

**Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)**  
**Übung 7: Dualität der Linearen Optimierung**

1) Die Daten zur landwirtschaftlichen Produktion sind in einem Betrieb wie folgt gegeben:

	Flächenbedarf ha/kg	Arbeitsaufwand St/kg	Ertrag Euro/kg
Raps	1.2	1.6	18
Weisen	0.5	0.5	9
Gerste	0.8	1.0	17
Mais	1.6	2.0	20
Ressource	500 ha	550 St	

- (i) Formulieren Sie das Problem des maximalen Ertrages.
- (ii) Wie lautet das duale Problem der Kostenminimierung?
- (iii) Lösen Sie das duale und primale Problem.

2) Benutzen Sie die Theorie der Linearen Optimierung, um die Lösbarkeit des folgenden Systems bzgl.  $x$  nachzuweisen:

$$Ax = x, \quad x \geq 0, \quad e^T x = 1,$$

wobei  $A \geq 0$  und  $e^T A = e^T$ . Schliessen Sie daraus auf die Existenz der stationären Markenverteilung, des Google-Rankings und der Gleichgewichtspreise in einer Tauschwirtschaft.

3) Modellieren Sie mittels Dualität der Linearen Optimierung folgende Marktsituationen:

- (i) Wettbewerb der Produzenten um die Rohstoffe,
- (ii) Auktion der Rohstoffe,
- (iii) Konsum öffentlich verbrauchter Rohstoffe.

Interpretieren Sie jeweils das primale und duale Problem aus ökonomischer Sicht. Wie lässt sich die starke Dualität interpretieren? Welche Rolle spielen dabei die dualen Multiplikatoren?

4) Es seien Anleihen zu Preisen  $p_i$  und mit festgesetzten Auszahlungen  $Z_i^k$  für das  $k$ -te Jahr,  $k = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, I$ , auf dem Markt angeboten. Es sollten Cashflows  $C_1, \dots, C_n$  sichergestellt werden.

- (i) Formulieren Sie das Problem der Portfoliooptimierung.
- (ii) Stellen Sie das zugehörige duale Problem der Diskontoptimierung auf.
- (iii) Interpretieren Sie die dualen Multiplikatoren als Diskontierungsfaktoren.
- (iv) Wie lassen sich daraus die Spot Rates, d. h. abzuschätzende Jahreszinsen, ableiten?