

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 8: Ökonomisches Wachstum nach v. Neumann

In einer Ökonomie mit n Gütern und m Aktivitäten seien $n \times m$ Input- und Outputmatrizen $A \geq 0$, $B \geq 0$ mit nicht-negativen Einträgen gegeben.

Das technologische Wachstumsproblem aus der Vorlesung lautet:

$$\text{Finde } x \geq 0, x \neq 0 \text{ und } \alpha \text{ maximal, so daß } Bx \geq \alpha Ax.$$

Das ökonomische Wachstumsproblem aus der Vorlesung lautet:

$$\text{Finde } p \geq 0, p \neq 0 \text{ und } \beta \text{ minimal, so daß } p^T B \geq \beta p^T A.$$

1) Zeigen Sie mit Hilfe der Linearen Optimierung für eine $n \times m$ Matrix C :

falls $Cx > 0$ keine Lösung $x \geq 0$ besitzt, so existiert $p \geq 0, p \neq 0$ mit $p^T C \leq 0$.

Benutzen Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass die ökonomische Wachstumsrate $\bar{\beta}$ die technologische Wachstumsrate $\bar{\alpha}$ nie überschreitet.

2) Die Input- und Outputmatrizen seien für eine Ökonomie wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie optimale Intensitäts- und Preisvektoren \bar{x} , \bar{p} , sowie zugehörige technologische und ökonomische Wachstumsraten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$.

3) Betrachte einfaches Wachstumsmodell nach v. Neumann, indem Sie $B = I$ als Einheitsmatrix setzen. Zeigen Sie, dass $\bar{x} = \bar{\alpha} A \bar{x}$, wobei \bar{x} optimaler Intensitätsvektor und $\bar{\alpha}$ technologische Wachstumsrate ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis aus mathematischer und ökonomischer Sicht.

4) Im einfachen Wachstumsmodell nach v. Neumann sei die Inputmatrix A produktiv. Zeigen Sie für die zugehörige technologische Wachstumsrate $\bar{\alpha} > 1$.