

Prof. Dr. Vladimir Shikhman  
Professur für Wirtschaftsmathematik  
Technische Universität Chemnitz

### Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17) Übung 3: Shapley-Shubik-Index

Betrachte das Spiel "Gewichtete Mehrheit" mit Spielern  $N := \{1, \dots, n\}$  und Werten für eine beliebige Koalition  $S \subset N$  als

$$v(S) := \begin{cases} 1 & \text{falls } w(S) \geq q \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $w(S) := \sum_{i \in S} w_i$  die Stimmzahl der Koalition,  $w_i$  die Stimmzahl des Spielers  $i$ , und  $q$  die Gewinnquote bezeichnen.

1) Definieren Sie den Shapley-Shubik-Index des Spieles "Gewichtete Mehrheit", indem Sie die Kostenaufteilung nach Shapley nachahmen. Der Shapley-Shubik-Index ist ein häufig in der politischen Ökonomie verwendeter Machtindex bei Wahlentscheidungen in den Parlamenten, Kommissionen, Räten usw.

2) Die Europäische Wirtschaftsgemeinschaft (EWG) wurde 1958 gegründet. Die folgende Tabelle zeigt die jeweiligen Stimmen der sechs Gründungsmitglieder und deren Bevölkerung:

Land	Deutschland	Frankreich	Italien	Belgien	Niederlande	Luxemburg
Stimmanteile	4	4	4	2	2	1
Bevölkerung, Mio.	72	44	48,5	8,9	11	0,3

Um eine Entscheidung durchzusetzen, werden zwölf von siebzehn Stimmen benötigt. Berechnen Sie den jeweiligen Shapley-Shubik-Index, sowie den Bevölkerungsanteil. Stimmen die beiden in etwa überein? Was könnte die Erklärung dafür sein?

3) Es seien im Parlament eine Partei mit  $m - 1$  Sitzen und  $m$  Parteien mit je einem Sitz vertreten. Die einfache Mehrheit ist für die Abstimmungen entscheidend. Modellieren Sie diese Situation, indem Sie ein geeignetes Spiel "Gewichtete Mehrheit" definieren. Wie groß ist der Shapley-Shubik-Index der großen Partei. Was geschieht, wenn die Zersplitterung der Parteienlandschaft sich ansetzt, d.h.  $m \rightarrow \infty$ ?

4) Es seien im Parlament  $n$  Parteien vertreten. Zwei von Ihnen haben je  $\frac{1}{3}$  der Sitze und die anderen  $n - 2$  teilen die verbleibenden Sitze zu gleichen Teilen. Modellieren Sie diese Situation, indem Sie ein geeignetes Spiel "Gewichtete Mehrheit" definieren.

(a) Zeigen Sie, dass für  $n \rightarrow \infty$  der Shapley-Shubik-Index einer jeden der Großparteien  $\frac{1}{4}$  ist.

(b) Ist es bezüglich des Shapley-Shubik-Index für die  $n - 2$  kleine Parteien besser, zu einer Partei zu fusionieren?

5) Welchen Bedingungen muss die Stimmenquote  $q$  genügen, um sowohl Entscheidungsanarchie als auch -stillstand zu vermeiden.