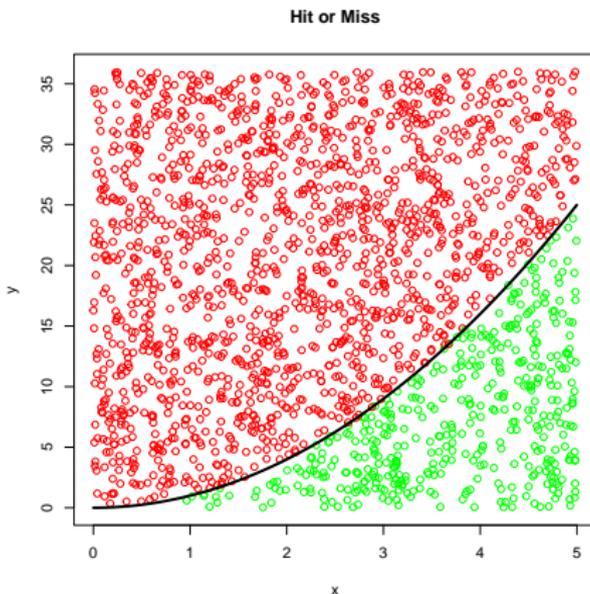
Jan 02 2025

# zufällige Integration

$$f(x) = x^2, [a, b] = [0, 5] \Rightarrow \vartheta = \int_0^5 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^5 = \frac{1}{3}(125 - 0) = 41.6667$$

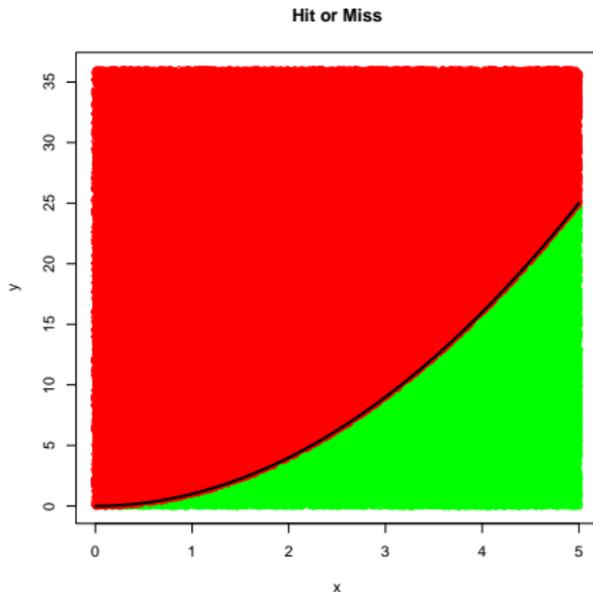


$n = 2000$

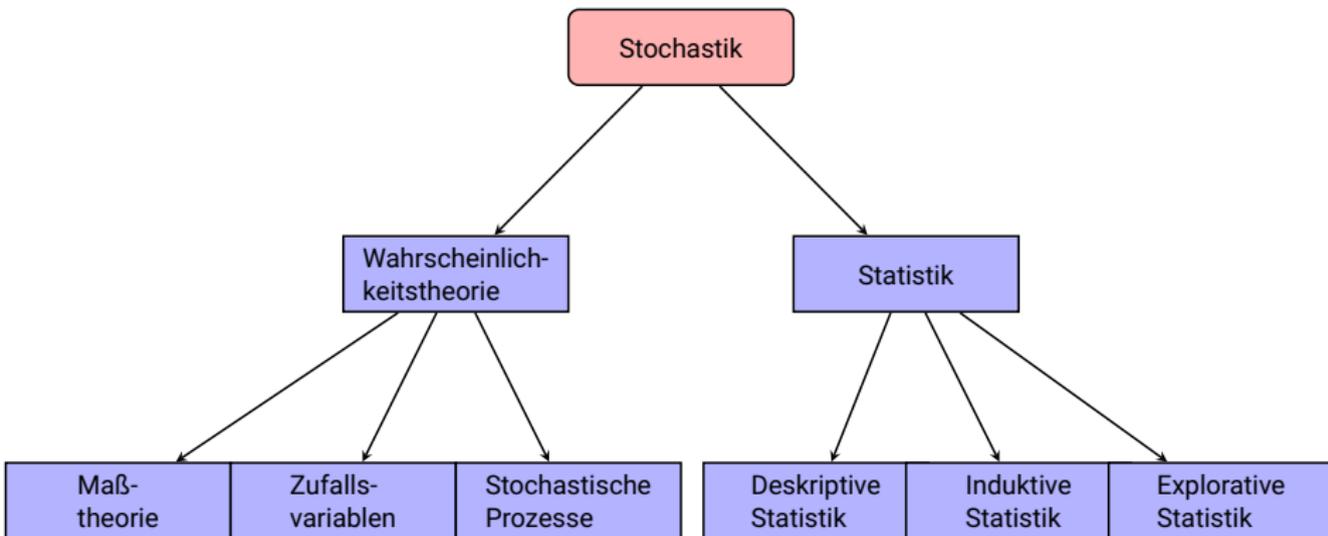


$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{A\}}(X_i, Y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i \leq f(X_i)\}} = 0.218 \Rightarrow \hat{v} = 39.24$$

$$n = 100\,000$$



$$\hat{p} = 0.2314 \Rightarrow \hat{\vartheta} = 41.6556 \quad (\vartheta = 41.6667)$$



# Aktuelles Thema

1. Motivation

2. Empfehlungen

3. Zufallsvariablen

4. Anwendungsbeispiel

5. Werbung

## 1. Software

- ▶ Geogebra Classic  
<https://www.geogebra.org/classic#probability>
- ▶ R mit RStudio als Editor  
<https://posit.co/download/rstudio-desktop/>

## 2. Literatur

- ▶ Statistik: Eine interdisziplinäre Einführung mit interaktiven Elementen [MS23]
- ▶ Stochastik rezeptfrei unterrichten [HMS21]
- ▶ Stochastik für das Lehramt [Lin14]
- ▶ ...

## 3. Tutorials

- ▶ Daniel Jung auf Youtube: [Jun14a], [Jun14f], [Jun14b], [Jun14d], [Jun14c], [Jun14e], ...
- ▶ ...

## 4. Newsletter: <https://lists.tu-chemnitz.de/mailman3/postorius/lists/math-teachers.lists.tu-chemnitz.de/>

# Aktuelles Thema

1. Motivation

2. Empfehlungen

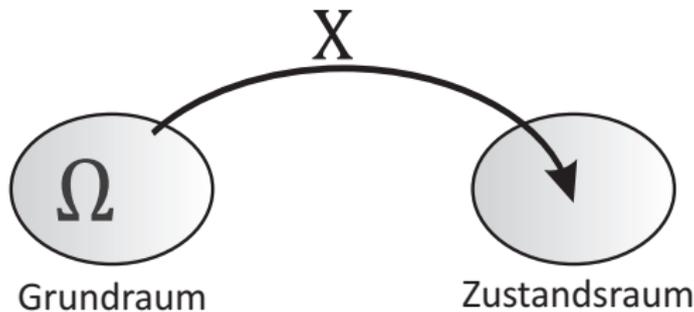
**3. Zufallsvariablen**  
Spezielle Verteilungen

4. Anwendungsbeispiel

5. Werbung

## Zufallsgröße / Zufallsvariable

Abbildung  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  auf Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , d.h.  $X$  ordnet jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eine reelle Zahl  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  zu



wenn Messbarkeitsbedingung für alle Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$$

abkürzende Schreibweise:  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}) = P(X \in I)$

# Umgang mit Zufallsvariablen

Unterscheidung nach Werten der Zufallsvariablen:

- ▶ endlicher oder abzählbarer Wertebereich, d.h. ZV  $X$  nimmt Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bzw.  $x_1, x_2, \dots$  an  $\Rightarrow$  **diskrete** ZV  $\Rightarrow$  Wahrscheinlichkeitsfunktion / Zähldichte  $\triangleq$  Zuordnung  $x_i \mapsto p_i = P(X = x_i)$
- ▶ überabzählbarer Wertebereich  $\Rightarrow$  (absolut) **stetige** ZV mit Dichtefunktion zur indirekten Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten
- ▶ neben absolut stetigen (stetige Verteilungsfkt.) und diskreten (stückweise konstante Verteilungsfunktion) ZV gibt es noch weitere Verteilungen ( $\curvearrowright$  Literatur)

$\Rightarrow$  unterschiedliche Methoden zur Berechnung der Verteilungsfunktion und Verteilungskenngrößen wie Erwartungswert, Varianz, usw.

## diskrete ZV

- ▶ Binomialverteilung ▶ Details
- ▶ Hypergeometrische Verteilung  
▶ Details
- ▶ Geometrische Verteilung
- ▶ Poisson-Verteilung
- ▶ ...

## stetige ZV

- ▶ Gleichverteilung ▶ Details
- ▶ Exponentialverteilung ▶ Details
- ▶ Normalverteilung ▶ Details
- ▶ Gamma-Verteilung
- ▶ ...

## Links:

- ▶ <https://www.geogebra.org/classic#probability>
- ▶ Überblick [https://de.wikipedia.org/wiki/Liste\\_univariater\\_Wahrscheinlichkeitsverteilungen](https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_univariater_Wahrscheinlichkeitsverteilungen)
- ▶ engl. [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_probability\\_distributions](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_probability_distributions)

## Binomialverteilung $X \sim \text{Bin}(n, p)$

- ▶  $X \triangleq$  Anzahl der Erfolge, bei  $n$  unabhängigen Versuchen mit Wahrscheinlichkeit  $p$
- ▶ Parameter  $n$  (Anzahl der Versuche) und  $p$  (Erfolgsrate),
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion  

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$
- ▶ einfache Berechnung mittels Taschenrechner von

$$P(m \leq X \leq n) = \sum_{k=m}^n P(X = k)$$

wegen Rekursionsformel

$$P(X = k + 1) = \frac{n - k}{k + 1} \cdot \frac{p}{1 - p} \cdot P(X = k)$$

# Hypergeometrische Verteilung $X \sim \text{Hyp}(n, N, M)$

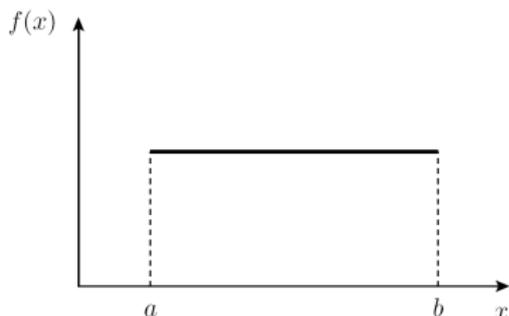
- ▶  $X \triangleq$  Anzahl gezogener schwarzer Kugeln nach  $n$  Ziehungen **ohne** Zurücklegen aus Urne mit  $N$  Kugeln (davon  $M$  schwarze)
- ▶ Wertebereich  $\max(0, n - (N - M)) \leq X \leq \min(n, M)$
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion für  
 $m \in \{\max(0, n - (N - M)), \dots, \min(n, M)\}$

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

# Gleichverteilung auf Intervall $[a, b]$ , $X \sim U[a, b]$

- ▶ Synonyme: stetige Gleichverteilung, Rechteckverteilung
- ▶ Verallgemeinerung der diskreten Gleichverteilung
- ▶ Parameter:  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$
- ▶ Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$



# Einfluss der Parameter

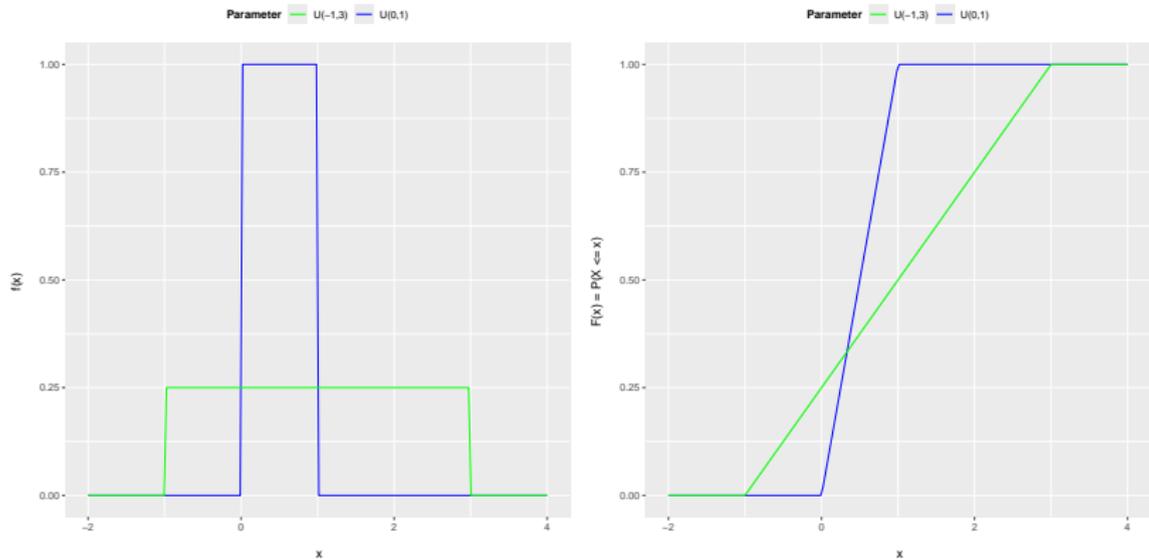


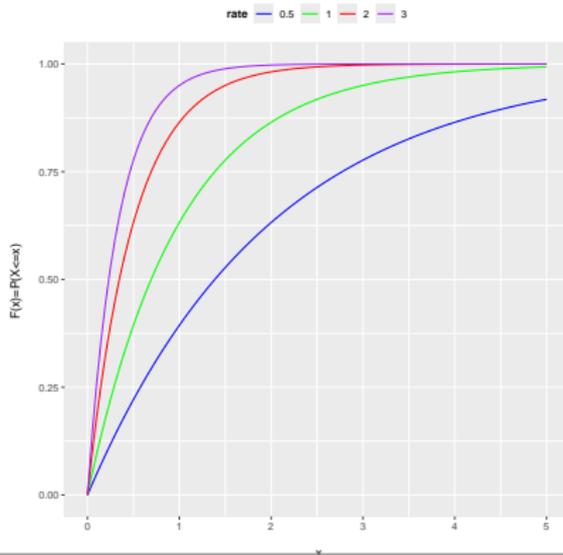
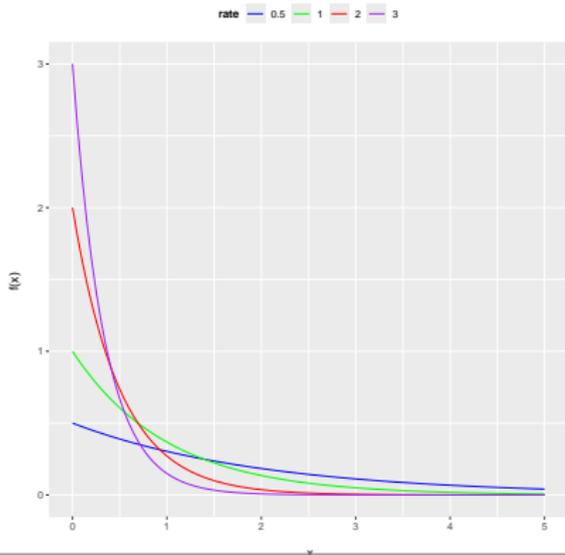
Abbildung: Dichte- und Verteilungsfunktion der Gleichverteilung

# Exponentialverteilung $X \sim \text{Exp}(\mu)$

▶ Modellierung von Wartezeiten und Lebensdauern

▶ Parameter  $\mu > 0$

▶ Dichtefunktion  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ \mu e^{-\mu x}, & \text{für } x > 0 \end{cases}$



# Normalverteilung / Gaußverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- ▶ Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  ( $\sigma > 0$ )
- ▶ Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



<https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bargeld/de-banknoten-und-muenzen/-/de-banknoten-599482>

Abbildung: 10 DM Schein

# Einfluss der Parameter

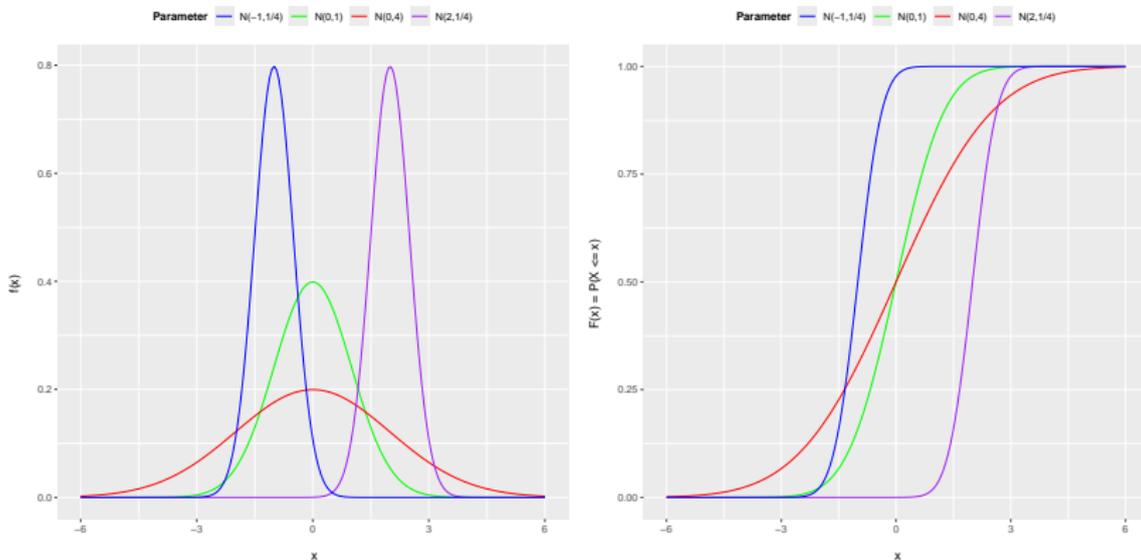


Abbildung: Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung

# Aktuelles Thema

1. Motivation

2. Empfehlungen

3. Zufallsvariablen

4. Anwendungsbeispiel

5. Werbung

## Flug-Überbuchung

- ▶ Flugzeug mit 100 Sitzplätzen
- ▶ Erfahrung: durchschnittlich treten nur 85 von 100 Geschäftskunden tatsächlich Flug an
- ▶ Fluggesellschaft verkauft 120 Tickets an Geschäftskunden
- ▶ Frage 1: **Mit welcher Wahrscheinlichkeit mehr Passagiere als Sitzplätze?**
- ▶ Frage 2: **Wie viele Sitze müsste das Flugzeug haben, damit bei  $n = 120$  verkauften Tickets mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit keine Überbuchung auftritt?**

## Lösung Frage 1

- ▶  $X \triangleq$  Anzahl tatsächlicher Fluggäste  $\sim \text{Bin}(n = 120, p = 0.85)$
- ▶ Wahrscheinlichkeit, dass mehr Passagiere Flug antreten wollen, als Sitze zu Verfügung

$$\begin{aligned}
 P(X > 100) &= \sum_{k=101}^{120} P(X = k) \\
 &= \sum_{k=101}^{120} \binom{120}{k} 0.85^k 0.15^{120-k} = 0.6586 \\
 &= 1 - P(X \leq 100) = 1 - \sum_{k=0}^{100} \binom{120}{k} 0.85^k 0.15^{120-k} \\
 &= 1 - 0.3414 = 0.6586
 \end{aligned}$$

## Lösung Frage 2

- ▶ Wie viele Sitze  $x$  muss das Flugzeug haben, damit bei  $n = 120$  verkauften Tickets mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit keine Überbuchung auftritt?

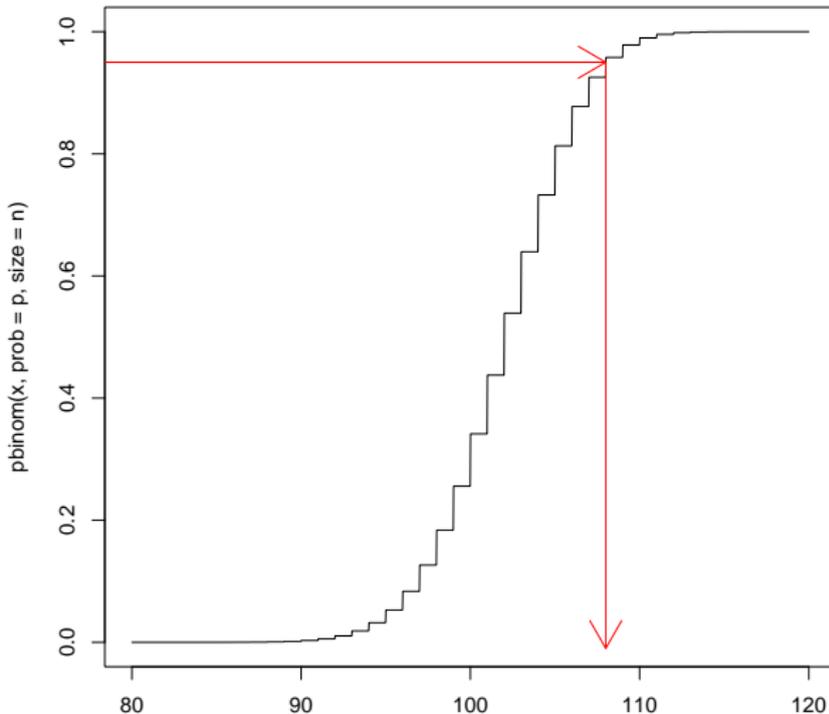
$$P(X \leq x) = F(x) \stackrel{!}{\geq} 0.95$$

$$x \geq F^{-1}(0.95) = 108$$

- ▶ Probe:

$$F(108) = P(X \leq 108) = \sum_{k=0}^{108} \binom{100}{k} 0.85^k 0.15^{120-k} = 0.958$$

## Illustration



# Aktuelles Thema

1. Motivation

2. Empfehlungen

3. Zufallsvariablen

4. Anwendungsbeispiel

**5. Werbung**

## 7. Tag der Mathematik

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/>

## Newsletter

- ▶ speziell für Lehrer: <https://lists.tu-chemnitz.de/mailman3/postorius/lists/math-teachers.lists.tu-chemnitz.de/>
- ▶ allgemeine Mathe-Veranstaltungen:  
<https://lists.tu-chemnitz.de/mailman3/postorius/lists/mathe-infos.lists.tu-chemnitz.de/>

- [HMS21] Norbert Henze, Kai Müller und Judith Schilling. *Stochastik rezeptfrei unterrichten*. Springer, 2021. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-62744-0>.
- [Jun14a] Daniel Jung. *Grundlagen der Wahrscheinlichkeit*. 2014. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=EdKjU6wGwVc&list=PLLTAHuUj-zHhB8UnwPOJzUVHV6\\_AJ9tz3](https://www.youtube.com/watch?v=EdKjU6wGwVc&list=PLLTAHuUj-zHhB8UnwPOJzUVHV6_AJ9tz3).
- [Jun14b] Daniel Jung. *Normalverteilung & Gaußverteilung*. 2014. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_f1vgWUiaVY&list=PLLTAHuUj-zHj7qBEx4VYSTjzTEtntuycU](https://www.youtube.com/watch?v=_f1vgWUiaVY&list=PLLTAHuUj-zHj7qBEx4VYSTjzTEtntuycU).
- [Jun14c] Daniel Jung. *Statistik*. 2014. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=kIZ9-mGbuN8&list=PLLTAHuUj-zHifw\\_30hBTvQq2EGX5Ned0y](https://www.youtube.com/watch?v=kIZ9-mGbuN8&list=PLLTAHuUj-zHifw_30hBTvQq2EGX5Ned0y).
- [Jun14d] Daniel Jung. *Überbuchungen*. 2014. URL: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLLTAHuUj-zHi2dkHRtQvJ2AwLed917IbL>.

- [Jun14e] Daniel Jung. *Wahrscheinlichkeitsrechnung Klasse 5-10*. 2014. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=NxJAg0xhddE&list=PLLTAHuUj-zHhz-bGuJv5ZYKVqUAXRp1fQ>.
- [Jun14f] Daniel Jung. *Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung, Grundlagen mit Beispiel*. 2014. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=unwJSkloq8M&list=PLLTAHuUj-zHjYzRbx1e5HNBzn9v0dzZro>.
- [Lin14] Werner Linde. *Stochastik für das Lehramt*. München: De Gruyter Oldenbourg, 2014. ISBN: 9783110362411. DOI: [doi:10.1524/9783110362411](https://doi.org/10.1524/9783110362411). URL: <https://doi.org/10.1524/9783110362411>.
- [MS23] H.J. Mittag und K. Schüller. *Statistik: Eine interdisziplinäre Einführung mit interaktiven Elementen*. Springer Berlin Heidelberg, 2023. ISBN: 9783662682241. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-68224-1>.