Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 5: Input-Output-Modell nach Leontieff

Eine $n \times n$ Matrix $A \geq 0$ mit nichtnegativen Einträgen heißt produktiv, wenn

$$\exists \ \bar{x} \geq 0 \text{ mit } \bar{x} > A\bar{x}.$$

1) Zeigen Sie für eine produktive Matrix $A \geq 0$ folgende Behauptungen:

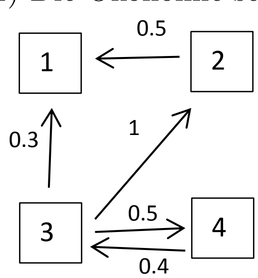
(i) $x \geq Ax \Rightarrow x \geq 0$,

(ii) die Matrix $I - A$ ist invertierbar,

(iii) $(I - A)^{-1} \geq 0$.

Was ist die ökonomische Bedeutung von (iii)?

2) Die Ökonomie sei durch den Gozintographen aus der Vorlesung gegeben:



Berechnen Sie die Produktion, die notwendig ist, um den Konsum $y = (1, 2, 3, 4)^T$ innerhalb der Ökonomie zu gewährleisten.

3) Zeigen Sie für eine produktive Matrix $A \geq 0$, dass deren k-te Potenz im Grenzwert verschwindet, d.h. $A^k \to 0$, $k \to \infty$.

4) Erweitern Sie das Input-Output-Modell nach Leontieff um die Arbeit, indem Sie das folgende System betrachten:

$$x - Ax = y, \quad b^T x \leq L,$$

wobei $A \geq 0$ Produktionsmatrix, $y \geq 0$ Konsumvektor, x Produktionsvektor, $b \geq 0$ Arbeitsbedarfsvektor und $L > 0$ vorhandene Arbeit bezeichnen.

Wie sind Güterpreise und Arbeitslöne fair zu definieren, d.h. die Ausgaben der Arbeiter stimmtem mit dem Profit der Produzenten überein? Versuchen Sie analog zur Produktionsdynamik für das ursprüngliche Input-Output-Modell nach Leontieff eine natürliche Preisdynamik für das erweiterte Modell vorzuschlagen. Konvergiert diese Dynamik gegen faire Preise?