

Prof. Dr. Vladimir Shikhman  
Professur für Wirtschaftsmathematik  
Technische Universität Chemnitz

**Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)**  
**Übung 8: Ökonomisches Wachstum nach v. Neumann**

In einer Ökonomie mit  $n$  Gütern und  $m$  Aktivitäten seien  $n \times m$  Input- und Outputmatrizen  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  mit nicht-negativen Einträgen gegeben.

Das technologische Wachstumsproblem aus der Vorlesung lautet:

$$\text{Finde } x \geq 0, x \neq 0 \text{ und } \alpha \text{ maximal, so daß } Bx \geq \alpha Ax.$$

Das ökonomische Wachstumsproblem aus der Vorlesung lautet:

$$\text{Finde } p \geq 0, p \neq 0 \text{ und } \beta \text{ minimal, so daß } p^T B \geq \beta p^T A.$$

1) Zeigen Sie mit Hilfe der Linearen Optimierung für eine  $n \times m$  Matrix  $C$ :

falls  $Cx > 0$  keine Lösung  $x \geq 0$  besitzt, so existiert  $p \geq 0, p \neq 0$  mit  $p^T C \leq 0$ .

Benutzen Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass die ökonomische Wachstumsrate  $\bar{\beta}$  die technologische Wachstumsrate  $\bar{\alpha}$  nie überschreitet.

2) Die Input- und Outputmatrizen seien für eine Ökonomie wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie optimale Intensitäts- und Preisvektoren  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$ , sowie zugehörige technologische und ökonomische Wachstumsraten  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ .

3) Betrachte einfaches Wachstumsmodell nach v. Neumann, indem Sie  $B = I$  als Einheitsmatrix setzen. Zeigen Sie, dass  $\bar{x} = \bar{\alpha} A \bar{x}$ , wobei  $\bar{x}$  optimaler Intensitätsvektor und  $\bar{\alpha}$  technologische Wachstumsrate ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis aus mathematischer und ökonomischer Sicht.

4) Im einfachen Wachstumsmodell nach v. Neumann sei die Inputmatrix  $A$  produktiv. Zeigen Sie für die zugehörige technologische Wachstumsrate  $\bar{\alpha} > 1$ .