Portfoliooptimierung nach Markovitz, 1959

Frage: welche Assets soll man kaufen, um Risiko zu minimieren und gute Rendite zu bekommen?

Risikomaß!

R^i : $\underbrace{r_1^i, \dots, r_{n_i}^i}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, I$

Rendite des i-ten Assets — Messdaten zur i-ten Rendite — Anzahl von Messdaten — Anzahl von Assets

$$\mu^i := \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} r_k^i$$ – Mittelwert / Erwartungswert $= E(R^i)$ (hier: Daten gleichverteilt)

$$(\sigma^i)^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (r_k^i - \mu^i)^2$$ – Varianz / Streuungsmaß $= E(|R^i - E(R^i)|^2)$

Standardabweichung

$$(\sigma^i)^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (r_k^i)^2 - 2 r_k^i \mu^i + (\mu^i)^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (r_k^i)^2 - 2 \cdot \mu^i \cdot \underbrace{\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} r_k^i}_{\mu^i} + \cancel{\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i}} (\mu^i)^2 =$$

$$= \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (r_k^i)^2 - \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n} r_k^i \right)^2 .$$

Betrachte $R(x) := \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot R^i$, wobei $x_1 + \dots + x_I = 1$

Gesamtrendite — Anteil der i-ten Rendite — Portfolio $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_I \end{pmatrix}$ — kaufen $x_i > 0$, verkaufen $x_i < 0$

Mittelwert von $R(x)$:

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot \mu^i,$$ da Mittelwert linear ist $= E(R(x))$

Varianz von $R(x)$:

$$\sigma^2(x) = E\left(\left| \sum_{i=1}^{I} x_i R^i - E(R(x)) \right|^2 \right) = E\left(\left| \sum_{i=1}^{I} x_i (R^i - \mu^i) \right|^2 \right) =$$

$$= E\left(\left[\sum_{i=1}^{I} x_i (R^i - \mu^i) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{I} x_j (R^j - \mu^j) \right] \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{I} x_i \cdot x_j \cdot \underbrace{E\left((R^i - \mu^i)(R^j - \mu^j) \right)}_{=: \sigma_{ij}}$$ – Kovarianz von R^i und R^j

$$= x^T \cdot \Sigma \cdot x,$$ wobei $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{I}$ – Kovarianzmatrix

Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{I}$.

- $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, d.h. $\Sigma^T = \Sigma$ symmetrisch
- $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$
- $x^T \cdot \Sigma \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, d.h. Σ - positiv semidefinit

$\Rightarrow$ $\sigma^2(x) = x^T \Sigma x$ ist konvex, d.h. Krümmung positiv, denn:

$$\nabla[\sigma^2(x)] = \frac{1}{2}\Sigma \cdot x, \quad \nabla^2[\sigma^2(x)] = \frac{1}{2}\Sigma \succeq 0.$$

Gradient Hessematrix

Interpretation: $\sigma_{ij} = E\left((R^i - \mu^i)(R^j - \mu^j)\right)$

> 0 monotoner Zusammenhang: hohe Werte von R^i gehen mit hohen Werten von R^j einher. (analog "niedrig")

< 0 gegensinniges Zusammenhang: hohe Werte von R^i gehen mit niedrigen Werten von R^j einher (analog: niedrig/hoch)

- $\sigma_{ij} \leq \sigma_i \cdot \sigma_j$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Ü

Diversifikationseffekt:

$$\sigma^2(x) = \sum_{i,j=1}^{I} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \leq \sum_{i,j=1}^{I} |x_i| \cdot |x_j| \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = \left(\sum_{i=1}^{I} |x_i| \cdot \sigma_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{I} |x_j| \cdot \sigma_j\right) =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{I} |x_i| \cdot \sigma_i\right]^2 \Rightarrow \sigma(x) \leq \sum_{i=1}^{I} |x_i| \cdot \sigma_i$$

Standardabweichungen von $R(x)$ von R^i

Risiko sinkt bei der Portfoliostreuung

Markowitz: Minimiere Varianz / Standardabweichung, so daß gewisser Mittelwert der Rendite gewährleistet wird.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^I} \sigma^2(x) = x^T \Sigma \cdot x \quad \text{(Varianz)}$$

(Renditerestriktion)

$$\text{s.d.} \quad \mu(x) = r \iff \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot \mu^i = r$$

Parameter $\iff \mu^T x = r$

(Budgetrestriktion) $\sum_{i=1}^{I} x_i = 1$

$\iff e^T x = 1$

$\left(e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Einheitsvektor

Portfoliooptimierung

$$\min_{x\in\mathbb{R}^I} \tfrac{1}{2} x^T\cdot\Sigma\cdot x \quad \text{s.t.} \quad \mu^T\cdot x = r \;,\; e^T\cdot x = 1$$

Lagrange-Multiplikatoren

Lagrange-Ansatz: $\left\{\begin{aligned} \Sigma\cdot x - \alpha\cdot\mu - \beta\cdot e &= 0 \\ \mu^T\cdot x - r &= 0 \\ e^T\cdot x - 1 &= 0 \end{aligned}\right.$ – löse bzgl. (x,α,β)

Annahme 1: ü
Σ-invertierbar

$$\Leftrightarrow x = \alpha\,\Sigma^{-1}\mu + \beta\cdot\Sigma^{-1}e \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha\cdot\overbrace{\mu^T\Sigma^{-1}\mu}^{=:a} + \beta\cdot\overbrace{\mu^T\Sigma^{-1}e}^{=:b} &= r \\ \alpha\cdot\underbrace{e^T\Sigma^{-1}\mu}_{=b} + \beta\,\underbrace{e^T\Sigma^{-1}e}_{c} &= 1 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ 1\end{pmatrix}\right.$$

Annahme 2: ü
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist invertierbar → Determinante

$$\Rightarrow \alpha = \frac{c\cdot r - b}{ac-b^2} \;,\; \beta = \frac{a - r\cdot b}{ac-b^2} \;,\; x = \frac{c\cdot r - b}{ac-b^2}\cdot\Sigma^{-1}\mu + \frac{a-r\cdot b}{ac-b^2}\,\Sigma^{-1}e$$

$$\Rightarrow x_{\text{optimal}} = \underbrace{\frac{a\cdot\Sigma^{-1}e - b\cdot\Sigma^{-1}\mu}{ac-b^2}}_{\text{Portfolio } g\in\mathbb{R}^I} + \underbrace{\frac{c\cdot\Sigma^{-1}\mu - b\cdot\Sigma^{-1}e}{ac-b^2}}_{\text{Portfolio } h\in\mathbb{R}^I}\cdot r = g + h\cdot r$$

Two fund theorem!

Optimales Portfolio lässt sich aus zwei speziellen Portfolios g und h linear kombinieren.

↪ $\{x = g + h\cdot r \,/\, r\geq 0\}$ – Portfolio Frontier

Varianz auf dem Portfolio Frontier:

$$\tfrac{1}{2}x^T\cdot\Sigma\cdot x = \tfrac{1}{2}(g+h\cdot r)^T\Sigma\cdot(g+h\cdot r) = \tfrac{1}{2}\left(g^T\Sigma\cdot g + 2r\cdot h^T\Sigma\cdot g + r^2 h^T\Sigma\cdot h\right)$$

↓ minimiere bzgl. r "Frontier Portfolio mit kleinster Varianz"

$$2h^T\Sigma\cdot g + 2r\,h^T\Sigma\cdot h = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{h^T\Sigma\cdot g}{h^T\Sigma\cdot h} \Rightarrow x = g - \frac{h^T\Sigma\cdot g}{h^T\Sigma\cdot h}\cdot h$$