Gleichgewichtsanalyse nach Marshall, 1919

Frage: wie entsteht der Gleichgewichtspreis, so daß Nachfrage und Angebot übereinstimmen?

In $\mathbb{R}^1$:

① Produzent k maximiert Profit:

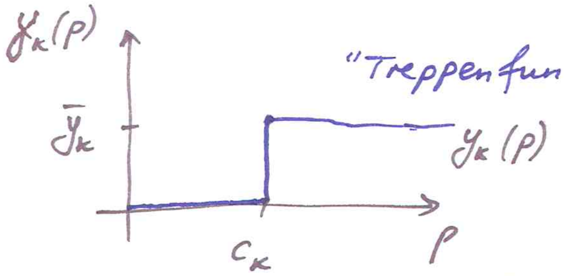
$$\max_{y_k \in [0, \bar{y}_k]} (p - c_k)\, y_k \quad \xrightarrow{\text{optimal}} \quad y_k(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < c_k \\ [0, \bar{y}_k] & \text{falls } p = c_k \\ \bar{y}_k & \text{falls } p > c_k \end{cases}$$

Produktion

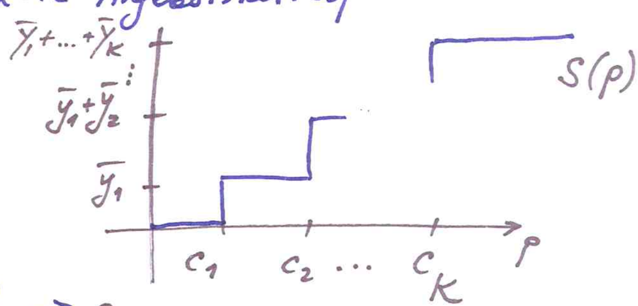
Preis

Stückkosten

Produktionsschranke



k-te Angebotskorrespondenz



Aggregation

$$S(p) := \sum_{k=1}^{K} y_k(p) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{k-1} \bar{y}_\ell, & c_{k-1} < p < c_k \\ \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} \bar{y}_\ell, \sum_{\ell=1}^{k} \bar{y}_\ell\right], & p = c_k, \; k = 1, \dots, K \\ \sum_{\ell=1}^{K} \bar{y}_\ell, & p > c_K \end{cases}$$

Gesamtangebot

Anzahl von Produzenten

② Konsument i entscheidet, ob Standard σ_i bezahlbar ist:

$$x_i(p) = \begin{cases} \sigma_i & \text{falls } p \cdot \sigma_i < w_i \\ [0, \sigma_i] & \text{falls } p \cdot \sigma_i = w_i \\ 0 & \text{falls } p \cdot \sigma_i > w_i \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow p < \frac{w_i}{\sigma_i} \\ &\Leftrightarrow p = \frac{w_i}{\sigma_i} \\ &\Leftrightarrow p > \frac{w_i}{\sigma_i} \end{aligned}$$

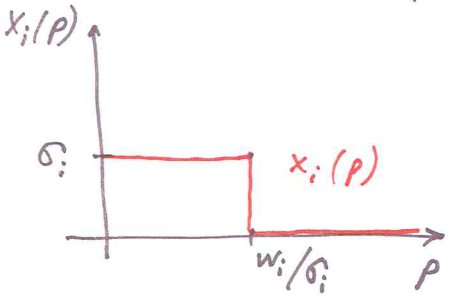
Ausgaben

Budget

Preis

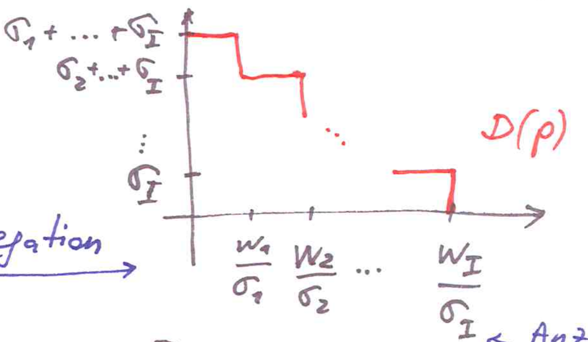
Standard

i-te Reservierungpreis



Reservierungspreis

Aggregation



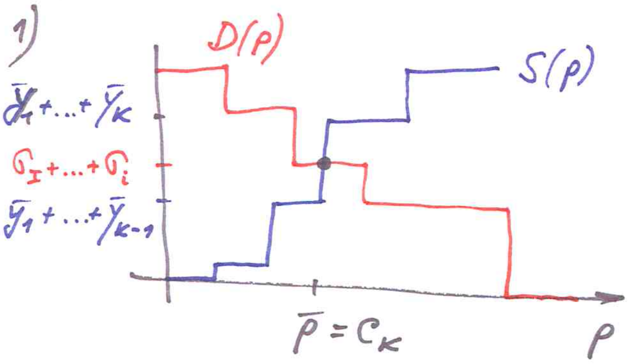
Anzahl von Konsum

$$D(p) := \sum_{i=1}^{I} x_i(p) = \begin{cases} \sum_{j=i}^{I} \sigma_j, & w_{i-1}/\sigma_{i-1} < p < w_i/\sigma_i \\ \left[\sum_{j=i+1}^{I} \sigma_j, \sum_{j=i}^{I} \sigma_j\right], & p = w_i/\sigma_i, \; i = 1, \dots, I \\ 0, & p > w_I/\sigma_I \end{cases}$$

Gleichgewichtspreis

$\bar p$ mit $S(\bar p) = D(\bar p)$ "Angebot = Nachfrage"

1)



Produzent	1	…	K-1	K	K+1	…
Produktion	$\bar y_1$	…	$\bar y_{K-1}$	$\tau_K \cdot \bar y_K$	0	0
Profit	$(c_K-c_1)\bar y_1$	…	$(c_K-c_{K-1})\bar y_{K-1}$	0	0	0

"pleite"

$\tau_K \in [0,1]$ Marginaler Produzent

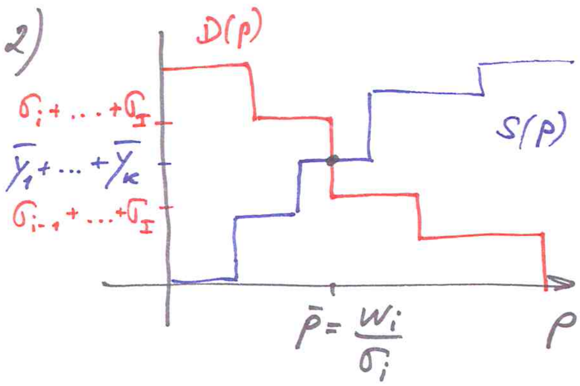
- kein Profit
- keine Vollauslastung

Markträumung: $\underbrace{\sigma_i+\dots+\sigma_I}_{D(\bar p)} = \underbrace{\bar y_1+\dots+\bar y_{K-1}+\overset{\text{Marginal}}{\boxed{\tau_K \bar y_K}}}_{S(\bar p)}$

Konsument	1	…	i-1	i	…	I
Konsum	0		0	σ_i		σ_I
Ersparnis	0		0	$w_i - c_K \cdot \sigma_i$		$w_I - c_K \cdot \sigma_I$

"ausgehungert"

2)



Produzent	1	…	K	K+1	…	K
Produktion	$\bar y_1$	…	$\bar y_K$	0	…	0
Profit	$\left(\frac{w_i}{\sigma_i}-c_1\right)\bar y_1$	…	$\left(\frac{w_i}{\sigma_i}-c_K\right)\bar y_K$	0	…	0

"pleite"

Konsument	1	…	i-1	i	i+1	…	I
Konsum	0		0	$\omega_i \sigma_i$	σ_{i+1}		σ_I
Ersparnis	0		0	0	$w_{i+1} - \frac{w_i}{\sigma_i}\sigma_{i+1}$		$w_I - \frac{w_i}{\sigma_i} \cdot \sigma_I$

Markträumung: $\bar y_1+\dots+\bar y_K = \underbrace{\boxed{\omega_i \sigma_i}}_{\text{Marginal}}+\sigma_{i+1}+\dots+\sigma_I$

"ausgehungert"

$\omega_i \in [0,1]$ Marginaler Konsument

- kein Ersparnis
- kein Vollkonsum

Fazit:

"Armut"

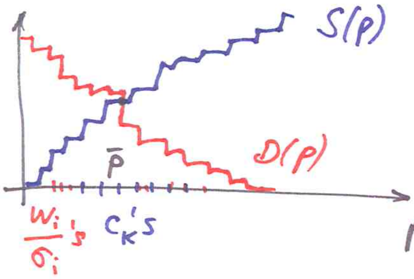
- marginale Produzenten/Konsumenten tragen entscheidend zur Markträumung bei
- sie hoffen, daß bei verändertem Preis sie profitabel werden
- sie wissen nicht von vorne rein, daß sie marginal sind, daher bleiben sie auf dem Markt
- bankrotte Produzenten/Konsumenten verlassen den Markt in langfristiger Perspektive.

"Insolvenz" "Emigration"

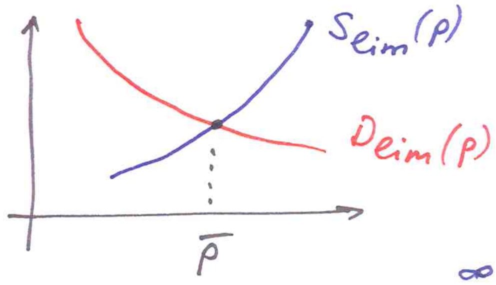
Integriertes Gleichgewichtsmodell

$K \to \infty$ und $I \to \infty$

- Anzahl von Produzenten/Konsumenten wächst.
- Einfluß von einzelnen Produzenten/Konsumenten fällt.



Integration $\xrightarrow{\quad}$
$K \to \infty$
$I \to \infty$
"Glättung"



$$S(p) \longrightarrow S_{lim}(p) = \int_0^p y(s)\,ds \;,\quad D(p) \longrightarrow D_{lim}(p) = \int_p^\infty x(s)\,ds$$

$S_{lim}(p)$: Gesamtangebot zum Preis p

$y(s)$: Zuwachs des Gesamtangebotes zum Preis s

$D_{lim}(p)$: Gesamtnachfrage zum Preis p

$x(s)$: Zuwachs der Gesamtnachfrage zum Preis s

Dazu:

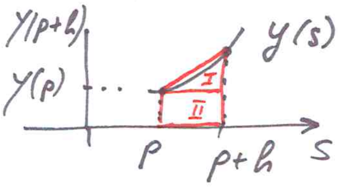
$$\frac{S_{lim}(p+h) - S_{lim}(p)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^{p+h} y(s)\,ds - \int_0^p y(s)\,ds\right] =$$

0   p   p+h

Differenzenquotient

$$= \frac{1}{h}\cdot \underbrace{\int_p^{p+h} y(s)\,ds}_{\text{Fläche unter dem Graphen von } y} \approx \frac{1}{h}\left[\text{Fläche}_I + \text{Fläche}_{II}\right]$$

$h \to 0$



$\text{Fläche}_I = \frac{[y(p+h) - y(p)]\cdot h}{2}$

$\text{Fläche}_{II} = y(p)\cdot h$

Ableitung

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\left(\frac{(y(p+h) - y(p))\cdot \cancel{h}}{2} + y(p)\cdot \cancel{h}\right)$$

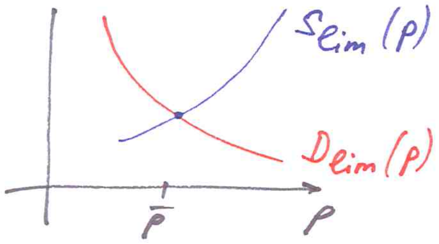
$\downarrow h \to 0$

0

$$S_{lim}'(p) = y(p)$$ Zuwachs des Gesamtangebotes zum Preis p.

Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung: $\int_a^b f(s)\,ds = F(b) - F(a)$, wobei $F'(x) = f(x)$

Preisanpassung = Tâtonnement



Wie findet man $\bar{p}$ mit $S_{eim}(\bar{p}) = D_{eim}(\bar{p})$

Potential (wie in der Physik)

$$\Pi(p) := \underbrace{\int_0^p S_{eim}(t)\,dt}_{\text{Profit von Produzenten}} + \underbrace{\int_p^\infty D_{eim}(t)\,dt}_{\text{Ersparnis von Konsumenten}} \longrightarrow \min_p \;!$$

- $\Pi(p)$ – konvex, da

$$\Pi'(p) = S_{eim}(p) - \underbrace{D_{eim}(0)}_{=0} - \Big(D_{eim}(p) - \underbrace{D_{eim}(\infty)}_{=0}\Big)$$

$$\Pi''(p) = S'_{eim}(p) - D'_{eim}(p) = \underbrace{y(p)}_{\geq 0} - \underbrace{y(0)}_{=0} + \underbrace{x(p)}_{\geq 0} - \underbrace{x(\infty)}_{=0} \geq 0.$$

"Krümmung positiv"

- Hinreichend und notwendig:

$$0 < \bar{p} \text{ löst } \min_p \Pi(p) \text{ iff } \Pi'(\bar{p}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$S_{eim}(\bar{p}) - D_{eim}(\bar{p}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$S_{eim}(\bar{p}) = D_{eim}(\bar{p})$$

Fazit: Gleichgewichtspreis kann mittels Optimierung gefunden werden!

"invisible Hand of Adam Smith"