Vermögensaufteilung für die Altersvorsorge: Wie fundiert sind langfristige Allokationsregeln?

*B.Hofmann†, F.Thiessen‡, V.Weber‡, R.Wunderlich†

1 Einführung

Seitdem die Finanzierungsprobleme des öffentlichen Rentensystems offensichtlich geworden sind, wird über kapitalgedeckte Altersvorsorge nachgedacht. Bis zum Beginn des Jahres 2000, also vor dem Ende der Aktienhausse, konnte das Aktiensparen als die renditestärkste Sparform propagiert werden. Deutsche und europäische, aber auch US-Standardaktien hatten einen insgesamt sehr erfolgreichen Renditepfad von über zwanzig Jahren zurückgelegt. Als in dieser Phase die Probleme der öffentlichen umlagefinanzierten Rentensysteme offensichtlich zu werden begannen und über Alternativen nachgedacht wurde, da drängte sich das Aktiensparen geradezu auf. Die positive Einschätzung der Aktie gestützt auf die Erfahrungen der letzten zwei Dekaden wurde auf die Eignung langfristiger Aktiensparpläne für das Problem der Altersvorsorge übertragen. Garantieprodukte verschwanden, denn man nahm an, dass zeitweilig auftretende Verluste nach geringer Anzahl von Jahren aufgeholt seien. Um letzte Risiken des Altersvorsorgesparens auszuschalten, wurde zu einem Umstieg von Aktienfonds in Rentenpapiere einige wenige Jahre vor der geplanten Entnahmephase geraten.[1]

Drei Jahre später wird das Problem der Altersvorsorge differenziert gesehen. Zum Einen haben sich die Kapitalvermögen vieler Altersvorsorgender seit März 2000 verringert, und die Begeisterung für das Aktiensparen hat nachgelassen. Zum Anderen aber ist die Notwendigkeit, langfristig Geldkapital für die Altersversorgung aufzubauen, noch offensichtlicher geworden. Durch die gesetzlichen Regelungen zur privaten Altersvorsorge (Riester-Rente) wird die Altersvorsorge sogar staatlich gefördert. Banken und Sparkassen bemühen sich intensiv und nicht ohne Erfolg, Altersvorsorgeprodukte zu verkaufen. Die Deutsche Bank stellt fest, dass ein Trend zu Finanzkontrakten zur *langfristigen* Vorsorge- und Vermögensplanung eingesetzt habe.[2]

Es fragt sich, welchen Anforderungen Produkte für die langfristige Altersvorsorge genügen müssen? Bierbaum von Sal. Oppenheim fordert als wesentliches Element, dass Banken *Lang-*

*Die Autoren bedanken sich beim Herausgeber Hartmut Schmidt und bei einem anonymen Gutachter für wertvolle Hinweise.

†Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz, D-09107 Chemnitz, Germany

‡Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Technische Universität Chemnitz, D-09107 Chemnitz, Germany

[1] Vgl. z.B. Bierbaum (2000), S.670f.

[2] Vgl. Deutsche Bank (2001), Deutsche Bank 24-Studie „Geldvermögen in Deutschland und Euroland“, Presseinformation, Frankfurt.

zeitprognosen bereithalten müssten, um die Strukturierung der verkauften Produkte begründen zu können.[3] Werbung für langfristige Aktiensparpläne erfolgte bis zum Boomende meist auf Basis von Fünf-, Zehn- oder Fünfzehnjahresrenditen, die aus historischen Renditepfaden abgeleitet wurden.[4]

Die Deutsche Bank warb auf Basis derartiger Daten damit, dass Aktien mit „100% Wahrscheinlichkeit" bei 15jähriger Anlagedauer eine höhere Rendite als Renten brächten.[5] Rudolf Symmank relativierte die Angst vor Aktienkursrisiken mit dem Argument: „*Die vielfach noch zu beobachtende Sorge vor kurzfristigen Schwankungen der Aktienkurse ist insbesondere bei regelmäßigen Einzahlungen über lange Zeiträume dank des Durchschnittskostenprinzips und der Wirkung von Zinseszinseffekten faktisch nicht begründet*".[6]

Welche harten Fakten sichern, dass sich die historischen Renditepfade in den nächsten Jahren wiederholen? Oder allgemeiner formuliert: welche harten Fakten können Renditeentwicklungen über 20, 30 oder 40 Jahren belegen, wie sie bei Alterssparvorgängen nicht unüblich sind? Wie also sieht eine weitsichtige Vermögensanlage aus, wie ist sie strukturiert? Oder mit anderen Worten: Welche Regeln für die Vermögensaufteilung[7] sind für langfristige Anlagehorizonte verlässlich? Diese Fragen haben außer einer ökonomischen auch eine rechtliche Dimension, denn das falsche Interpretieren der verfügbaren Daten für Zwecke sehr langfristger Prognosen kann als Beratungsfehler interpretiert werden und Haftung auslösen.

In der Literatur und in der Praxis stößt man auf drei archetypische Vorgehensweisen bei der Risiko-Ertrags-Prognose für die langfristige Vermögensallokation:[8]

- Prognose auf Basis geschätzter stochastischer Prozessmodelle,[9]
- Prognose auf Basis historischer Renditepfade[10] und

[3] Bierbaum, Gesellschafter bei Sal.Oppenheim jr.& Cie KGaA, stellt fest, dass zeitgemäße Vermögensverwaltung die „Formulierung von Langzeitprognosen für Aktien und Renten" einschließen müsse. Bierbaum (2000), S.669.

[4] Beispielhaft vgl. Bierbaum (2000), S.673.

[5] Es hieß wörtlich: „Aktien schlagen Renten 100prozentig". Siehe http://www.Deutsche Bank24.de Finanz-News:Archiv1999, 31.5.2002. Rudolf Symmank, Geschäftsführer der DWS-Finanz-Service GmbH, Frankfurt, stellt fest: „Dabei geht es um eine möglichst renditestarke substanzgesicherte Vorsorge, um so den Lebensstandard im Alter am besten erhalten zu können. Die Aktien(fonds)anlage hat sich dafür als besonders erfolgreich erwiesen. ... Die Erkenntnis, dass die Aktie das langfristig rentierlichste Anlagemedium ist, hat inzwischen auch in Deutschland breiteren Raum eingenommen.", in: Symmank (1997), S.530f.

[6] Symmank (1997), S.535.

[7] Oftmals wird der Begriff Asset Allocation gebraucht. Im Folgenden wird von Vermögensallokation gesprochen.

[8] Vgl. Mazzoni, Weber, Wicki (2001), S.212.

[9] Als „stochastische Prozessmodelle" bezeichnen wir mathematische Modelle, welche das Verhalten von Kursen oder Renditen mittels angenommener stochastischer Prozesse beschreiben.

[10] Als „historischen Renditepfad" bezeichnen wir die tatsächliche Abfolge von Periodenrenditen eines Vermögenswertes in der Vergangenheit. Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff „Pfad" in der Literatur in mehreren Bedeutungen benutzt wird. Er spielt auch im Rahmen der Verwendung „historischer Prozessmodelle" eine Rolle. Dort erstellt man unter Benutzung der Daten des gewählten Prozesses Prognosen mit Hilfe von Simulationen, bei denen eine Vielzahl von Renditepfaden erzeugt wird. Dabei handelt es sich um simulierte Renditepfade, während wir hier von historischen, d.h. tatsächlich eingetretenen Renditepfaden sprechen.

- Prognose mit analytisch hergeleiteten Renditepfaden.[11]

Ziel des folgenden Beitrages ist es, auf die Probleme der ersten beiden der drei Vorgehensweisen hinzuweisen. Es soll gezeigt werden, welche offenen Fragen sich ergeben, wenn man Aussagen a) mit stochastischen Prozessmodellen und b) mittels historischer Renditepfade erhärten will. Zunächst stellen wir kurz dar, wie im modernen Portfoliomanagement die Entscheidung über die Vermögensallokation in den Gesamtprozess des Vermögensmanagements eingebettet ist.

Alle Portfolios sind das Ergebnis einer Reihe von Entscheidungen über Anlagechancen und Anlagerisiken. Man unterteilt den Entscheidungsprozess in zwei Phasen:

- Strategische Vermögensallokation
- Taktische Vermögensallokation.

Die mittel- und langfristig orientierte Festlegung von Regeln zur Vermögensaufteilung bezeichnet man als strategische Vermögensallokation. Aus langfristigen Risiko-/ Renditeeigenschaften der in Frage kommenden Aktien- und Rentenmärkte werden die strategischen Strukturentscheidungen abgeleitet. Es werden Benchmarkstrukturen definiert, die dem Vermögensverwalter im Tagesgeschäft als Orientierungshilfe dienen und sicherstellen sollen, dass die langfristigen Ziele und Absichten des Anlegers unverrückbar vor die nachgelagerten, taktischen Entscheidungsprozesse gestellt werden. Ziel der strategischen Vermögensallokation für das Altersvorsorgesparen ist die Definition optimaler Vergleichsmaßstäbe, d.h. allgemeiner, möglichst über Jahrzehnte unverändert bleibender Regeln für die Aufteilung von Vermögen auf Vermögensklassen. Taktische Vermögensallokation ist demgegenüber der Prozess der Auswahl konkreter Anlagetitel. Ziel der taktischen Allokation ist das Erreichen der Performance der Benchmark.

Im Folgenden werden zunächst in Kapitel 2 für verschiedene langfristige Allokationsstrategien auf Basis von stochastischen Prozessmodellen Endvermögensverteilungen ermittelt. Anschließend wird in Kapitel 3 auf die Probleme der Analyse historischer Renditepfade hingewiesen. Historische Renditepfade werden in der praktischen Anlageberatung immer wieder zur Begründung von Allokationsregeln verwendet. Es wird gezeigt, welche Fehlschlüsse aus unsachgemäßer Verwendung historischer Pfade folgen können. Abschließend erläutern wir in Kapitel 4 die Konsequenzen aus der Untersuchung.

[11] Als „analytisch hergeleiteten Renditepfad“ bezeichnen wir die Prognose von Periodenrenditen auf Basis fundamentaler Überlegungen.

2 Entscheidung anhand von stochastischen Prozessmodellen

Regeln für die strategische Vermögensaufteilung werden häufig mit Hilfe von stochastischen Prozessmodellen abgeleitet, deren Parameter aus historischen Periodenrenditen geschätzt wurden.[12] Welche Aussagen sich daraus ableiten lassen, zeigen wir in der folgenden Fallstudie anhand der Endvermögen verschiedener Sparpläne nach einer Spardauer von 40 Jahren. Es werden zehn Millionen Renditepfade von Aktien und Renten über jeweils 40 Jahre simuliert. Der Aktienkurssimulation liegt als stochastischer Prozess eine geometrische Brownsche Bewegung zugrunde[13], während für die Rentenrenditen ein Mean-Reversion-Prozess betrachtet wird.[14] Es werden nur „objektive" Anlagestrategien getestet. Als „objektiv" werden Strategien bezeichnet, bei denen ex ante fest definierte Aufteilungsregeln des Kapitalvermögens auf die Vermögensklassen betrachtet werden. Subjektive Strategien, bei denen innerhalb des Anlagezeitraums auf Basis fundamentaler oder technischer Analyse Anpassungen vorgenommen werden, waren nicht Gegenstand der Untersuchungen. Die letzten drei Baisse-Jahre zeigen, dass kaum eine Vermögensverwaltung derartige subjektive Strategien erfolgreich umsetzen konnte.

Wichtiges Ergebnis der Untersuchungen ist, dass sich auf Basis der Analyse stochastischer Prozessmodelle kaum eindeutige Entscheidungsregeln für die Vermögensstrukturierung bei langfristigen Anlagehorizonten ableiten lassen. Der Grund liegt zum Einen darin, dass die Endvermögen bei der Aktienanlage erheblich streuen und der Median des Endvermögens für die Parametersituation, die für die letzten 50 Jahre repräsentativ ist, um mehr als ein Drittel unter dem allerdings recht hohen Erwartungswert liegt, während bei der Rentenanlage eine geringere Streuung der Endvermögen mit deutlich abgesenkten Gewinnerwartungen erkauft wird. Zum Anderen hängen die zu erwartenden Endvermögen von den gewählten Prozessparametern ab, wobei darüber gestritten werden könnte, ob diese aus langen Historien oder aus kürzer zurückliegenden Zeiträumen abgeleitet werden sollten. Es zeigt sich zwar, dass sich die weiter unten abgeleiteten Aussagen nicht grundsätzlich ändern, wenn die Parameter in einer moderaten Bandbreite variieren. Allerdings beeinflusst der angenommene Abstand zwischen den langfristigen Mittelwerten von Aktienrendite und Zinsniveau schon entscheidend die Differenz zwischen dem mittleren Aktienergebnis und dem Mittelwert von Rentenanlagen. Insgesamt ist zu konstatieren, dass sich Aussagen wie die der Deutschen Bank *„Aktien schlagen Renten 100prozentig"* gewiss nicht rechtfertigen lassen. Die Entscheidung zwischen Aktien und Renten ist vielmehr bei einer sehr großen Bandbreite angenommener Parameterkonstellationen eine Entscheidung über den Grad des tolerierten Risikos. Wie unten zu sehen sein wird, sind die Risiken von Aktienanlagen über lange Zeiträume erheblich, so dass man Aktiensparpläne nur mit intensiven Hinweisen auf die Risiken empfehlen kann. Diese Aussagen gelten übrigens unabhängig davon, mit welchem Risikomaß Risiken gemessen werden, also z.B. mittels Standardabweichung oder Ausfallrisikomaßen.

[12] Vgl. Dichtl, Schlenger (2002), S.34; Döhnert, Kunz (2002), S. 348; Trachsler (2002), S.25; Albrecht, Maurer, Ruckpaul (2001), S.1f.; Junker, Schwarz (2000), S. 1410; o.V. (1995); Wiek (1992), S.718.

[13] Vgl. Albrecht, Maurer, Ruckpaul (2001), S.1ff.

[14] Vgl. Christopher (1998).

2.1 Modellannahmen und Investitionsverhalten

Ein vorsorglicher junger Mensch will seinen Lebensabend finanziell absichern, indem er während seines gesamten Arbeitslebens 40 Jahre lang jeweils am Jahresbeginn $Z = 1.000$ € in seine Rente investiert. Er investiert also zu den Zeitpunkten $t_i = i$ $(i = 0, 1, ..., 39)$ (Zeit in Jahren), um zum Endzeitpunkt $t_{end} = 40$ (Rentenbeginn) über ein möglichst hohes Vermögen zu verfügen. Dabei sollen die folgenden fünf Varianten für Investitionspläne mit zufälligen Endvermögen $V_1, ..., V_5$ betrachtet werden, denen als Benchmark (Variante 0) jeweils eine sichere Anlage mit einem angenommenen risikolosen Zins von $r = 0,04$ (diskreter Zins von 4% p.a.)[15] und einem deterministischen Endvermögen von

$$V_0 = Z\,(1+r)\,\tfrac{(1+r)^{40}-1}{r} = 98.826,55 \text{ €}$$

gegenüber gestellt wird.

1. *Reine Aktienanlage*:
   Die Investitionen erfolgen ausschließlich in ein *Aktienindexportfolio*, wobei zu allen Investitionszeitpunkten Aktien zum Preis Z erworben und bis zum Zeitpunkt t_{end} im Portfolio gehalten werden. Für den *Kursverlauf* des zugrunde liegenden Aktienindex nehmen wir eine *geometrische Brownsche Bewegung* [16] $X(t)$ $(t \geq 0)$ mit normiertem Anfangswert $X(0) = 1$ € an. Die Kurse genügen dabei der *stochastischen Differentialgleichung*

   $$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu_X\,dt + \sigma_X\,dW_X(t) \qquad (t \geq 0)$$

   mit dem standardisierten Wiener-Prozess $W_X(t)$, und es gilt

   $$X(t) = \exp\left((\mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2})t + \sigma_X W_X(t)\right).$$

   Die logarithmischen Jahresreturns $L(i)$ $(i = 1, 2, ..., 40)$ der Aktienanlage sind bei dieser Annahme in der Form

   $$L(i) := \ln\left(\frac{X(i)}{X(i-1)}\right) \sim \mathcal{N}(\nu_X, \sigma_X^2)$$

   normalverteilt mit einem Returnmittelwert $\nu_X := \mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2}$. [17] Für die Studie gehen wir auf Jahresbasis von einer *Aktienrendite (Drift)* $\mu_X = 0,08$, einer *Aktienvolatilität* $\sigma_X = 0,20$ und folglich von $\nu_X = 0,06$ aus. Die getroffene Stationaritätsannahme für die Returns erscheint hier plausibel, wobei μ_X und σ_X auch als Mittelwerte über zeitlich lokale Schwankungen von Drift und Volatilität verstanden werden können.

2. *Reines Rentenportfolio*:
   Die Investitionen erfolgen ausschließlich in ein *Rentenportfolio*, das zu allen Investitionszeitpunkten so umgeschichtet wird, dass die Duration des Portfolios in etwa der

[15] Zur Begründung siehe Bemerkungen zu Renditeabständen in Abschnitt 2.2.1; vgl. auch Löffler (2000), S.351.

[16] Vgl. z.B. Baxter, Rennie (1996), Musiela, Rutkowksi (1997) und Korn, Korn (1999).

[17] Vgl. z.B. Franke, Härdle, Hafner (2001), S.62ff.

Duration für die Umlaufrendite in Deutschland entspricht, wobei wir aber bei der Kursberechnung der Einfachheit halber von einer fünfjährigen Restlaufzeit der Papiere beim Kauf und einer vierjährigen Restlaufzeit beim Verkauf ausgehen. Neben den diskreten Jahresrenditen $R_d(t)$ des Portfolios betrachten wir die stetigen Renditen $R(t) = \ln(1 + R_d(t))$, welche der *stochastischen Differentialgleichung*

$$d\,R(t) \;=\; a\,(b - R(t))\,dt + \widetilde{\sigma}_R\,d\,W_R(t) \qquad (t \geq 0)$$

mit dem standardisierten Wiener-Prozess $W_R(t)$ genügen sollen. Es wird also ein *Mean-Reversion-Prozess (Vasicek-Modell)* mit normalverteilten Differenzen

$$M(i) := R(i) - R(i-1) - c\,(b - R(i-1)) \;\sim\; \mathcal{N}(0, \sigma_R^2) \qquad (i = 1, 2, ..., 40)$$

zu allen Investitionszeitpunkten zugunde gelegt[18], wobei wir von einem *Langzeitmittelwert* der diskreten Rentenrendite $\mu_R = 0,07$ und damit von $b = \ln(1 + \mu_R) = 0,06766$ sowie von einer diskreten *Rentenvolatilität* $\sigma_R = \widetilde{\sigma}_R \sqrt{\frac{(1-e^{-2a})}{2a}} = 0,0075$ ausgehen. Weiter wurde $c = 1 - e^{-a} = 0,15$ für den *Mean-Reversion-Faktor* und $\rho = -0,25$ für den Korrelationskoeffizienten zwischen den Zufallsgrößen $L(i)$ und $M(i)$ angenommen. Dabei misst die Zahl ρ praktisch auch die Korrelation zwischen den beiden Wiener-Prozessen $W_X(t)$ und $W_R(t)$.

3. *Mischportfolio ohne Umschichten:*
   In dieser Variante wird am Anfang eines jeden Invesitionsjahres $Z/2 = 500$ € in das Aktienindexportfolio und $Z/2 = 500$ € in das Rentenportfolio investiert. Während der gesamten Laufzeit des Sparplans kommt es zu keinen Umschichtungen zwischen Aktien und Renten.

4. *Mischportfolio mit Umschichten:*
   Diese Variante beruht darauf, dass zu Beginn eines jeden Jahres jeweils die Hälfte des neu bereitgestellten und des bisher angesparten Kapitals in das Aktien- bzw. das Rentenportfolios investiert werden. Es kommt also jährlich zu Umschichtungen, wobei nach einem guten Jahr für Aktien ein Teil des Kapitals in Renten umgeschichtet wird und umgekehrt.

5. *Erst 20 Jahre Aktien, dann 20 Jahre Renten*:
   In einer fünften Variante werden zu den ersten 20 Investitionszeitpunkten t_i $(i = 0, ..., 19)$ Aktien entsprechend des betrachteten Indexportfolios erworben und bis zur Halbzeit $t_{mid} = 20$ gehalten. Zur Halbzeit werden nun die Aktien vollständig verkauft. Das bisher angesparte Kapital wird für die verbleibenden 20 Jahre in das Rentenportfolio investiert, in welches dann zu den Zeitpunkten t_i $(i = 20, ..., 39)$ jeweils auch die neu investierten Beträge fließen.

In allen fünf Varianten stehen 40 Jahre lang am Jahresbeginn $Z = 1.000$ € zur Verfügung, die verschiedenartig investiert werden. Transaktionskosten finden keine Berücksichtigung (siehe hierzu Abschnitt 2.4). Das eingesetzte Gesamtkapital beträgt jeweils $C = 40.000$ € . Wie unterscheiden sich aber die Endvermögen V_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ in den fünf Varianten? Antworten darauf sollen die nächsten zwei Abschnitte geben.

[18] Vgl. Vasicek (1977), S.177ff.; Kwok (1998), S.322f.; Brigo, Mercurio (2001), S.50ff.

2.2 Berechnungen und Simulationsergebnisse

2.2.1 Variantenvergleich

Um die eingeführten Investitionsvarianten 1 bis 5 miteinander vergleichen zu können, wurden zehn Millionen 40-jährige Aktienindexkurs- und Rentenrenditepfade als Zeitreihenpaare $(X(i), R(i))$ $(i = 1, ..., 40)$ mit den im vorigen Abschnitt definierten stochastischen Eigenschaften und den dort angegebenen Parameterwerten $r, \mu_X, \sigma_X, b, \sigma_R, c$ und ρ simuliert. Auf der Grundlage von Pseudozufallszahlen wurden dazu Realisierungen der für $i = 1, 2, ..., 40$ stochastisch unabhängigen und identisch normalverteilten zweidimensionalen Zufallsvektoren

$$\begin{pmatrix} L(i) \\ M(i) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \nu_X \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_R \\ \rho\,\sigma_X\sigma_R & \sigma_R^2 \end{pmatrix}\right)$$

mit Erwartungswertevektor $\underline{\mathbf{e}}$ und Kovarianzmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ generiert. Die verwendeten Parameterwerte μ_X und σ_X für die Aktienkurssimulation ergeben sich bei Verwendung von Maximum-Likelihood-Schätzungen näherungsweise aus Jahresrenditen des Deutschen Aktienindex DAX der Jahre 1959 bis 2001. DAX-Datensätze anderer Zeitintervalle liefern zum Teil veränderte Driftwerte, während sich die Volatilität kaum ändert.[19] Die betrachteten Parameterwerte b, σ_R, c und ρ für die Simulation der Rentenrenditen und deren Korrelation zu den Aktienrenditen resultieren wieder aus entsprechenden Maximum-Likelihood-Schätzungen auf Basis von Dezembermittelwerten der Umlaufrendite deutscher inländischer Wertpapiere der Jahre 1959 bis 2001. Jedoch stand bei der Wahl der Simulationsparameter im Vordergrund, dass für die Renditeabstände zwischen r, μ_R und μ_X, für das Verhältnis der Volatilitäten σ_X und σ_R und den Korrelationskoeffizienten ρ langfristig realistische Annahmen getroffen wurden. Deshalb sind die qualitativen Ergebnisse der Studie auch heute, in einer Zeit historisch niedrigen Rentenniveaus, gültig.

Bei der reinen Aktienanlage in Variante 1 werden zum Zeitpunkt $t_i = i$

$$A(i) = \frac{Z}{X(i)} \qquad (i = 0, ..., 39)$$

Anteile am Aktienindex erworben, nach 40 Jahren also insgesamt $B := \sum_{i=0}^{39} A(i)$ Anteile. Dies ergibt ein Endvermögen

$$V_1 = BX(40) = Z \sum_{i=0}^{39} \frac{X(40)}{X(i)} = Z \sum_{i=0}^{39} Q(i)$$

mit

$$\ln Q(i) \sim \mathcal{N}(\nu_X\,(40-i), \sigma_X^2\,(40-i)) \quad (i = 0, ..., 39).$$

Da nun für eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße Y mit $\ln Y \sim \mathcal{N}(\alpha, \beta^2)$ der Erwartungswert der Gleichung $EY = e^{\alpha+\beta^2/2}$ genügt, ist wegen $\nu_X = \mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2}$

$$EQ(i) = e^{\mu_X\,(40-i)} \qquad (i = 0, ..., 39).$$

[19] Vgl. o.V. (1995); Mazzoni, Weber, Wicki (2001); Morawietz (1994), S.179f., vgl. auch die Berechnungen von Bank, Gerke (2000), S.225, die ohne weitere Begründungen $\mu_X = 0,12$ und $\sigma_X = 0,20$ annehmen. Keller (1999), S.107, rechnet mit $\mu_X = 0,06$.

Dies liefert einen *Erwartungswert* des Endvermögens beim Aktiensparen von

$$EV_1 = Z \sum_{i=1}^{40} e^{\mu_X\, i} = Z\, e^{\mu_X}\, \frac{e^{40\,\mu_X} - 1}{e^{\mu_X} - 1} = 306.079,76 \text{ €}\ ,$$

also im Mittel das 7,65-fache des eingesetzten Kapitals C. Allerdings besitzt die rechtsschiefe Verteilung von V_1 eine sehr große *Streuung* D^2V_1. Die Monte-Carlo-Simulation mit zehn Millionen nachgestalteten 40-Jahres-Perioden liefert eine *Standardabweichung*

$$\sqrt{D^2V_1} \;=\; 428.407 \text{€}\ ,$$

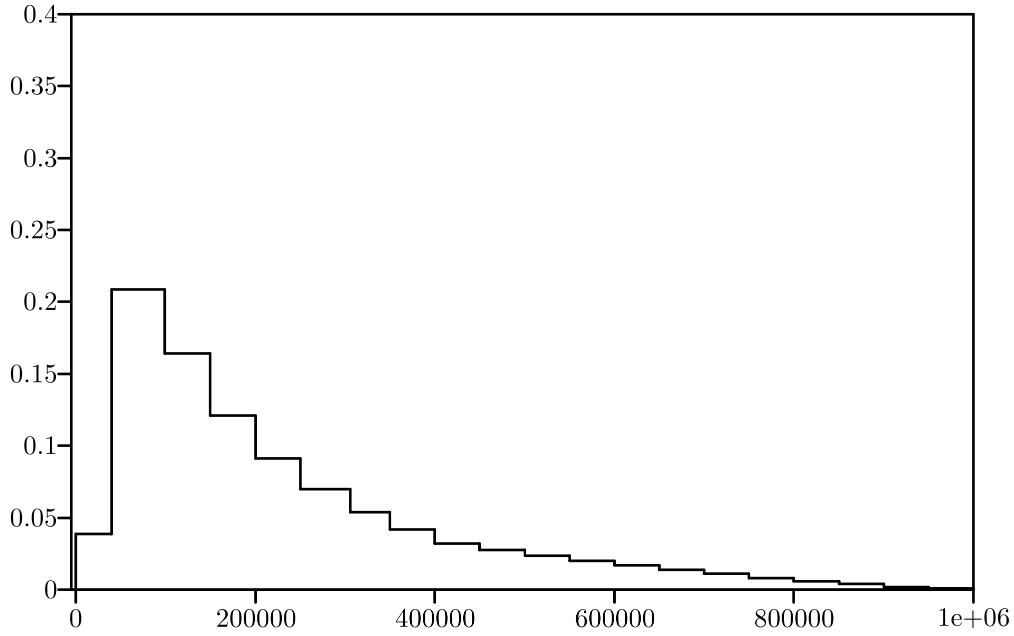
die den Erwartungswert um 40% übersteigt. Die *Shortfall-Wahrscheinlichkeit* $SP(EV_1) := P(V_1 < EV_1)$ beträgt 69,9%. Leider ist mit 24,7% für $SP(V_0) := P(V_1 < V_0)$ die Gefahr, selbst hinter der sicheren Anlage zurückzubleiben, nicht gering. In 3,8% aller Fälle tritt sogar $V_1 < C$ ein, und man erhält nicht einmal seinen Kapitaleinsatz zurück. Dafür besteht für den Aktienanleger eine 4,6%-ige Chance, nach 40 Jahren Euro-Millionär zu sein. Die Verteilung der Endvermögen zeigt Grafik 1.

Für das reine Rentenportfolio in Variante 2 wurde der notwendige Startwert des stetigen Rentenrenditeniveaus selbst als normalverteilte Zufallsgröße $R(0) \sim \mathcal{N}(b, \sigma_R^2)$ erzeugt. Bezeichnen $S(i-1)$ und $S(i)$ die Vermögenswerte des Rentenportfolios am Beginn und am Ende des i-ten Investitionsjahres mit $i = 1, 2, ..., 40$, so fand für die Wertentwicklung vereinfachend eine Summenformel

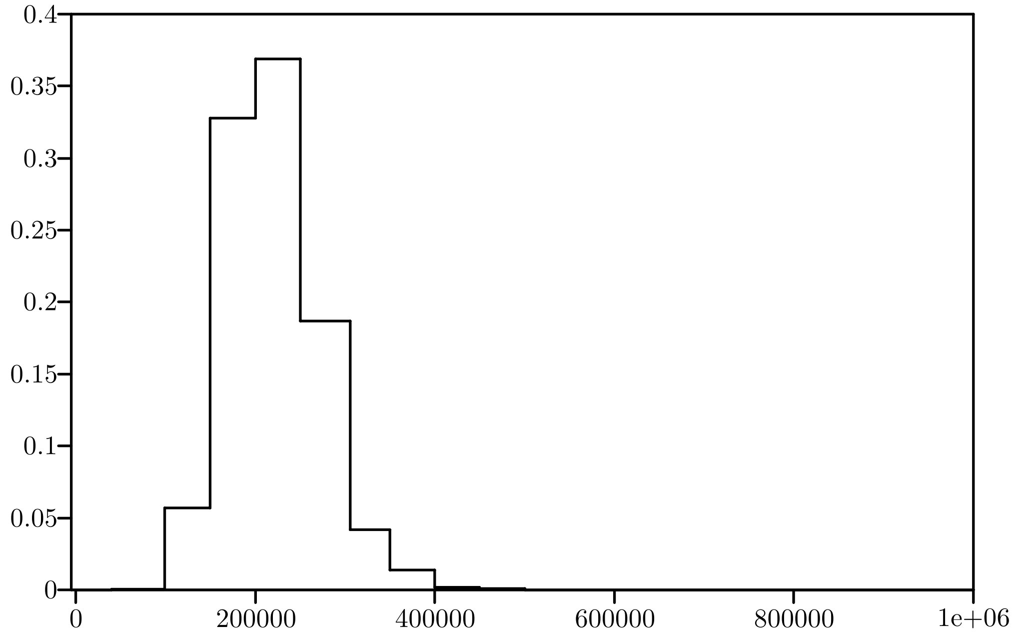
$$S(i) = R_d(i-1)\, S(i-1) + e^{\,4(R(i-1)-R(i))}\, S(i-1)$$

aus Zinsgewinn und Kursgewinn bzw. Kursverlust Anwendung. Variante 2 liefert in der Simulation ein mittleres Endvermögen von $EV_2 = 219.722$ € und eine Standardabweichung von $\sqrt{D^2V_2} = 50.922$ € . Der Mittelwert EV_2 liegt somit um etwa 30% unter dem Mittelwert EV_1 der reinen Aktienanlage. Dies ist aber für viele Anlager sicher akzeptabel in Anbetracht der Tatsache, dass sich die Streubreite des Rentenergebnisses auf ein Neuntel der Streubreite des Aktienergebnisses reduziert. Es sei erwähnt, dass wegen $\mu_R = 0,07$ der Erwartungswert EV_2 dem Ergebnis von 213.610 € einer hypothetischen 7%-igen risikolosen Anlage sehr nahe kommt. Die Differenz der mittleren Endvermögen bei Aktien- und Rentenanlage wird also entscheidend vom Driftabstand $\mu_X - \mu_R$ bestimmt. Weiter ist festzustellen, dass die Kursrisiken bei der Rentenanlage wenig ins Gewicht fallen und die Volatilitätsrisiken wegen des kleinen σ_R im Vergleich zu den Aktien gering sind. Die Verteilung der Endvermögen zeigt Grafik 2. Weitere Einzelheiten der Verteilung der Endvermögen V_1 und V_2 sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Bei der reinen Rentenanlage erhält man in 40 Jahren gewiss das eingesetzte Kapital zurück, wird in dieser Zeit aber sicherlich auch kein Millionär.

Variante 2 ist für den risikoaversen Anlager erste Wahl. Wer etwas mehr Risiko und damit auch etwas mehr Chancen akzeptiert, dem kann das Mischportfolio mit Umschichten aus Variante 4 empfohlen werden. Der Erwartungswert von $EV_4 = 253.593$ € liegt nur noch 17% unter dem der reinen Aktienanlage, während sich die Standardabweichung $\sqrt{D^2V_4} = 133.419$ € gegenüber der reinen Aktienanlage auf weniger als ein Drittel reduziert. Die Verteilung der Endvermögen V_4 findet man in der letzten Spalte von Tabelle 1.



Grafik 1: Histogramm der Endvermögensverteilung (in €) eines Altersvorsorgesparplanes mit jährlich vorschüssiger Einzahlung von 1000 € und Anlage in Aktien unter Zugrundelegung des stochastischen Prozessmodells aus Kapitel 2.



Grafik 2: Histogramm der Endvermögensverteilung (in €) eines Altersvorsorgesparplanes mit jährlich vorschüssiger Einzahlung von 1000 € in Renten unter Zugrundelegung des stochastischen Prozessmodells aus Kapitel 2.

Endvermögen $\mathbf{V_i}$ der Anlage-strategie in €	**Reine Aktienanlage $\mathbf{V_1}$**	**Reines Rentenportfolio $\mathbf{V_2}$**	**Mischportfolio mit Umschichten $\mathbf{V_4}$**
unter $C = 40.000$ (Kapitaleinsatz)	$3,8$	$0,0$	$0,0$
unter $V_0 = 98.826$ (Risikolose Anlage)	$24,7$	$0,02$	$3,6$
unter 150.000	$41,1$	$5,7$	$19,8$
unter 200.000	$53,2$	$38,5$	$40,9$
unter 250.000	$62,3$	$75,4$	$59,4$
unter $\mathrm{E}V_1 = 306.080$ (Mittelwert Aktien)	$69,9$	$94,1$	$74,3$
über 350.000	$25,6$	$1,7$	$17,8$
über 400.000	$21,4$	$0,3$	$11,7$
über 500.000	$15,6$	$0,0$	$5,2$
über 1.000.000	$4,6$	$0,0$	$0,2$

Tabelle 1: Häufigkeitsverteilung erreichbarer Vermögen in %

Wir beziehen nun auch den jeweils zu 50% in Aktien und Renten investierenden Sparplan aus Variante 3 und die vollständige Umschichtung von Aktien in Renten nach 20 Jahren aus Variante 5 in die Betrachtungen ein. Tabelle 2 gibt für alle Varianten eine entsprechende Übersicht über die berechneten bzw. aus allen simulierten Renditepfaden erhaltenen mittleren Endvermögen in € .

Die Tabelle 2 liefert für alle betrachteten Varianten in Spalte 3 den jeweiligen Erwartungswert EV_j, in Spalte 4 die jeweilige Standardabweichung $\sqrt{D^2V_j}$, in den Spalten 5 und 6 die prozentualen Shortfall-Wahrscheinlichkeiten bezüglich der risikolosen 4%-igen Anlage $SP(V_0) := P(V_j < V_0)$ und bezüglich der reinen Aktienanlage $SP(V_1) := P(V_j < V_1)$. Ein gewisses Interesse bei der Beurteilung der Anlageergebnisse findet auch das in Spalte 7 angegebene *Sharpe-Maß*

$$SM_j = \frac{EV_j - V_0}{\sqrt{D^2V_j}}$$

als Verhältnis von Überrendite (bezogen auf die risikolose Anlage) und Risiko (bezogen auf die Standardabweichung des erzielten Endvermögens).

Die Varianten 1 mit maximaler Gewinnerwartung und maximalem Risiko und 2 mit minimaler Gewinnerwartung und minimalem Risiko bilden die Extremsituationen ab. Dabei empfiehlt sich die reine Rentenanlage durch ein gegenüber der Aktienanlage um den Faktor 5 erhöhtes Sharpe-Maß. Variante 3 ist eine einfache Kombination beider Varianten ohne überraschende neue Effekte. Sie hat gegenüber den Varianten 4 und 5 aber den Vorteil, trotz noch hoher Gewinnerwartung fast niemals schlechter als die risikolose Anlage abzuschneiden. Dagegen erreichen die Variante 5 und insbesondere die Variante 4 ein höheres Sharpe-Maß.

Var. Nr.	Strategie	Erwartungswert	Standardabweichung	% unter risikoloser Anlage	% unter Aktien	Sharpe-Maß
0	Risikolose Anlage	98.826	0	0	100	$--$
1	Reine Aktienanlage	306.080	428.407	$24,7$	0	$0,484$
2	Reines Rentenportfolio	219.722	50.922	$0,02$	$44,4$	$2,374$
3	Mischportfolio ohne Umschichten	264.200	212.282	$0,49$	$44,4$	$0,779$
4	Mischportfolio mit Umschichten	253.593	133.419	$3,65$	$35,7$	$1,160$
5	Erst Aktien, dann Renten	243.821	146.395	$3,79$	$44,3$	$0,990$

Tabelle 2: Vergleich charakteristischer Daten der Endvermögen

Variante 4 liefert trotz einer um 2/3 reduzierten Standardabweichung nur in 35% der Fälle schlechtere Endvermögen als die reine Aktienanlage und bildet eine echte Alternative zu dieser für risikofreudige Anleger.

2.2.2 Einfluss der Investitionsfrequenz bei der reinen Aktienanlage

Um das Risiko von Aktienanlagen zu senken, schlagen Vermögensverwalter immer wieder das sogenannte Cost-Averaging vor. Es wird behauptet, dass Kursschwankungen nicht schädlich, sondern im Gegenteil über das Ausnutzen des Cost-Average-Effektes gezielt zur Performancesteigerung nutzbar seien.[20] Der Effekt wird insbesondere als Argument im Verkauf von langfristigen Sparprodukten verwendet.[21] Grundlage des Effektes ist die These, dass durch Erhöhung der Investitionsfrequenz der durchschnittliche Einstandskurs von Vermögenswerten gesenkt werden kann.[22] In diesem Abschnitt untersuchen wir, ob eine positive Beeinflussung der Risiken der reinen Aktienanlage auf der Grundlage eines Aktiensparplans durch Erhöhung der Invesitionsfrequenz erreichbar ist, weil sich ein solcher Cost-Average-Effekt einstellt. Wir suchen dabei einen Vergleich zwischen dem jährlichen Aktiensparen aus Variante 1, dem monatlichen Aktiensparen und einer hypothetischen stetigen Investition mit gleicher Investitionssumme.

[20] Vgl. Stephan, Telöken (1997), S.619.
[21] Vgl. Stephan, Telöken (1997), S.616.
[22] Vgl. Stephan, Telöken (1997), S.616.

J. *(Jährliches Aktiensparen)* Es werden 40 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn $t = i$ ($i = 0, 1, ..., 39$) Aktienindexanteile zum Preis $Z = 1.000$ € gekauft und bis zum Endzeitpunkt $t_{end} = 40$ (Zeit in Jahren) gehalten.

M. *(Monatliches Aktiensparen)* Es wird 40 Jahre lang jeweils zu Beginn eines Monats $t = (i-1)/12$ ($i = 1, 2, ..., 480$) ein Betrag von $Z/12$ in Aktienindexanteile investiert. Diese Anteile werden dann bis zum Endzeitpunkt t_{end} gehalten.

S. *(Stetiges Aktiensparen)* Es werden 40 Jahre lang vom Zeitpunkt $t = 0$ an Aktienindexanteile zum Jahrespreis Z gekauft und bis zum Endzeitpunkt t_{end} gehalten. Die Käufe werden dabei als stetig mit konstanter Rate über das Jahr verteilt angesehen.

Es seien V_J, V_M und V_S die jeweiligen Endvermögen in € nach 40 Jahren reinen Aktiensparens, deren Erwartungswerte und Standardabweichungen man der Tabelle 3 entnehmen kann. Der Erwartungswert von V_M kann in Analogie zu $V_J = V_1$ berechnet werden. Standardabweichung und Shortfall-Wahrscheinlichkeiten erhält man wieder durch Simulation mit zehn Millionen Renditepfaden. Unter Nutzung der Ergebnisse von Yor[23] sind beim stetigen Aktiensparen Erwartungswert und Standardabweichung der Endvermögen explizit berechenbar. Da man diese Berechnungen nicht in der finanzmathematischen Standardliteratur findet, geben wir sie im Anhang an.

Strategie	**Erwar– tungswert**	**Standard- abweichung**
Jährliches Aktiensparen	$EV_J =$ 306.080 €	$\sqrt{D^2 V_J} =$ 428.407 €
Monatliches Aktiensparen	$EV_M =$ 295.138 €	$\sqrt{D^2 V_M}$ 410.073 €
Stetiges Aktiensparen	$EV_S =$ 294.157 €	$\sqrt{D^2 V_S}$ 396.105 €

Tabelle 3: Einfluss der Invesititionsfrequenz bei der reinen Aktienanlage

Das in der Standardabweichung zum Ausdruck gebrachte Risiko des Aktiensparplans kann durch Steigerung der Investitionsfrequenz nicht entscheidend abgesenkt werden. Die Shortfall-Risiken $SP(C)$ des Kapitalverlusts betragen beim jährlichen wie beim monatlichen Aktiensparen nach 40 Jahren jeweils knapp 4%, während die Wahrscheinlichkeit $SP(V_0)$ der Unterschreitung der Ergebnisse der risikolosen Anlage von 24,7% beim jährlichen Aktiensparen sogar auf 25,4% beim monatlichen Sparen ansteigt.

Der warnende Charakter unserer Ergebnisse zu den Risiken von Aktiensparplänen wird auch durch die Mannheimer Arbeit[24] gestützt, in der verschiedene Arten von Shortfall-Risiken beim Aktieninvestment einschließlich langfristiger Aktiensparpläne mit unterschiedlichen Shortfall-Maßen bewertet werden. Bei einer Bewertung mit Hilfe der Shortfall-

[23] Vgl. Yor (2001), S.31ff.

[24] Albrecht, Maurer, Ruckpaul (2001).

Wahrscheinlichkeit $SP(w) := P(V_1 < w)$ und des Shortfall-Erwartungswerts $SE(w) := E[\max(w - V_1, 0)]$ sinken zwar die Gefahren mit zunehmender Laufzeit, es bleibt aber auch nach Jahrzehnten ein bedeutendes Restrisiko. Hingegen wächst der Shortfall Mean-Excess-Loss im Sinne des bedingten Erwartungswerts $MEL(w) := E[w - V_1 | V_1 < w]$ mit zunehmender Laufzeit des Sparplans sogar an. Ein positiv wirkender Cost-Average-Effekt ist auch im Rahmen der dortigen Untersuchungen überhaupt nicht feststellbar.

2.3 Sicherung von Aktienportefeuilles mit Derivaten und Strukturierten Produkten

Die bisher erzielten Ergebnisse deuten auf erhebliche Risiken der Aktienanlage in der langen Frist hin, deretwegen man reine Aktieninvestments für die Altersvorsorge kaum empfehlen kann. Wir haben bisher aber nur reine Aktienportefeuilles und deren Kombinationen mit Rentenportefeuilles untersucht. Es wäre denkbar, dass sich durch Ergänzung der Aktien mit Derivaten Risiko-Ertrags-Kombinationen erreichen lassen, die Aussagen wie die in der Einleitung zitierten zur unbedingten Überlegenheit der Aktienanlage über andere Anlageformen rechtfertigen.[25] Dazu müssten Derivate in der Lage sein, das Risiko der Aktienanlage soweit zu vermindern, dass Renditen alternativer Vermögensklassen nicht mehr unterschritten werden.

Wir überprüfen deshalb als letzte Varianten der stochastischen Prozesssimulation, ob sich durch Ergänzung eines Aktienportefeuilles mit Derivaten weniger risikoreiche und trotzdem ertragsattraktive Portfolios kreieren lassen. Im Einzelnen testen wir mit den gleichen Annahmen für Drift und Volatilität einer geometrischen Brownschen Bewegung des Aktienkursprozesses das Verhalten folgende Strategien:

- Aktiensparen mit Verlustbegrenzung durch Verkaufsoptionen,
- Aktiensparen mit garantiertem Kapitalerhalt ohne Gewinnbeschränkung,
- Aktiensparen mit p%-Kapitalsicherung.

2.3.1 Aktiensparen mit Verlustbegrenzung durch Einsatz von Verkaufsoptionen

Die Anzahl der im Bestand befindlichen und neu zu erwerbenden Aktien wird im Sinne einer Investitionsvariante 6 zu Beginn eines jeden Jahres mit Verkaufsoptionen (Basispreis = Kurs zum Jahresanfang) gegen Kursverluste abgesichert („Protective Put“) [26]. Der maximale Verlust des Portfolios ist somit auf die zu zahlende Optionsprämie beschränkt.[27] Bei den hier angenommenen Ausgangsdaten beträgt die Black-Scholes-Optionsprämie 6,039% des Ausübungswertes. An positiver Aktienkursentwicklung wird vollständig und unbeschränkt

[25] Derartige Ergänzungen reiner Aktienportefeuilles sind z.B. von Junker, Schwarz (2000), S.1410 vorgeschlagen worden.

[26] Vgl. Steiner, Bruns (1996), S.330.

[27] Es werden theoretische Derivatepreise verwendet. Zu den Transaktionskosten siehe unten Abschnitt 2.4.

partizipiert. Die Aktienkursentwicklung muss jedoch mindestens 6,427% betragen, damit das Jahresendvermögen dem Jahresanfangsvermögen vor dem Kauf einer Verkaufsoption entspricht. Das Vermögen $S(i)$ am Ende des i-ten Jahres berechnet sich in dieser Variante wie folgt:

$$S(i) = (S(i-1) + Z) * (1 - \text{Optionsprämie}) * (1 + \text{Aktienrendite(laufendes Jahr)}).$$

Die zum Kapitalerhalt notwendige Aktienrendite erhält man durch Umformung als

$$\text{Aktienrendite(laufendes Jahr)} = \frac{1}{1 - \text{Optionsprämie}} - 1.$$

Die Ergebnisse der Simulation zeigt die folgende Tabelle 4:

Parameter	**Wert**
Erwartungswert:	176.661 €
Standardabweichung:	145.393 €
Pfade unter Kapitaleinsatz:	$1,0\%$
Pfade unter risikoloser Anlage:	$29,9\%$
Sharpe-Maß:	$0,536$

Tabelle 4: Investitionsvariante 6 (Einsatz von Verkaufsoptionen)

Obwohl die Verluste begrenzt wurden, kann in nahezu 30% aller Fälle der Vermögensendwert der risikolosen Anlage nicht erreicht werden. Das Verhältnis von Überrendite zu Risiko (Sharpe-Maß) liegt mit 0,536 leicht über dem bei ungesicherten Aktieninvestments.

Es zeigt sich: Die Ergänzung von Aktienportefeuilles mit Verkaufsoptionen vermindert das Risiko des Aktiensparens also nicht auf eine attraktive Weise. Zwar können Verluste unterhalb des eingesetzten Kapitals weitgehend vermieden werden. Aber die Rendite der risikolosen Anlage kann bei weitem nicht mit Sicherheit erreicht werden.

2.3.2 Aktiensparen mit Kapitalerhalt durch Investition in Garantiezertifikate

Als Investitionsvariante 7 wird das gesamte zu jedem Jahresanfang zur Verfügung stehende Kapital in Zertifikate investiert, die Kapitalerhalt und Partizipation an positiver Aktienkursentwicklung verbriefen. Finanzmathematisch betrachtet besteht ein solches Garantiezertifikat aus einer zu 100 fällig werdenden abgezinsten einjährigen Anleihe und einer europäischen Kaufoption auf die zugrunde liegenden Aktien bzw. den zugrundeliegenden Aktienindex.[28] Die Kapitalgarantie wird durch eine reduzierte Teilhabe an positiven Kursentwicklungen erkauft.[29] Bei den hier angenommenen Ausgangsdaten beträgt die Partizipation 38,910%. Die Kosten für eine europäische Kaufoption mit einem Ausübungskurs in Höhe des aktuellen Kurses des Basisobjekts betragen bei einem Jahr Laufzeit $9,8847\%$ des Vermögenswertes.

[28] Vgl. Fischer, Schuster (2002), S. 245.

[29] Die streng mathematische Formulierung des Problems ist aus den Ausführungen des folgenden Abschnitts ersichtlich.

Bei einem Ausübungskurs (Indexstand am Jahresanfang) von z. B. 1000 also 98,85 € . Dabei wird angenommen, dass ein Indexpunkt 1 € wert ist. Beträgt das Vermögen am Jahresanfang (Vorjahresendvermögen zzgl. Zahlung von 1000 €) beispielsweise 10.000 € werden 9.615,38 € in das mit 4% abgezinste 1-Jahrespapier investiert. Die restlichen 384,62 € stehen für den Kauf von Optionen zur Verfügung. Bei einem Preis von 98,85 € für eine Option können demzufolge 3,8909 Kaufoptionen erworben werden.[30] Wenn der Index am Jahresende auf 1100 gestiegen ist (+10%), dann hat die Option einen Wert von 100 € . Da der Anleger 3,8909 Optionen besitzt, hat er einen Anspruch auf 389,09 € . In Bezug auf das eingesetzte Kapital (10.000 €) ergibt dies eine Verzinsung von 3,8909% p.a., was gleichzeitig 38,91% des Indexanstieges entspricht.

Die Ergebnisse der Strategie zeigt die folgende Tabelle 5:

Parameter	**Wert**
Erwartungswert:	130.190 €
Standardabweichung:	38.028 €
Pfade unter Kapitaleinsatz:	0,00%
Pfade unter risikoloser Anlage:	19,6%
Sharpe-Maß:	0,825

Tabelle 5: Investitionsvariante 7 (Klassische Garantiezertifikate)

Diese Strategie führt zu einer deutlicheren Reduktion des Risikos als mittels Verkaufsoptionen bei noch akzeptablen Kosten, was zu einem günstigeren Ertrags-Risiko-Verhältnis führt (Sharpe-Maß steigt um rund 54%).

Gleichwohl ist das Risiko aber nicht niedrig: Während das eingezahlte Kapital vollständig erhalten bleibt, muss immerhin in ca. 20% der Fälle mit einem niedrigeren Endwert als bei der risikolosen Anlage gerechnet werden.

2.3.3 Investition nach der p%-Kapitalsicherungsmethode

Abschließend betrachten wir als Invesitionsvarianten 8 und 9 aus dem Derivatebereich noch zwei Vertreter der p%-Kapitalsicherungsmethode, welche darin besteht, das vorhandene Kapital $S(i)+Z$ am Jahresbeginn des $(i+1)$-ten Jahres über das Jahr hinweg jeweils zu p% mit $0 < p < 100(1+r)$ durch Kauf einjähriger risikoloser Anleihen zum Kurs von $\frac{p(S(i)+Z)}{1+r}$ zu sichern und mit dem Restkapital $(1-\frac{p}{1+r})(S(i)+Z)$ durch Kauf von Kaufoptionen mit Basispreis $X(i)$ (aktueller Aktienkurs) und einjähriger Restlaufzeit optimal an steigenden Aktienmärkten zu partizipieren. Mit dem vorhandenen Restkapital können

$$C(i) = \left(\frac{S(i)+Z}{X(i)}\right) F(p)$$

[30] Zur besseren Darstellung wird angenommen, dass die Optionen auch anteilig erworben werden können.

solche Kaufoptionen erworben werden, wobei es darauf ankommt, ob der bei wachsendem p streng monoton fallende Faktor

$$F(p) = \frac{\left(1 - \frac{p}{1+r}\right) X(i)}{blackscholes(X(i), X(i), 1, r_c, \sigma_X)} = \frac{\left(1 - \frac{p}{1+r}\right)}{\Phi(\frac{r_c}{\sigma_X} + \frac{\sigma_X}{2}) - e^{-r_c}\,\Phi(\frac{r_c}{\sigma_X} - \frac{\sigma_X}{2})}$$

unter 1 liegt (Fall I) oder die Zahl 1 erreicht bzw. überschreitet (Fall II). Dabei bezeichnet $blackscholes(\cdots)$ den Kurs der Kaufsoption und $\Phi(\cdot)$ den Wert der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.

Der Fall I tritt für alle positiven Prozentwerte p unterhalb der eindeutig bestimmten Zahl p_0 mit $F(p_0) = 1$ ein. Für unsere Parameterkonstellation liegt p_0 knapp unterhalb von 94%. Im Fall I reicht das Restkapital nicht aus, um durch die Kaufoptionen 100%-ig am steigenden Aktienmarkt zu partizipieren, denn dazu wären $\frac{S(i)+Z}{X(i)}$ Kaufoptionen erforderlich. Deshalb werden die fehlenden Finanzen durch Verkauf von $\frac{S(i)+Z}{X(i)}$ Kaufoptionen mit einem höheren Basispreis $X(i)(1+\alpha)$ $(\alpha > 0)$ beschafft. Dabei ist für alle $p_0 < p < 100(1+r)$ die positive Zahl α eindeutig als Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$\begin{aligned} blackscholes(X(i), X(i), 1, r_c, \sigma_X) - blackscholes(X(i), X(i)(1+\alpha), 1, r_c, \sigma_X) \\ = \left(1 - \frac{p}{1+r}\right) X(i) \end{aligned}$$

ermittelbar. Das Vermögen am Jahresende berechnet sich nach der Vorschrift

$$S(i+1) = p\,(S(i) + Z) + \frac{(S(i) + Z)}{X(i)} \cdot \min\left(\max(X(i+1) - X(i), 0), \alpha\, X(i)\right).$$

Diese Konstruktion entspricht der im Optionshandel beliebten Bull-Spread-Strategie[31], die für Privatanleger i.d.R. durch entsprechende Zertifikate nachgestaltet wird.[32] Das gesamte zu jedem Jahresanfang zur Verfügung stehende Kapital wird in solche Zertifikate investiert. Diese verbriefen wie klassische Garantiezertifikate den Kapitalerhalt zu p% bei gleichzeitiger Begrenzung der maximalen Rendite (Cap).

Wir betrachten als Investitionsvariante 8 den Kauf von Bull-Spread-Zertifikaten mit vollem Kapitalerhalt ($p = 100$, $F(p) = 0,389$). In unseren Parameterkonstellationen ist dann $\alpha = 0,08825$. Der Unterschied zu klassischen Garantiezertifikaten besteht darin, dass bis zur Höhe des Cap (bei unseren Ausgangsdaten 8,825%) die Verzinsung der positiven Aktienkursentwicklung entspricht. Eine höhere Verzinsung als der Cap kann allerdings nicht erreicht werden.

Parameter	**Wert**
Erwartungswert:	117.761 €
Standardabweichung:	21.260 €
Pfade unter Kapitaleinsatz:	0,00%
Pfade unter risikoloser Anlage:	18,8%
Sharpe-Maß:	0,891

Tabelle 6: Investitionsvariante 8 (Bull-Spread-Zertifikate mit p=100)

[31] Vgl. Hull (2001), S.268.

[32] Vgl. Cavaleri, Planta (1992), S.118f.; Wilkens, Scholz, Völker (1999), S.408f.

Die Ergebnisse der Bull-Spread-Strategie mit vollem Kapitalerhalt zeigt die Tabelle 6. Diese Art zu investieren liefert bei den hier betrachteten Risikokennzahlen im Vergleich zu den vorherigen Varianten mit Derivateeinsatz überall bessere Ergebnisse. Das Sharpe-Maß liegt deutlich höher. Das Risiko des Verlustes des eingesetzten Kapitals verschwindet. Es ist aber wichtig festzustellen, dass diese im Vergleich attraktive Strategie durch den Verzicht auf Renditen oberhalb des Caps den Charakter von Aktieninvestments mit ihren typischerweise unbegrenzten Gewinnchancen im Grunde verloren hat und sich eher am Zahlungsstromverlauf eines Anleiheportfolios orientiert.

Im Fall II der p%-Kapitalsicherungsmethode, welchem mit p=90% und $F(p) = 1,36$ die nunmehr betrachtete Investitionsvariante 9 zuzuordnen ist, reicht das Restkapital für eine mit dem Faktor $F(p) = 1$ proportionale bzw. für $F(p) > 1$ überproportionale Partizipation an steigenden Aktienmärkten aus. Es können tatsächlich $C(i)$ Kaufoptionen erworben werden. Das Vermögen am Jahresende berechnet sich hier nach der Vorschrift

$$S(i+1) = p\,(S(i) + Z) + C(i) \cdot \max(X(i+1) - X(i), 0)$$

Die Simulationsergebnisse der 90%-Kapitalsicherungsmethode zeigt die folgende Tabelle 7:

Parameter	**Wert**
Erwartungswert:	280.077 €
Standardabweichung:	421.475 €
Pfade unter Kapitaleinsatz:	$3,33\%$
Pfade unter risikoloser Anlage:	$27,4\%$
Sharpe-Maß:	$0,430$

Tabelle 7: Investitionsvariante 9 (Risikolose Anleihen und Kaufoptionen mit p=90)

Es ist ein wenig erstaunlich, dass die Ergebnisse des reinen Aktiensparens (Variante 1) und die Ergebnisse der 90%-Kapitalsicherungsmethode (Variante 9) am ehesten vergleichbar ausfallen, obwohl bei Variante 9 keine Aktien, sondern nur risikolose Anleihen und Kaufoptionen gekauft werden. Erwartungswerte und Streuungen beider Investitionsvarianten sind von ähnlicher Größe, weil sich die Chancen und Risiken von Anleihen und Optionen bei Variante 9 so überlagern, dass sie etwa den Chancen und Risiken von Aktien entsprechen. Keinesfalls kann die 90%-Methode, wie manchmal von Investmentbanken behauptet, die Risiken der Aktienanlage ernsthaft verringern. Im Gegenteil, bei ähnlichem Risiko fallen nur in 40% aller simulierten Renditepfade die Aktienergebnisse schlechter aus als die der 90%-Methode.

Durch Verwendung von Derivaten bzw. Strukturierten Kapitalmarktprodukten lassen sich also nicht in allen Fällen Risiken des Aktieninvestments attraktiv veringern (vgl. Tabelle 8). Das Risiko, ein Ergebnis unterhalb der sicheren Anlage zu erzielen, kann lediglich mit dem Garaniezertifikat (Variante 7) und der Bullspread-Methode (Variante 8) verringert werden. Dies wird jedoch durch einen stark verminderten Erwartungswert „erkauft“. Erst wenn man durch Einführung von Renditeobergrenzen die Gewinnchancen beschränkt, erreicht man attraktive Ertrags-/Risikokombinationen (Sharpe-Maß), die ein großes Maß an Sicherheit mit gerade noch ausreichender Ertragsstärke verknüpfen, und die damit der Idee einer sicheren Altersvorsorge am ehesten entsprechen.

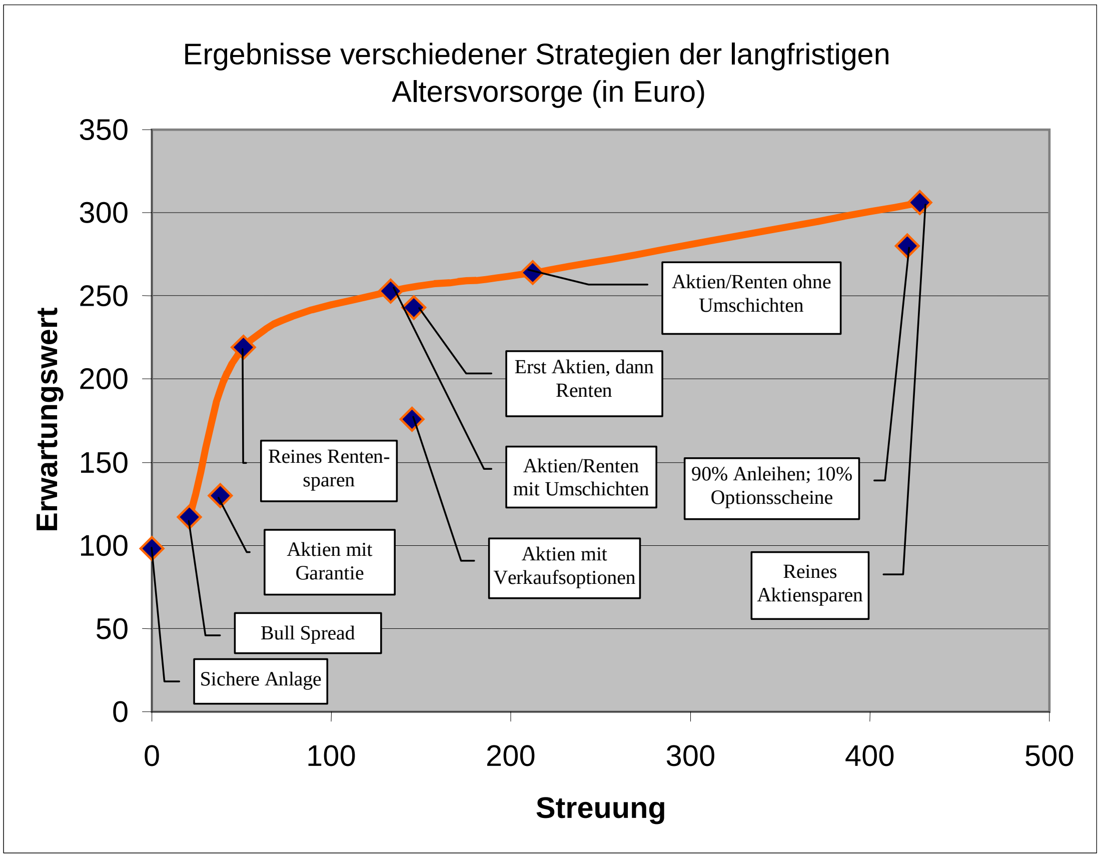
Var. Nr.	Strategie	Erwartungswert	Standardabweichung	% unter risikoloser Anlage	% unter Aktien	Sharpe-Maß
1	Reine Aktienanlage	306.080	428.407	24,7	0	0,484
2	Reines Rentenportfolio	219.722	50.922	0,02	44,4	2,374
...	...	...	...	...	...	...
6	Aktien mit Verkaufsoptions-Absicherung	176.661	145.393	29,9	88,2	0,536
7	Klassische Garantie-Zertifikate	130.190	38.028	19,6	99,8	0,825
8	p%-Methode p=100 (Bull-Spread)	117.761	21.260	18,8	72,8	0,891
9	p%-Methode p=90 (Anleihen+Calls)	280.077	421.475	27,4	60,2	0,430

Tabelle 8: Vergleich mit Endvermögen aus Derivatestrategien

2.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir suchten nach fundierten Regeln für die Verteilung von Vermögen auf Aktien und Renten zum Zwecke der langfristigen Altersvorsorge. Die Regeln sollten, wie das im modernen Portfoliomanagement heute üblich ist, aus plausiblen Mutmaßungen über zukünftige Entwicklungen unter Zuhilfenahme und sinnvoller Interpretation von Renditeerwartungswerten und Renditerisikokennziffern der Vergangenheit gewonnen werden.

Die Ergebnisse sind sehr ernüchternd. Wie Tabelle 2 zeigte, ist die Aktie als Anlageform langfristig zwar am rentabelsten aber auch ausgesprochen risikoreich (vgl. auch Grafik 3). Eine Standardabweichung vom 1,4-fachen des Erwartungswertes dürfte selbst für risikofreudige Altersvorsorgende völlig unakzeptabel sein. Das Risiko erscheint auch unter keinem anderen Licht, wenn man Ausfallrisikomaße betrachtet. Es bleibt ein erhebliches Risiko übrig: Beim reinen Aktiensparen liegt die Aktienrendite mit 25% Wahrscheinlichkeit noch unter der Rendite von Anleihen und mit 4% unter dem Kapitaleinsatz. Selbst bei der Ergänzung der Aktienportefeuilles mit risikosenkenden Derivaten ergibt sich kein grundsätzlich anderes Bild, es sei denn, man wählte Strategien, bei denen der Aktiencharakter des Portefeuilles verloren geht. Die Ergebnisse der verschiedenen Strategien fasst Grafik 3 zusammen, wobei nur Erwartungs- und Streuungswerte der Endvermögen dargestellt werden. Die Verbindungslinie stellt keine Efficient Frontier im strengen Sinne dar, da nur die Punkte, nicht aber Kombinationen daraus berechnet wurden.



Grafik 3: Die Grafik zeigt Erwartungswerte des Endvermögens (in €) von Altersvorsorgesparplänen mit jährlich vorschüssiger Einzahlung von 1000€ und Anlage in Aktien, Renten und Derivaten in verschiedenen Zusammensetzungen unter Zugrundlegung der stochastischen Prozessmodelle aus Kapitel 2.

Nun kann man versuchen, mit verfeinerten Zahlen zu rechnen und steuerliche und Inflationseffekte in die Renditeschätzungen zu integrieren. Es ergeben sich von der Tendenz her aber keine anderen Aussagen, weil es im Wesentlichen das zur Aktienkursbeschreibung verwendete Prozessmodell, d.h. die geometrische Brownsche Bewegung mit Unabhängigkeit der Zuwächse ist, die das Risiko determiniert.[33] In einer relativ großen Bandbreite von μ- und σ-Werten verändern sich die Aussagen nicht.

Transaktionskosten verändern die Ergebnisse in folgender Weise: Grundlage aller Berechnung ist ein 40-jähriger Sparplan mit jährlichen Einzahlungen von 1000€ . Es fallen bei allen Strategien 40 mal Kaufgebühren an. Unterstellt man Kosten von 10 bis 15€ pro Transaktion wie bei einigen Discount Brokern, dann fallen diese Kosten nicht ins Gewicht. Zu diesen Erwerbskosten kommt die jährliche Managementgebühr für die Portfolioverwaltung hinzu, die vom jeweiligen Vermögen berechnet wird und leicht 20% vom Endwert ausmachen kann. Allerdings gibt es Portfolioverwalter, die unter leicht einhaltbaren Bedingungen (z.B. eine Transaktion pro Quartal) auch auf Managementgebühren verzichten. Strategien mit Um-

[33] vgl. Albrecht, Maurer, Ruckpaul (2001), S.4ff.

schichtung verursachen tendenziell höhere Kosten als Strategien ohne Umschichtung. Nennenswerte Kosten fallen bei den Strategien mit Derivaten an. Hier ist die Geld-Brief-Spanne der ge- und verkauften Derivate zu beachten. Schließlich ist zu beachten, dass alle Erwerbe zum Briefkurs und die Bewertung des Vermögens nach 40 Jahren zum Geldkurs erfolgen müssen. Insgesamt führen Transaktionskosten dazu, dass Strategien mit Derivaten und mit Umschichtungsvorgängen relativ zu den einfachen Strategien „reines Aktiensparen“, „reines Rentensparen“ und „Aktien/Renten ohne Umschichten“ verlieren (vgl. Grafik 3).

Zusammenfassend ergibt sich: Die These, auf lange Sicht sei es unnötig, sich über die Risiken der Aktienanlage Gedanken zu machen, weil die Aktienperformance zwar kurzfristig volatil aber langfristig attraktiv sei,[34] ist nicht haltbar. Auch bei Betrachtung von Ausfallrisikomaßen errechnen sich noch bei einem 40-jährigen Zeithorizont erhebliche Risiken, und die Frage der Stationarität der aus der Historie abgeleiteten Prozessmodelle ist ungeklärt. Unsicher ist der Modelltyp an sich und dessen Parameterspezifikation. Die Annahme einer Leptokurtosis in der Renditeverteilung würde das Risiko von Aktienanlagen über das mit Modellen der geometrischen Brownschen Bewegung ermittelte Risiko hinaus erhöhen. Das Aktiensparen ist, wenn man es mit stochastischen Prozessmodellen analysiert, in erheblichem Maße riskant. Mit Altersarmut muss trotz großer Sparanstrengungen gerechnet werden. Eindeutige Aussagen zugunsten von Aktienportefeuilles sind nicht vertretbar.

3 Entscheidung anhand von Szenarien aus historischen Daten

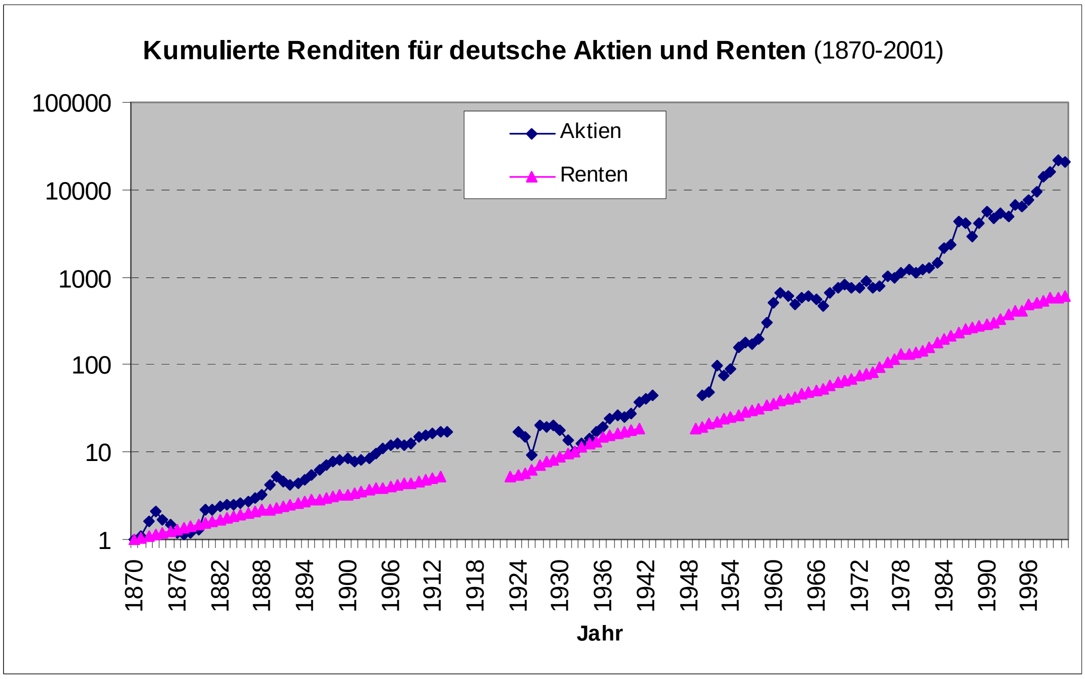
Neben der Analyse historischer Prozessmodelle spielt die Betrachtung historischer Renditepfade eine bedeutende Rolle bei Anlageentscheidungen im Portfoliomanagement.[35] Wir wollen im Folgenden prüfen, welche Empfehlungen sich aus historischen Renditepfaden für die langfristige Vermögensallokation im Vergleich mit den Ergebnissen der stochastischen Prozessmodelle ableiten lassen. Konträre Ergebnisse könnten auf die Notwendigkeit hindeuten, Parameter und Prozesstypen neu zu bestimmen. Gleichzeitig soll das Verhalten der Praxis beleuchtet werden, Anlage- und Strukturierungsempfehlungen aus historischen Renditepfaden abzuleiten.

In der Praxis ist die Betrachtung historischer Renditepfade im Finanzmarketing beliebt: sie stellt eine sehr intuitive Herangehensweise an das Problem der langfristigen Vermögensstrukturierung dar. Das Vorgehen lässt sich Adressaten der langfristigen Vermögensanlage leichter vermitteln als die Analyse von stochastischen Prozessmodellen, weil auf die Schätzung eines Modells mit schwer erklärbaren Parametern und Annahmen - μ, σ, Unabhängigkeit der Kurszuwächse bzw. Periodenrenditen, Kurtosis etc. - verzichtet werden kann. Die Argumente können auch ohne finanzwirtschaftliche Vorbildung gut nachvollzogen werden. Man führt - nicht nur Laien - anschaulich vor Augen, wie die Vermögensentwicklung absolut und relativ „typischerweise“ verläuft.[36] So führt beispielsweise die Genfer Privatbank Pictet & Cie Indizes gemischter Anlagestrategien mit langer, über 30-jähriger Historie (internationale

[34]vgl. o.V. (1995), S.28.
[35]Beispielhaft Symmank (1997), S.531.
[36]Beispielhaft vgl. Weisgerber (2000), S.686; Symmank (1997), S.531f.

Aktien/Renten-Portfolios mit Aktienanteil von 25%, 40% und 60%), deren Performance von den schweizerischen Pensionskassen und Lebensversicherungen als Benchmarks für Anlagen im Bereich der langfristigen Altersversorgung verwendet werden.[37]

Das Problem der Entscheidung anhand von historischen Renditepfaden ist, dass man pro Vermögensklasse nur einen einzigen historischen Pfad erhält (vgl. Grafik 4). Man kann nicht sicher sein, dass dieser eine Pfad für die Zukunft repräsentativ ist. Es stellt sich deshalb die Frage, woher die Vermögensverwalter, die optimale Vermögensstrukturen aus historische Renditepfaden ableiten oder diese als Richtschnur für Anlagestrategien empfehlen, die Sicherheit gewinnen, die für eine Empfehlung nötig ist?



Grafik 4: Die Grafik zeigt die kumulierten Aktien- und Rentenrenditen in den Zwischenkriegsphasen seit 1870. Die Übergänge von den Vorkriegs- zu den Nachkriegsphasen sind nicht interpretierbar.[38]

Zwei fehleranfällige Methoden, die gleichwohl häufig verwendet werden, sind die Nutzung von Länderanalysen und überlappenden Phasen:

i) Länderanalyse. Für jede Vermögensklasse betrachtet man mehrere Länder. Es ergeben sich dann so viele Pfade wie Länder.[39] Aus diesen Pfaden werden Ertrags- und Risikokennziffern gebildet.

ii) Überlappende Pfade. Man unterteilt historische Zeiträume in kürzere Phasen, die sich

[37] Nähere Information dazu werden gefunden im Internet unter: http://www.pictet.com und insbesondere http://www.pictet.com/de/services/research/pictet3/historic.html (4.3.2003).

[38] Von 1959 bis 2000 entsprechen die Renditen der Umlaufrendite deutscher inländischer Renten und dem (zurückgerechneten) DAX. Sie korrespondieren mit den im Kapitel 2 verwendeten Daten. Für die Jahre davor wurden die Renditen aus Morawietz (1994) verwendet.

[39] Vgl. Mazzioni, Weber, Wicki (2001), S.219.

überlappen und sich nur am Beginn und am Ende um jeweils eine Periode unterscheiden. Man erhält dann eine große Zahl von Pfaden, die man auswertet.[40]

Es ergeben sich gravierende Probleme, denn den berechneten Risikokennziffern fehlt die statistische Verlässlichkeit, weil sich mit den Maßnahmen i) und ii) die Menge verfügbarer Daten nicht wirklich erhöhen lässt. [41]

- **Länderpfade.** Die Betrachtung von Länderpfaden krankt daran, dass die Renditeentwicklungen[42] der Vermögensklassen in verschiedenen Ländern nicht unabhängig voneinander sind. Die Korrelationskoeffizienten der Renditen von Aktienportfolios von Industrieländern liegen zwischen +0,5 bis +0,8.[43] Zwischen Industrieländern und Emerging Markets liegen die Korrelationskoeffizienten deutlich niedriger.[44] Allerdings findet man hier keine langfristige Historie, da die Märkte erst vor wenigen Jahren entstanden sind. Es kann vermutet werden, dass sich die Korrelationskoeffizienten zwischen reifenden Emerging Markets und den gereiften Märkten der Industrieländer denjenigen zwischen Industrieländern annähern.

- **Überlappende Perioden.** Mit den von Morawietz zusammengetragenen Renditedaten seit 1870 lassen sich 55 überlappende Phasen von 20 Jahren Länge ermitteln. Diese Anzahl von Pfaden ist statistisch auswertbar. Wiek wählt Monatsdaten. Damit kommt er selbst für den kurzen Stützzeitraum von 1/1967 bis 8/1992 zu 68 - überlappenden - Phasen von 20 Jahren Länge, aus denen er dann Durchschnittsrenditen und Standardabweichungen berechnet. Allerdings gilt hier wie bei der Länderaufspaltung: bei überlappenden Phasen sind die Renditen der Pfade nicht unabhängig voneinander und vergrößern die Menge auswertbarer Daten nicht. Bei zwei sich überlappenden Pfaden besteht die Datenmenge zu einem Teil aus gleichen Daten, die nur durch die sich nicht überlappenden Enden eine gewisse Variation erfahren. Je größer der Überlappungsbereich ist - und der ist riesig, wenn man 20 Jahreszeiträume betrachtet und monatlich variiert -, desto ähnlicher sind zwangsläufig die Ergebnisse. Man nimmt im Grunde ein Datum, den Renditeprozess, und variiert leicht. Ergebnis ist genau das Datum, der Renditeprozess. Die ausgewiesenen niedrigen Risikokennziffern und die Werbung mit ihnen sind insofern irreführend.

Die genanten Nachteile kann man nur dann vermeiden, wenn man nicht überlappende Phasen

[40] vgl. o.V. (1995); Morawietz (1994); Wiek (1992); Weisgerber (2000), S.686, Mazzioni, Weber, Wicki (2001), S.219.

[41] Hat man die nötige Anzahl Pfade definiert, werden die üblichen mathematisch statistischen Auswertungen vorgenommen. Z.B. werden aus den Durchschnittsrenditen aller Pfade Risikokennzahlen gebildet - z.B. die Standardabweichung oder Ausfallrisikomaße. Anschließend wird die Entscheidung, in welche Vermögensklassen investiert werden soll, nach dem μ-σ-Kriterium - oder statt mit σ auch mit Ausfallrisikomaßen - getroffen (vgl. Morawietz (1994), S.163.)

[42] Vgl. Albrecht, Maurer, Ruckpaul (2001), S.1.

[43] Vgl. Cumova (2002) Tab.2, S.7; Breipohl (1994), S.79.

[44] Vgl. Cumova (2002) Tab.2, S.7.

verwendet.[45] Man unterteilt den betrachteten Gesamtzeitraum in Subperioden, die aneinander anschließen, sich also nicht überlappen. Das Ziel ist, die Anzahl unabhängiger Pfade zu erhöhen. Derartige nicht überlappende, unabhängige Pfade kann man dann statistisch auswerten, um einen besseren Einblick in die Risikostruktur einer Allokationsregel zu bekommen. Für die langfristigen Allokationsstrategien dieses Beitrags braucht man also möglichst viele Subperioden von 40 Jahren Länge.

Für den deutschen Markt sind Renditen von Aktien und Renten seit etwa 1870 mit Ausnahme der Kriegsjahre verfügbar. Man kann damit den Gesamtzeitraum in drei Phasen trennen, die von den zwei Weltkriegen separiert werden. Morawietz geht auf diese Weise vor und unterscheidet die drei Phasen 1870/1913, 1924/1941 und 1950/Gegenwart.[46] Die folgende Tabelle 9 gibt die daraus errechenbaren Zahlen unabhängiger und nicht überlappender Pfade wieder. Man erkennt, dass die Anzahl im langfristigen Bereich so niedrig ist, dass eine statistische Auswertung nicht erfolgen kann. Deshalb ist es auch nicht möglich, die stochastischen Prozessmodelle anhand von historischen Renditezeitreihen zu überprüfen, es sei denn, man akzeptiert die Methode der „freihändigen“ Plausibilitätsprüfung.

Länge der Pfade	**Anzahl**
40 Jahre	**2**
35 Jahre	**2**
30 Jahre	**2**
25 Jahre	**3**
20 Jahre	**4**
15 Jahre	**6**
12 Jahre	**8**
10 Jahre	**10**

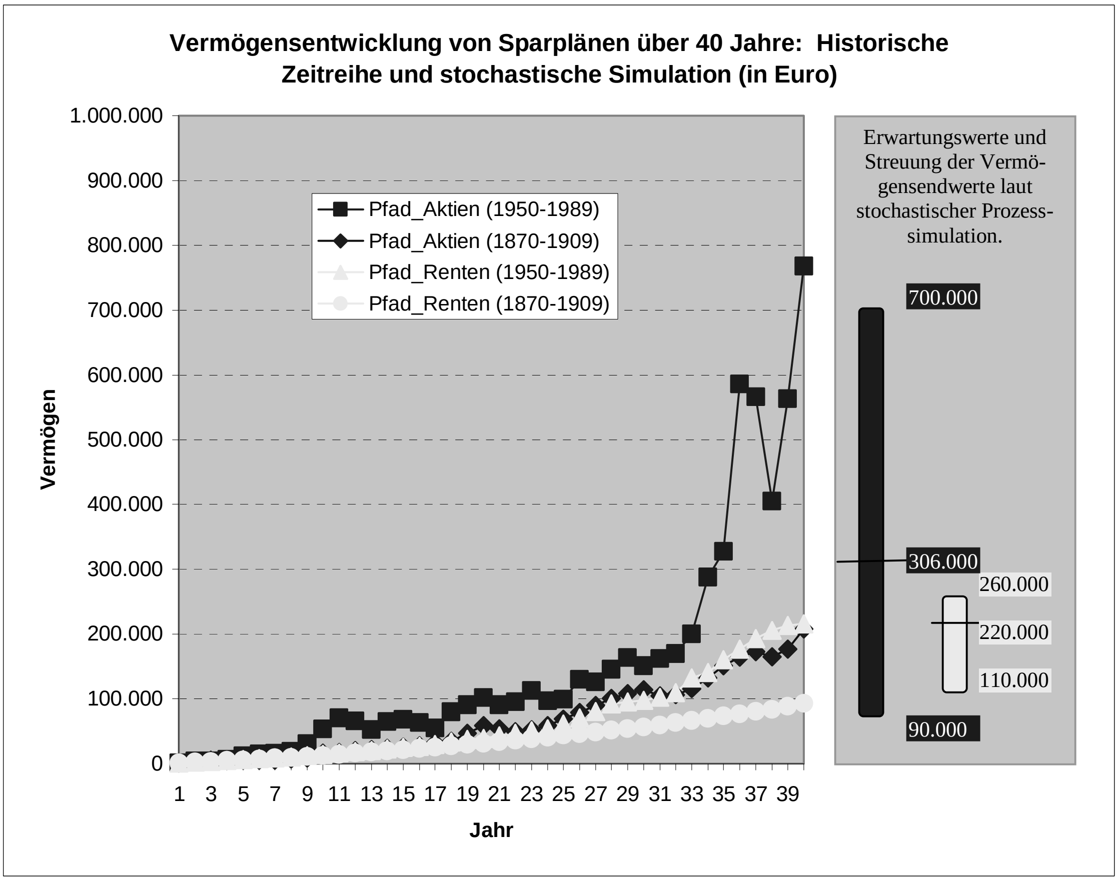
Tabelle 9: Anzahl unabhängiger, nicht überlappender historischer Renditepfade nach ihrer Länge für Aktien und Renten in Deutschland seit 1870[47]

Betrachten wir die zwei Pfade mit 40-jähriger Renditehistorie, die sich für deutsche Aktien und Renten ermitteln lassen. Grafik 5 zeigt die Entwicklung des Vermögens des Altersvorsorgesparplanes entsprechend Strategie 1 (reines Aktiensparen) und 2 (reines Rentensparen) aus Kapitel 2 (d.h. 1000 € jährliche vorschüssige Ansparleistung bei 40 Jahren Spardauer) in zwei nicht überlappenden historischen Renditezeitpfaden von 40 Jahren für den deutschen Aktien- und Rentenmarkt.

[45] Vgl. auch Löffler (2000), S.350f. In der Literatur wird als weiteres Verfahren zur Auswertung historischer Zeitreihen das Resampling (Bootstrapping) vorgeschlagen. Dieses interessante Verfahren besteht darin, dass Simulationen mit als unabhängig angenommenen tatsächlichen historischen Renditen durchgeführt werden. Löffler findet bei seinen Berechungen nur geringe Unterschiede in den Verteilungskennzahlen nach Resampling-Simulationen und Simulationen mit stochastischen Prozessmodellen; vgl. Löffler (2000), S.356.

[46] vgl. Morawietz (1994), S. 69ff.

[47] Zur Berechnung der Renditen in der Zeit des Deutschen Reiches vgl. Moravietz (1994), S.69ff.



Grafik 5: Die Grafik zeigt die Vermögensentwicklung von Altersvorsorgesparplänen mit jährlich vorschüssiger Einzahlung von 1000 € und Anlage in Aktien oder Renten mit den beiden nicht überlappenden historischen 40-Jahres-Renditezeitpfaden von 1950-1989 und 1870-1909. Die rechte Spalte der Grafik zeigt für die Aktien- und Rentensparpläne die Vermögensenderwartungswerte sowie die Bandbreite von je 67% der darüber und darunter liegenden Werte aus der Prozesssimulation.

Wir finden die Erkenntnis einer erheblichen Varianz des Endvermögens aus der Untersuchung stochastischer Prozessmodelle bestätigt. Die beiden verfügbaren 40-jährigen Renditepfade aus den weit auseinanderliegenden Zeiträumen vom Ende des 19. Jahrhunderts und der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts unterscheiden sich gravierend, so dass sich die in der Grafik sichtbare erhebliche Spannweite zwischen dem guten und dem schlechten Pfad bei Renten wie bei Aktien ergibt. Eine hier nicht dargestellte Betrachtung von vier möglichen Renditepfaden von 20 Jahren Länge (1870-89; 1890-09; 1950-69; 1970-89) zeigt ein ähnliches Bild einer erheblichen Endvermögensstreuung.

Während sich die Risikoabschätzung bei der Analyse stochastischer Prozessmodelle auf die Verteilungsparameter stützt, leitet die Finanzpraxis bei der Analyse historischer Zeitreihen das Risiko aus Phasen extremer Entwicklungen ab (Worst Case-Analyse).[48] Wir prüfen, ob eine Worst Case-Analyse historischer Pfade zu ähnlichen Ergebnissen gelangt wie die Risikobetrachtung stochastischer Prozesssimulationen.

[48]Vgl. Keller (2000), S.103.

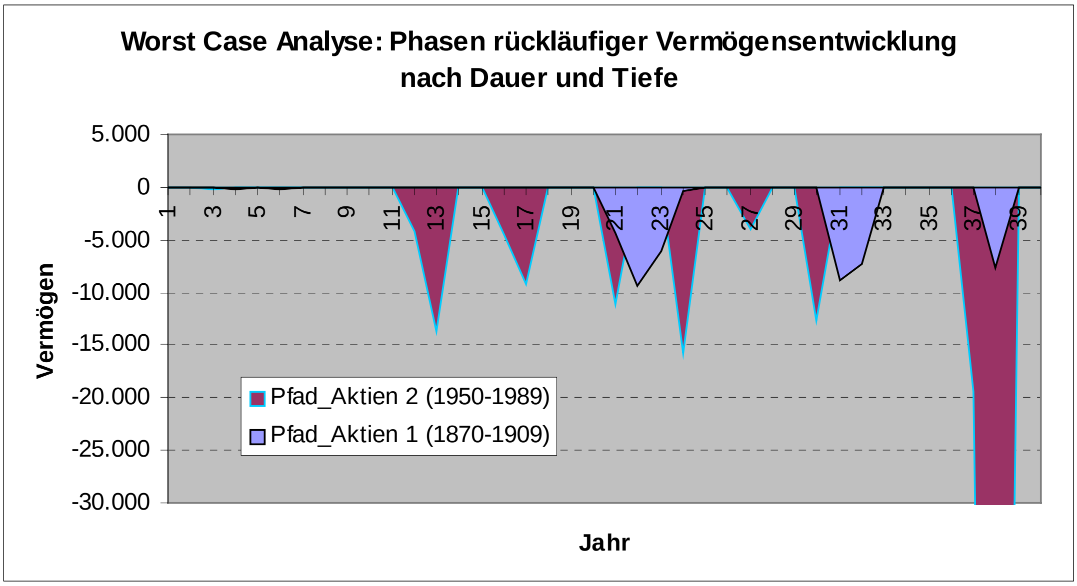
Zunächst besteht keine Einigkeit darüber, (i) wie extreme Entwicklungen zu messen sind und (ii) wie sie bewertet werden sollten. Mazzioni, Weber und Wicki ermitteln den „schlimmsten ununterbrochenen“ Wertverlust als Worst Case.[49] Weisgerber benutzt die Zahl der Jahre mit Negativrenditen.[50] Ähnlich geht Wiek vor; er betrachtet außer 1-Jahres- auch 3-Jahreszeiträume.[51] Die Genfer Privatbank Pictet & Cie benutzt die Jahre mit positiver Rendite im Vergleich zu den Jahren mit negativer Rendite; daneben wird die niedrigste Jahresrendite des Gesamtzeitraums betrachtet.[52] Ein weiterer Worst Case-Indikator ist bei Wiek der längste Zeitraum, in dem eine vorgegebene Mindestrendite (von 5%) nicht erreicht wurde.[53] Bimberg betrachtet den Verlust des schlechtesten Jahres als Worst Case. Ähnlich gehen Karsten und Döhnert vor.[54] Bimberg beachtet außerdem noch den Prozentsatz der Jahre mit negativer Aktienrendite[55] von allen Jahren der Geldanlage. Als Risiko wird in der Finanzpraxis oft auch der Anteil der Perioden, in denen die Rendite eines Vermögenswertes unter der Rendite eines alternativen Wertes liegt, bezeichnet.[56] Es wird in dieser Betrachtung nicht nach dem Risiko einer absoluten Renditeentwicklung gefragt, sondern nur noch danach, ob ein Risiko besteht, dass die Rendite der Vermögensklasse, in die man gerne investieren möchte, unter der einer anderen Vermögensklasse liegt, in die man alternativ investieren würde.[57]

Die folgenden Grafiken stellen die beiden 40-jährigen Renditepfade für deutsche Aktien und Renten in verschiedenen Varianten der Worst Case-Betrachtungen dar, die an die Sichtweisen der Literatur angelehnt sind.

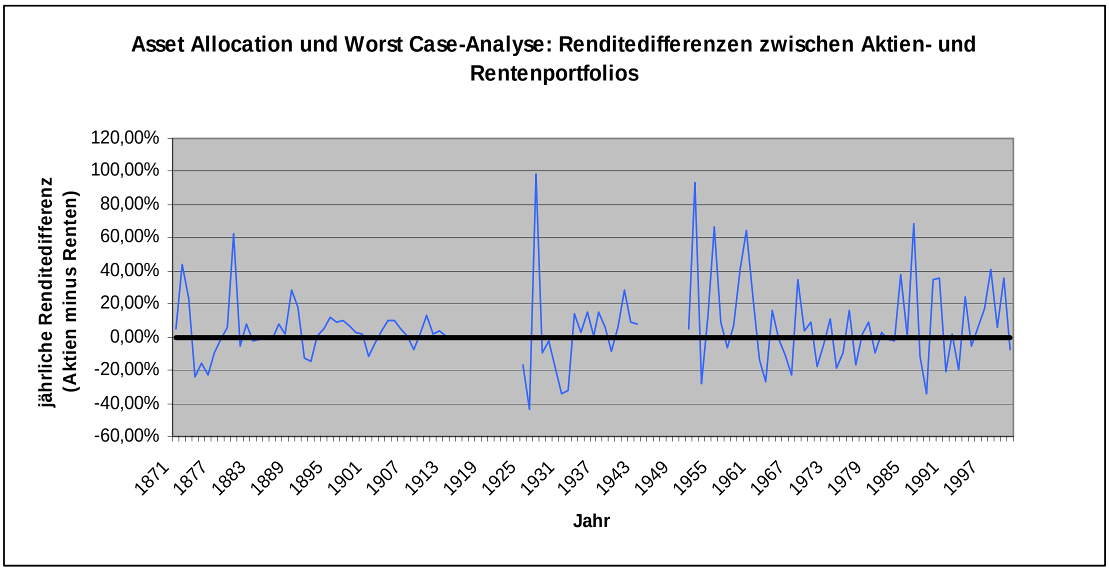
Grafik 6 zeigt für die zwei 40-jährigen Anlageperioden die Vermögensentwicklung in einer Darstellung, in der die Phasen mit Vermögensminderung hervorgehoben sind. Gezeigt werden die Jahre, in denen das Vermögen des Sparplanes mit 1000 € vorschüssiger jährlicher Sparleistung (vgl. Kapitel 3) und Anlage in Aktien die größte Höhe der Vergangenheit nicht wieder erreicht hat. Grafik 6 zeigt, dass es in fast regelmäßigen Abständen zu Phasen rückläufiger Aktienkurse kommt, die das Sparvermögen zeitweilig für eine Reihe von Jahren vermindern. Deutlich zu erkennen ist die größere Zahl von negativen Phasen im zweiten Pfad nach 1950 gegenüber dem ersten Pfad nach 1870. Wir haben angesichts dieser Volatilitätsveränderung nur den Pfad nach 1950 zur Parameterbestimmung der stochastischen Prozesse verwendet.

Grafik 7 zeigt die Differenz zwischen Aktien- und Rentenrenditen über den Gesamtzeitraum als Beispiel für die relative Risikobetrachtung. Die Tendenz zunehmenden Risikos, die in Grafik 6 deutlich geworden ist, wird auch hier sichtbar. In 45 von 108 Jahren liegt die Rendite von Aktienportefeuilles unter der von Renten. Die Volatilität hat nach dem ersten Weltkrieg zugenommen. Die Differenzen zwischen guten und schlechten Jahren sind heftiger geworden.

[49] Vgl. Mazzoni, Weber, Wicki (2001), S.215ff.
[50] Vgl. Weisgerber (2000), S.686.
[51] Vgl. Wiek (1992), S.719.
[52] Vgl. http://www.pictet.com/de/services/research/pictet3/historic.html (4.3.2003).
[53] Vgl. Wiek (1992), S.719.
[54] Vgl. Döhnert, Kunz (2002), S.346.
[55] Vgl. Bimberg (1991), S.136ff.
[56] Vgl. o.V. (1995), S.28.
[57] Vgl. o.V. (1995), S.28; Wiek (1992), S.721ff.; Keller (2000), S.102., beurteilt das Kapitaldeckungsverfahren relativ zum Umlageverfahren.



Grafik 6: Die Grafik zeigt negative Vermögensentwicklungen (in €) von Altersvorsorgesparplänen mit jährlich vorschüssiger Einzahlung von 1000 € und Anlage in Aktien in den nicht überlappenden historischen 40-Jahres-Rendite-Zeitpfaden von 1870-1909 und 1950-1989. Null bedeutet positive Vermögensentwicklung. Eine negative Zahl ist die Abweichung des jeweiligen Vermögenswertes vom höchsten Stand aller vorangegangenen Perioden. Der Wert für 38. Periode (1987) beträgt - 160.000 €
.



Grafik 7: Die Grafik zeigt die Renditedifferenzen von Aktien- und Rentenportfolios im Zeitraum von 1871 bis 2001.

Auf Grafik 5 kann im Zusammenhang mit einer weiteren These zurückgekommen werden. Es wird vertreten, dass die höher rentierliche Aktie auf sehr lange Sicht deshalb nicht riskant sei, weil der kumulierte Renditevorsprung nach einigen Jahren so groß wird, dass die typischen Renditeschwankungen der Aktie den relativen Vorsprung zur Rente nicht mehr gefährden können. Im Sinne der Worst Case-Analyse muss also das Augenmerk auf die Perioden gelegt werden, in denen sich Rangfolgen der Strategien umkehren. Der These zufolge dürften Rangfolgeänderungen nur in den ersten Jahren auftreten.

Wie Grafik 5 zeigt, kommt es jedoch bis zur 30. Periode immer wieder zu Rangfolgeänderungen; erst dann kippt die relative Vorteilhaftigkeit von Strategien nicht mehr um. Eine eindeutige Präferenz zugunsten der Aktie kann nicht ausgemacht werden. Grafik 5 signalisiert, dass auch in sehr langfristiger Anlageperspektive die Rangfolgen von Aktien- und Rentenstrategien nicht eindeutig sind. Nicht nur, dass sich bis zur 30. Periode noch Änderungen zeigen. Es gibt sogar für den deutschen Markt einen Rentenpfad, der selbst über einen Zeitraum von 40 Jahren erfolgreicher ist als ein 40-jähriger Aktienpfad. Die Aussage „Aktien schlagen Renten 100prozentig“ lässt sich insofern nicht einmal für 40-Jahresperioden aufrechterhalten.

Allerdings stammen beide Renditepfade aus verschiedenen Perioden. Man müsste also nun die - fundamentale - Überlegung anschließen, ob man Renditepfade verschiedener Vermögensklassen in verschiedenen Zeiträumen überhaupt vergleichen darf, oder ob es vielleicht einen Zusammenhang der Renditen verschiedener Vermögensklassen eines Zeitraumes gibt, der dieses verbietet. Damit übersteigt man aber die mathematisch-statistische Analyse. Man befindet sich mitten in der dritten oben genannten Prognosemethode mittels analytisch hergeleiteter Renditepfade, die Aussagen mit „100-prozentiger“ Gewissheit in jedem Fall ausschließt.

4 Schlussfolgerungen

Es ist in den letzten Jahren eine Hinwendung zur empirischen Finanzmarktanalyse zu beobachten gewesen. Kaum ein Portfolio wird noch ohne begleitende mathematisch-statistische Berechnungen zusammengestellt. Damit hat man die Portfoliobildung der Willkür des traditionellen Vorgehens entzogen.[58]

Für die Altersvorsorge, bei der Sparer einen großen Teil ihres Vermögens über lange Zeiträume binden, ist es wichtig, fundierte Regeln für die langfristige Vermögensallokation zu haben. Wir fanden in der Literatur und Praxis drei Methoden, mit denen Prognosen - und daraus abgeleitet Allokationsregeln - für lange Fristen angefertigt werden:

- Prognose auf Basis stochastischer Prozessmodelle,
- Prognose auf Basis historischer Renditepfade und
- Prognose mit analytisch hergeleiteten Renditepfaden.

[58] Vgl. hierzu Hielscher (1988), S.21f.

Die beiden ersten Vorgehensweisen stützen sich auf mathematisch-statistische Verfahren.

Analysen auf Basis *stochastischer Prozessmodelle* gelangen nicht zu eindeutigen Entscheidungsregeln für die Vermögensaufteilung bei langfristigen Anlagehorizonten. Der Grund liegt zum Einen darin, dass die geschätzten Endvermögen bei verschiedenen denkbaren Allokationsregeln sehr unterschiedliche Erwartungs- und Streuungswerte aufweisen, derart dass gerade die im Durchschnitt rentabelste Anlage, die Aktie, eine erhebliche Streuung des Vermögensendwertes mit sich bringt, während bei der sichereren Rentenanlage eine geringere Streuung der Endvermögen mit deutlich abgesenkten Gewinnerwartungen erkauft werden muss. Dies macht eine Entscheidung über die Vermögensallokation sehr schwer, denn es kann - überspitzt ausgedrückt - nur zwischen „Übeln“ gewählt werden: Wer die höheren Renditen von Aktien haben will, der muss Risiken in Kauf nehmen, die ihn im Alter u.U. quasi vermögenslos machen können. Wer andererseits Risiken auf jeden Fall vermeiden will, der wird nach Inflation, Steuern und Kosten u.U. auf äußerst geringe Gesamtrenditen kommen.

Das andere, generelle Problem mit stochastischen Prozessmodellen liegt darin, dass die zu erwartenden Endvermögen von den gewählten Prozessparametern und dem gewählten Prozesstyp abhängen, wobei darüber gestritten werden kann, wie Typ und Parameter für die langen Zeiträume von Altersvorsorgesparverträgen überhaupt bestimmt werden können, wenn die Historie nicht mehr als 1 Pfad à 50 Jahren und 1 Pfad à 45 Jahren bereit hält, wobei eine Veränderung in den Pfadeigenschaften im Zeitablauf festzustellen ist hin zu mehr Volatilität in der jüngeren Vergangenheit. Die zukünftige Forschung könnte hier vielleicht versuchen, die Adäquanz des Prozesstyps und die Dimensionierung der Prozessparameter auf der Grundlage fundamental-analytischer Untersuchungen abzusichern.

Bei der Prognose auf Basis historischer Renditepfade macht sich negativ bemerkbar, dass es - derzeit - keine Datengrundlage gibt, statistisch verlässliche Aussagen für Altersvorsorgesparpläne zu erhalten. Allokationsvorschläge von Vermögensverwaltern, die auf Basis historischer Renditepfade generiert wurden, was in den Boomzeiten eine beliebte Methode im Finanzmarketing war, sind in keiner Weise abgesichert. Sie können insofern sogar als Irreführung der Anleger bezeichnet werden, weil sie eine Sicherheit suggerieren, die nicht beweisbar ist. Meist wurden die Empfehlungen nur auf den einen langfristigen Renditepfad der Zeit nach dem zweiten Weltkrieg oder sogar nur auf Teile dieses Pfades gestützt. Wir zeigten, dass sich bereits bei Hinzunahme des zweiten verfügbaren langfristigen Renditepfades aus der Zeit nach 1870 ein ganz anderes Bild ergibt. Dies mag ein Zufall der Geschichte sein, auch zwei Pfade sind genau wie ein Pfad nicht statistisch auswertbar, aber es ist ein Indiz für das Risiko. Die Simulationen mit stochastischen Prozessmodellen zeigten Vermögensendwertrisiken in ähnlicher Größenordnung auf, so dass sich kein grundsätzlicher Widerspruch ergab.

Insgesamt zeigt sich, dass sich Aussagen, wie die der Deutschen Bank *„Aktien schlagen Renten 100-prozentig“* gewiss nicht rechtfertigen lassen. Die Entscheidung zwischen Aktien und Renten ist vielmehr bei einer sehr großen Bandbreite angenommener Parameterkonstellationen eine Entscheidung über den Grad des tolerierten Risikos.

Anhang: Berechnungen zum stetigen Aktiensparen

Wir bezeichnen mit

$$A(\tau) = \frac{Z}{X(\tau)} \qquad (\tau \in [0,40])$$

die Aktienkaufrate zum Zeitpunkt τ (in Jahren) und mit $B := \int_0^{40} A(\tau)\, d\tau$ die Gesamtanzahl der in 40 Jahren gekauften Aktienindexanteile. Dann liefert die Formel

$$V_S = BX(40) = Z \int_0^{40} \frac{X(40)}{X(\tau)}\, d\tau = Z \int_0^{40} Q(\tau)\, d\tau$$

mit

$$Q(\tau) = \exp\Big(\nu_X(40-\tau) + \sigma_X(W_X(40) - W_X(\tau))\Big), \quad \tau \in [0,40],$$

das Endvermögen beim stetigen Aktiensparen. Mit Hilfe der Zufallsgröße

$$I := \int_0^{40} Q(\tau)\, d\tau$$

können wir

$$EV_S = Z\, EI \quad \text{und} \quad D^2 V_S = Z^2\, \big(E(I^2) - (EI)^2\big)$$

schreiben. Da der zufällige Prozess $\widetilde{W}_X(s) = W_X(40) - W_X(40-s)$ für $s \in [0,40]$ wieder ein Standard-Wiener-Prozess ist, gilt

$$\begin{aligned} I = \int_0^{40} Q(\tau) d\tau \;&=\; \int_0^{40} \exp\Big(\nu_X(40-\tau) + \sigma_X(W_X(40) - W_X(\tau))\Big) d\tau \\ &=\; \int_0^{40} \exp\Big(\nu_X s + \sigma_X \widetilde{W}_X(s)\Big) ds, \end{aligned}$$

d.h. I ist ein Integral über eine geometrische Brownsche Bewegung (mit dem Prozess $\widetilde{W}$). Für die Momente derartiger Integrale gilt [59]

$$E\, I \;=\; \frac{1}{\mu_X}\left[e^{40\,\mu_X} - 1\right]$$

und

$$E(I^2) \;=\; \frac{2}{\sigma_X^4}\left[c_0^{(\eta)} + c_1^{(\eta)}\, e^{(\frac{\sigma_X^2}{2}+\nu_X)\,t} + c_2^{(\eta)}\, e^{(2\sigma_X^2+2\nu_X)\,t}\right] \qquad \text{mit} \quad t := 40,\;\; \eta := \frac{\nu_X}{\sigma_X^2}$$

sowie

$$\begin{aligned} c_0^{(\eta)} &:= \frac{1}{(\eta+1)(2\eta+1)}, \\ c_1^{(\eta)} &:= \frac{-4}{(2\eta+1)(2\eta+3)}, \end{aligned}$$

[59] Vgl. Yor (2001), Folgerung 2, S.33.

$$c_2^{(\eta)} := \frac{1}{(\eta+1)(2\eta+3)}.$$

Die Auswertung dieser Vorschriften liefert die Ergebnisse von Zeile 3 in Tabelle 3.

Literatur

Albrecht, P., Maurer, R., Ruckpaul, U. (2001), Shortfall-Risks of Stocks in the Long Run, in: Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 137, 10/2001, Universität Mannheim

Bank, M., Gerke, W. (2000), Spezialfonds als Instrument im Rahmen der betrieblichen Altersversorgung, in: Handbuch Spezialfonds, hrsg. von J.M. Kleeberg und C. Schlenger, Bad Soden, Heft 04, S. 214-229

Baxter, M. W., Rennie, A. (1996), Financial Calculus: An Introductin to Derivative Pricing, Cambridge University Press, Cambridge

Bierbaum, D. (2000), Altersvorsorge: Lebenszyklus-Anlageprogramme für Führungskräfte und Freiberufler, in: Die Bank, Heft 10, S. 668-673

Bimberg, L. (1991), Langfristige Renditeberechnung zur Ermittlung von Risikoprämien, Frankfurt

Breipohl, D. (1994), Die Anlagepolitik eines international tätigen Versicherungsunternehmens, in: W. Gebauer, B. Rudolph (Hrsg.), Aktienmärkte im Finanzsystem, Schriftenreihe des Instituts für Kapitalmarktforschung an der Universität Frankfurt, Frankfurt/M.

Brigo, D., Mercurio, F. (2001), Interest Rate Models - Theory and Practice, Berlin

Cavaleri, O., Planta, R. (1992), Aus der Praxis: „GROI, CLOU und IGLU: Strukturierte Produkte oder Zauberei“ in: Finanzmarkt und Portfolio Management, Nr. 1, S. 118-126

Christopher, S. (1998), Nonlinear Mean Reversion in the Short-Term Interest Rate, Working Paper an der Wharton School, University of Pensylvania, Philadelphia, http://assets.wharton.upenn.edu/~jones13 (5.3.2003)

Cumova, P. (2002), Portfoliooptimierung mit Shortfall-Risikomaßen, Unveröffentlichtes Manuskript, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz

Deutsche Bank (2001), Geldvermögen in Deutschland und Euroland, August

Dichtl, H., Schlenger, C. (2002), Aktien oder Renten? – Die Best of Two-Strategie, in Die Bank, Heft 1, S. 30-35

Döhnert, K., Kunz, R. (2002), Performance internationaler Kapitalanlagen von 1925 bis 2001, in: Die Bank, Heft 5, S. 344-348

Fischer, E., Schuster, M. G. (2002), Indexanleihen mit Kapitalgarantien: Darstellung, Bewertung und Analyse, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Heft 3, S. 243-274

Franke, J., Härdle, W., Hafner, C. (2001), Einführung in die Statistik der Finanzmärkte, Springer-Verlag, Berlin

Hielscher, U. (1988), Ursprünge und Grundgedanken der modernen Portfoliotheorie, in: HVFA (Hrsg.), Beiträge zur Wertpapieranalyse, Heft Nr. 25, S. 19-43

Hull, J. (2001), Optionen, Futures und andere Derivate, 4. Aufl., München u.a.

Junker, M., Schwarz, G. (2000), Simultanes Asset Liability Management: Kompetenz für die Altersvorsorge, in: Versicherungswirtschaft, Heft 18, S. 1410 - 1416; Heft 19, S. 1486-1494

KELLER, CH. (1999), Die Zukunft der gesetzlichen Rentensysteme in der Europäischen Union, Köln

KORN, R., KORN, E. (1999), Optionsbewertung und Portfoliooptimierung, Braunschweig

KWOK, Y.-K. (1998), Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, Singapore

LÖFFLER, G. (2000), Bestimmung von Anlagerisiken bei Aktiensparplänen, in: Die Betriebswirtschaft, Heft 3, S. 350 - 361.

MAZZONI, C., WEBER, M., WICKI, B. (2001), Chancen und Risiken an den Finanzmärkten, in: Financial Markets and Portfolio Management, Volume 15, Nr. 2, S. 212-230

MORAWIETZ, M. (1994), Rentabilität und Risiko deutscher Aktien- und Rentenanlagen seit 1870, Wiesbaden

O.V. (1995), Aktien sind unter langfristigen Gesichtspunkten nicht risikoreicher als Renten, in: FAZ, 12.12.1995, S.28

MUSIELA, M., RUTKOWSKI, M. (1997), Martingale Methods in Financial Modelling, Berlin

SCHMIDT, H., SCHLEEF, M. (2001). Schlägt sich die Prinzipal-Agent-Beziehung zwischen Anlageinstitution und Bank in überhöhten Transaktionskosten nieder?, in: Zfbf, Heft 11, S. 663-689

STEINER, M., BRUNS, C. (1996), Wertpapiermanagement, 5. Aufl., Stuttgart

STEPHAN, T.G., TELÖKEN, K. (1997), Sparplan versus Einmalanlage: Der Cost-Average-Effekt, in: Die Bank, Heft 10, S. 616-619

SYMMANK, R. (1997), Private Altersvorsorge und Investmentfonds – eine internationale Betrachtung, in: Die Bank, Heft 9, S. 530-535

TRACHSLER, J. (2002), Die Wunderwelt des Zinses, in: Die Zeit, Nr. 3, 10.01.2002, S. 25

VASICEK, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, in: Journal of Financial Economics, Vol. 5, S. 177-188

WEISGERBER, T. (2000), Die zehn populärsten Irrtümer bei der Einführung der kapitalgedeckten privaten Altersversorgung, in: Die Bank, Heft 10, S. 686-688

WIEK, E. J. (1992), Lohnt die Aktie das Risiko?, in: Die Bank, Heft 12, S. 718-722

WILKENS, M., SCHOLZ, H., VÖLKER, J. (1999), Bull-, Bear- und Condor-Bonds – Anleihen in Kombination mit Optionen auf Aktien, in: Die Bank, Heft 6, S. 406-411

YOR, M. (2001), Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes, Berlin