

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 2: Discrete Choice nach Luce

Betrachte das Logit-Modell für Discrete Choice mit Auswahlwahrscheinlichkeiten

$$p_i := \frac{\exp\left(\frac{w_i}{\mu}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{w_i}{\mu}\right)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $w_i \geq 0$ den wahrgenommenen Nutzen der Alternative $i \in \{1, \dots, n\}$, und $\mu > 0$ einen Parameter bezeichnen.

1) Berechnen Sie die Logit-Wahrscheinlichkeiten für $\mu \rightarrow 0$ und $\mu \rightarrow \infty$. Was drückt der Parameter μ aus? Leiten Sie für die Alternative mit maximalem Nutzen deren Auswahlwahrscheinlichkeit nach μ ab.

2) Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{\partial p_i}{\partial w_i}$ und $\frac{\partial p_i}{\partial w_j}$, $j \neq i$ nach dem wahrgenommenen Nutzen.

Was sind die relativen Änderungsraten (die sogenannten Elastizitäten)

$$\varepsilon_{w_i}^{p_i} := \frac{\partial p_i}{\partial w_i} \cdot \frac{p_i}{u_i}, \quad \varepsilon_{w_j}^{p_i} := \frac{\partial p_i}{\partial w_j} \cdot \frac{p_i}{u_j}, \quad j \neq i?$$

Zeigen Sie, dass die Elastizitäten $\varepsilon_{w_j}^{p_i}$ für alle Alternativen $i \neq j$ gleich sind. Was bedeutet das ökonomisch?

3) Zeigen Sie: Wenn eine Alternative j entfernt wird, dann steigt die Wahrscheinlichkeit, eine andere beliebige Alternative $i \neq j$ zu wählen, und zwar gleich proportional zu derselben als j noch zur Auswahl stand. Was ist der Zusammenhang zum Axiom "Independence from Irrelevant Alternatives"?

4) Nehmen Sie an, dass die wahrgenommenen Nutzen der Alternativen i von w_i auf \bar{w}_i , $i = 1, \dots, n$, sich ändern. Leiten Sie eine Formel für neue Wahrscheinlichkeiten her, die nur von alten Wahrscheinlichkeiten und der Nutzendifferenzen $\Delta w_i := \bar{w}_i - w_i$ abhängen. Interpretieren Sie die Formel im Bezug auf die Abhängigkeit vom Parameter μ .

5) Zeigen Sie, dass Logit-Wahrscheinlichkeiten das Optimierungsproblem

$$\min_{p_i, i=1, \dots, n} \mu \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - \sum_{i=1}^n p_i w_i \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

lösen. Geben Sie eine ökonomische Interpretation via Lotterien an, indem Sie den Term $-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$ als Entropie auffassen.