

Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

3. Übungsblatt

Aufgabe 11:

- (a) Man zeige, daß die Spaltensummen-Norm $\|A\|_1$ und die Zeilensummen-Norm $\|A\|_\infty$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jeweils die der Vektornorm $\|\cdot\|_p$, $p = 1$ bzw. $p = \infty$, zugeordnete Matrixnorm ist.
(Hinweis: Für $p = 1$ bzw. $p = \infty$ zeige man, daß

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gilt, und daß für mindestens ein $x \in \mathbb{R}^n$ in der Abschätzung jeweils das Gleichheitszeichen angenommen wird.)

- (b) Man zeige folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Wann gilt jeweils Gleichheit?

- (c) Zu einer beliebigen Matrix-Norm gibt es eine Vektor-Norm, so daß die Matrix-Norm mit dieser verträglich ist.

Aufgabe 12:

Die Spaltensummen- und die Frobenius-Norm sind für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

und

$$\|A\|_F := \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}.$$

Man beweise die folgenden Aussagen:

- (a) Die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ ist eine Matrix-Norm und verträglich mit der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$.

(b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_1.$$

(c) Für die Rang-1-Matrix xx^T mit $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\|_2 = 1$ gilt

$$\|A(I - xx^T)\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|Ax\|_2^2.$$

Aufgabe 13:

Zu einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{C}^n ist die zugehörige *Dualnorm* $\|\cdot\|_*$ definiert durch

$$\|y\|_* := \max_{x \neq 0} \frac{|y^H x|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\operatorname{Re} y^H x}{\|x\|}, \quad y \in \mathbb{C}^n.$$

Man zeige:

- (a) Durch obige Definition von $\|\cdot\|_*$ ist tatsächlich eine Norm definiert.
- (b) Die Dualnorm zu $\|\cdot\|_p$ ist durch $\|\cdot\|_q$ mit $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 1$ gegeben.
(Hinweis: Man benutze die Höldersche-Ungleichung.)
- (c) Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$. Für die durch die Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ gilt $\|xy^H\|_M = \|x\| \|y\|_*$.
- (d) Für die von der Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ gilt

$$\|A\|_M = \max_{x, y \neq 0} \frac{\operatorname{Re} y^H Ax}{\|y\|_* \|x\|}$$

für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(Hinweis: Man benutze die Tatsache, dass es zu jedem $x \in \mathbb{C}^n$ einen *dualen* Vektor $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z^H x = \|z\|_* \|x\|$ gibt.)

Aufgabe 14:

Auf einem (komplexen) Vektorraum \mathcal{V} sei ein Innenprodukt (Skalarprodukt) $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ erklärt. Bekanntlich ist dann durch

$$\|v\| := \sqrt{(v, v)}, \quad v \in \mathcal{V}$$

eine Norm, nämlich die durch das Innenprodukt induzierte Norm, auf \mathcal{V} definiert. Man zeige:

- (a) Für jede durch ein Innenprodukt induzierte Norm gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2), \quad v, w \in \mathcal{V}$$

sowie die *Polarengleichung*

$$\operatorname{Re}(v, w) = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) \quad v, w \in \mathcal{V}.$$

- (b) Die 1-Norm im \mathbb{C}^n , $\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$, erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung, ist also von keinem Innenprodukt induziert.
- (c) Zeigen sie, dass in einem reellen Vektorraum zu einer Vektornorm, die die *Parallelogrammgleichung* erfüllt, ein Innenprodukt existiert, dass diese Norm induziert.
(Hinweis: Benutzen sie die *Polarengleichung* um einen passenden Kandidaten zu definieren und zeigen sie alle notwendigen Eigenschaften)