TU Chemnitz
Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

5. Februar 2014

Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

9. Übungsblatt

Aufgabe 35:

Die (reduzierte) QR-Faktorisierung einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ kann außer durch Householder-Reflektionen oder Givens-Rotationen auch mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens, angewandt auf die Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ von A, berechnet werden.
Es ergibt sich folgender Algorithmus:

for $j = 1 : n$
  $\tilde{\boldsymbol{q}}_j := \boldsymbol{a}_j$
  for $k = 1 : j-1$
    $r_{kj} := \boldsymbol{q}_k^H \boldsymbol{a}_j$
    $\tilde{\boldsymbol{q}}_j := \tilde{\boldsymbol{q}}_j - r_{kj}\boldsymbol{q}_k$
  end
  $r_{jj} := \|\tilde{\boldsymbol{q}}_j\|_2$
  $\boldsymbol{q}_j := \tilde{\boldsymbol{q}}_j / r_{jj}$
end

Es stellt sich allerdings heraus, dass dieses Verfahren numerisch nicht sehr stabil ist, was sich in raschem Verlust an Orthogonalität infolge von Rundungsfehlern bemerkbar macht. Man benutzt daher folgende (mathematisch äquivalente) Umformulierung (sog. modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren):

for $j = 1 : n$
  $\tilde{\boldsymbol{q}}_j := \boldsymbol{a}_j$
end
for $j = 1 : n$
  $r_{jj} := \|\tilde{\boldsymbol{q}}_j\|_2$
  $\boldsymbol{q}_j := \tilde{\boldsymbol{q}}_j / r_{jj}$
  for $k = j+1 : n$
    $r_{jk} := \boldsymbol{q}_j^H \tilde{\boldsymbol{q}}_k$
    $\tilde{\boldsymbol{q}}_k := \tilde{\boldsymbol{q}}_k - r_{jk}\boldsymbol{q}_j$
  end
end

a) Mit den durch $P_i := \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^H$ definierten Orthogonalprojektionen zeige man die Identität

$$(I - P_j)(I - P_{j-1}) \cdots (I - P_1) = I - P_j - P_{j-1} - \cdots - P_1.$$

Verifizieren Sie, dass das klassische Gram-Schmidt-Verfahren den Operationen

$$r_{jj}\boldsymbol{q}_j := (I - P_{j-1} - P_{j-2} - \cdots - P_1)\boldsymbol{a}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

entspricht, das modifizierte Verfahren hingegen

$$r_{jj}\boldsymbol{q}_j := (I - P_{j-1})(I - P_{j-2}) \cdots (I - P_1)\boldsymbol{a}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

b) Wieviele Gleitpunkoperationen benötigen die beiden Verfahren?

c) Schreiben Sie MATLAB-Funktionen `[Q,R] = gs(A)` bzw. `[Q,R] = mgs(A)`, welche eine reduzierte QR-Faktorisierung von A mit dem Gram-Schmidt- bzw. dem modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren berechnen.

d) Verwenden Sie beide Algorithmen zur Berechnung der QR-Zerlegung folgender Testmatrix $A = USV^\top$: U und V seien zwei zufällig gewählte orthogonale $N \times N$-Matrizen (etwa `[U,X]=qr(randn(N))` oder Householder-Matrizen mit zufälligem Householder-Vektor) und $S = \text{diag}(2^{-1}, 2^{-2} \ldots, 2^{-N})$ für $N = 80$. Plotten Sie (logarithmisch) die Diagonalelemente des jeweiligen R-Faktors. Was beobachten Sie und wie erklären Sie diese Beobachtung?

e) Schreiben Sie schließlich zwei weitere MATLAB-Funktionen `[Q,R]=hqr(A)` und `[Q,R]=gqr(A)`, welche zur QR-Faktorisierung von A Householder-Reflektionen bzw. Givens-Rotationen benutzen. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus (d).

Aufgabe 36:

Bestimmen Sie die Eigenwerte einer Householder-Matrix und einer Givens-Matrix.

Aufgabe 37:

Bekanntlich ist durch $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_C = \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{y}$ genau dann ein Innenprodukt definiert ist, wenn C eine symmetrisch positiv definite Matrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass für die durch $(.,.)_C$ induzierte Norm $\|.\|_C$ gilt:

$$\|\boldsymbol{x}\|_C = \|C^{1/2}\boldsymbol{x}\|_2$$

(b) Leiten Sie die (Normalen-)Gleichungen her, die für die Lösung des (gewichteten) Ausgleichsproblems

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_C \to \min$$

mit einer Matrix A mit vollem Rang gelten müssen.

(Hinweis: Lösen Sie das Minimierungsproblem $F(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_C^2 \to \min$)

Aufgabe 38:

Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ sei das quadratische Tichonov-Funktional gegeben durch

$$T_\alpha(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2^2 + \alpha\|\boldsymbol{x}\|_2^2\,,\ \alpha > 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Man zeige:

(a) Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$T_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha) \leq T_\alpha(\boldsymbol{x}) \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

(b) $\boldsymbol{x}_\alpha$ erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$(A^\top A + \alpha I)\boldsymbol{x}_\alpha = A^\top \boldsymbol{b}\,.$$

(c) Ist $A^\dagger$ die Pseudoinverse von A, so gilt

$$\lim_{\alpha \to 0} \boldsymbol{x}_\alpha = A^\dagger \boldsymbol{b}\,.$$