# Anwendungen der Optionspreistheorie



## ① Black-Scholes-Modell

- Aktien ohne Dividenden

Option auf Kauf der Aktie zum Strikepreis

$$\boxed{P_{call} = P_0 \cdot N(d_1) - S \cdot e^{-i \cdot T} \cdot N(d_2)}$$

mit $d_1 = \dfrac{\ln \frac{P_0}{S} + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$,

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

$P_0$ - aktueller Aktienkurs

$S$ - Strikepreis

$T$ - Restlaufzeit der Option

$i$ - risikofreie Zinsintensität

$\sigma^2$ - Varianz der logarithmischen Rendite

$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy$

Schätzung von $i$ und $\sigma^2$:

$i = \ln(1 + \underbrace{i_a}_{\text{Jahreszins}}) \Leftrightarrow e^i = 1 + i_a$ (stetige Verzinsung)

$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left( \ln \frac{P_j}{P_{j-1}} - \mu_j \right)^2$, wobei $\mu_j := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{P_j}{P_{j-1}}$

Schätzer für die Aktienpreise $P_1, \dots, P_n$ aus der Statistik

$P_{put} = \dots ?$

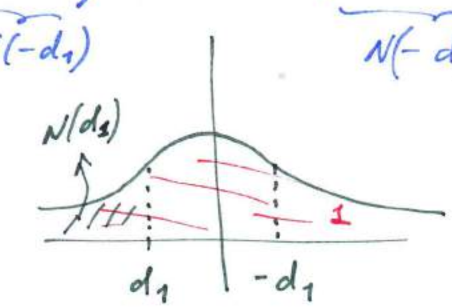
Option auf Verkauf der Aktie zum Strikepreis

Äquivalenzprinzip zum Zeitpunkt 0: $\underbrace{P_{call} + e^{-i \cdot T} S}_{\text{Ausgaben des Optionskäufers}} = \underbrace{P_{put} + P_0}_{\text{Ausgaben des Optionsverkäufers}}$

"Put-Call-Parität"

$\Rightarrow P_{put} = P_{call} + e^{-i \cdot T} S - P_0 = P_0 \underbrace{(N(d_1) - 1)}_{-N(-d_1)} + S e^{-i \cdot T} \underbrace{(1 - N(d_2))}_{N(-d_2)}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{put} = S \cdot e^{-i \cdot T} N(-d_2) - P_0 \cdot N(-d_1)}$$



## ② Merton-Modell

- Aktien mit Dividenden

Dividendenanteil

$i_d$ - sichere Dividendenrendite $\longrightarrow P_0 := P_0^d \cdot e^{-i_d \cdot T}$

abgeleitete Aktie ohne Dividenden

Kurs der Aktie mit Dividenden

Black-Scholes mit $P_0$ $\Rightarrow$ $$d_1 = \frac{\ln \frac{P_0^d \cdot e^{-i_d \cdot T}}{S} + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = \frac{\ln \frac{P_0^d}{S} + \left(i - i_d + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$\boxed{P_{call}^d = P_0^d \cdot e^{-i_d \cdot T} \cdot N(d_1) - S \cdot e^{-i \cdot T} \cdot N(d_2)}$$

## ③ Garman-Kohlhagen-Modell

- Devisenoptionen - Recht, ausländische Devisen (Währung) zu einem bestimmten Termin zu kaufen bzw. zu verkaufen.

$i_w$ - risikofreier ausländischer Zins "Dividende als Anlage in ausländisches Währung"

Merton mit $P_0 = P_0^w \cdot e^{-i_w \cdot T}$ $\Rightarrow$ $$\boxed{P_{call}^w = P_0^w \cdot e^{-i_w \cdot T} N(d_1) - S \cdot e^{-i \cdot T} \cdot N(d_2),}$$

Kassakurs der ausländischen Währung

wobei $$d_1 = \frac{\ln P_0^w + \left(i - i_w + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$T$ - Devisentermin

$\sigma^2$ - Varianz der logarithmischen Wechselkursänderungen

## (4) Black-Modell:

Abzinsung auf Termin $T$ (Restlaufzeit der Option)

- Anleihen $\longrightarrow$ $P_0 := P_T \cdot e^{-i \cdot T}$

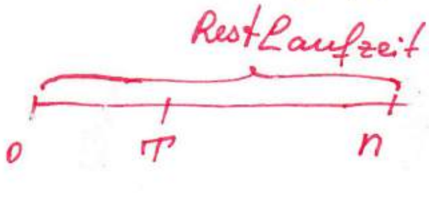
$\uparrow$ Terminkurs der Anleihe (stochastische Variable)

Black-Scholes:

$$\Rightarrow \boxed{P_{call} = P_T \cdot e^{-i \cdot T} N(d_1) - S \cdot e^{-i \cdot T} N(d_2)}, \text{ wobei}$$

Varianz der Terminkurse

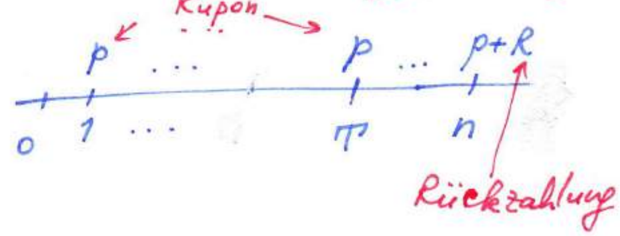
$$d_1 = \frac{\ln \frac{P_T \cdot e^{-i \cdot T}}{S} + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = \frac{\ln \frac{P_T}{S} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$




ist begrenzt (vgl. Aktie)
$\Rightarrow$ "Volatilität sinkt für $T \to n$,
da Auszahlung bekannt ist"
(vgl. Black-Scholes: konstante Volatilität)

$\sigma^2$ – Varianz des Terminkurses

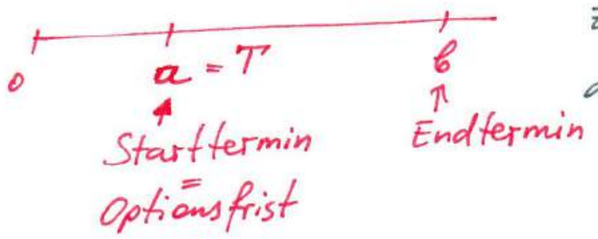
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fairer Terminkurs}}}{P_T} = \underbrace{\left(p \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + R\right)}_{\substack{\text{nachschüssige Rente von } p \\ q = 1 + i_a}} \cdot \underbrace{e^{-i(n-T)}}_{\text{Abzinsung auf Termin } T}$$




- Cap-Option – Recht, die Differenz zwischen dem "Cap" ($i_{cap}$) (Zinsobergrenze) und einem Referenzzinssatz ($i_{ref}$) bezogen auf Nominal "N" zu erhalten zum Endtermin "b" ab Starttermin "a"

$\boxed{\begin{array}{l} i_{ref} > i_{cap} \\ \Rightarrow \text{Zahlung} \end{array}}$

stochastische Variable $\rightarrow$ Referenzzinssatz



$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Preis zum}\\ \text{Zeitpunkt 0}}}{P_0} = \overset{\text{Abzinsung auf 0}}{e^{-i\cdot a}}\,\underbrace{N(b-a)\cdot i_{ref}}_{\substack{\text{Zahlung zum}\\ \text{Endtermin } b\\ \text{an den}\\ \text{Käufer}\\ \text{der Option}}}\cdot \underbrace{e^{-i\cdot(b-a)}}_{\substack{\text{Abzinsung}\\ \text{auf}\\ \text{Start-}\\ \text{termin } a}}, \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Strike}\\ \text{zum Start-}\\ \text{termin } a=T}}{S} = \underbrace{N(b-a)\cdot i_{cap}}_{\substack{\text{Zahlung zum}\\ \text{Endtermin } b\\ \text{vom Käufer}\\ \text{der Option}}}\cdot e^{-i(b-a)}$$

Black-Scholes:

$$\Rightarrow P_{call} = \underbrace{e^{-i\cdot a}\cdot N(b-a)\cdot i_{ref}\cdot e^{-i\cdot(b-a)}}_{P_0}\cdot N(d_1) - e^{-i\cdot a}\,\underbrace{N(b-a)\cdot i_{cap}\cdot e^{-i(b-a)}}_{S}\cdot N(d_2)$$

$$\boxed{P_{call} = N(b-a)\cdot e^{-i\cdot b}\left(i_{ref}\cdot N(d_1) - i_{cap}\cdot N(d_2)\right),}$$

$$\text{wobei}\quad d_1 = \frac{\ln\frac{P_0}{S} + \left(i+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\cdot\sqrt{T}} \underset{T=a}{=} \frac{\ln\frac{i_{ref}}{i_{cap}} + \frac{\sigma^2}{2}\cdot a}{\sigma\cdot\sqrt{a}}.$$

$\sigma^2$ - Varianz des Referenzzinssatzes

$$i_{ref} = \underbrace{f_{a,b}}_{\text{Forward-Rate}} \quad \left(= \sqrt[b-a]{\frac{d_a}{d_b}} - 1\,,\ \text{wobei}\ \overset{\substack{\text{Diskontierungs-}\\ \text{faktor}\\ \swarrow}}{d_t} = \frac{1}{(1+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Spot-Rates}}}{S_t})^t}\right)$$

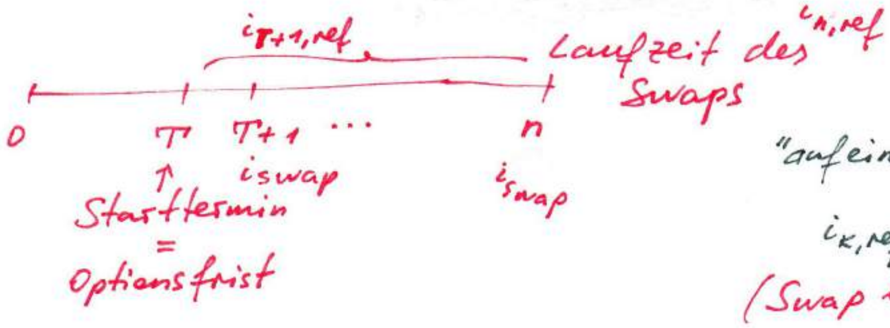
- Floor - Option - Recht, die Differenz zwischen dem Floor "$i_{floor}$" (Zinsuntergrenze) und einem Referenzzinssatz "$i_{ref}$" bezogen auf Nominal zu erhalten zum Endtermin "$b$" ab Starttermin "$a$" $\boxed{i_{ref} < i_{floor} \Rightarrow \text{Zahlung}}$

$$\boxed{P_{call} = N(b-a)\cdot e^{-i\cdot b}\cdot\left(i_{floor}\cdot N(-d_2) - i_{ref}\cdot N(-d_1)\right)},$$

$$\text{wobei}\quad d_1 = \frac{\ln\frac{i_{ref}}{i_{floor}} + \frac{\sigma^2}{2}\cdot a}{\sigma\cdot\sqrt{a}} \quad (\text{vgl. Call-Put-Parität})$$

• Swaptions – Recht, die Zinsendifferenz zwischen dem Swap-Rate "$i_{swap}$" (Festzins) und dem Referenzzinssatz $i_{k,ref}$ bezogen auf Nominal zu erhalten zu den Terminen $k = T+1, \dots, n$






"aufeinander folgende Caps, d.h. $i_{k,ref} > i_{swap} \Rightarrow$ Ausübung der Option & Zahlung"
(Swap lohnt sich)

Black für Swaps:

$$P_{call} = N \cdot \sum_{k=T+1}^{n} \overbrace{d_k}^{\text{Abzinsung auf } 0} \left( i_{k,ref} \cdot N(d_1) - i_{swap} \cdot N(d_2) \right) =$$

fairer Swap-Rate aus Barwertvergleich

$$\text{Aber:} \quad \sum_{k=T+1}^{n} i_{k,ref} \cdot d_k = i_f \cdot \sum_{k=T+1}^{n} d_k$$

$$\left[ \; i_{k,ref} = f_{k-1,k} \Rightarrow \dots \Rightarrow i_f = d_{T+1} - d_n \Big/ \sum_{k=T+1}^{n} d_k \; , \text{ wobei } d_k = \frac{1}{(1+s_k)^k} \; \right]$$

Forward-Rates $= \dfrac{d_{k-1} - d_k}{d_k}$ ; Spot-Rates $s_k$

$$\boxed{P_{call} = N \cdot \sum_{k=T+1}^{n} d_k \cdot \left( i_f \cdot N(d_1) - i_{swap} \cdot N(d_2) \right)}$$

$$\text{wobei} \quad d_1 = \frac{\ln \frac{i_f}{i_{swap}} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$\sigma^2$ – Varianz des Swap-Rates.