Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 11: Ordinaler vs. cardinaler Nutzen

1) Gegeben sei die konkave Leontieff-Nutzenfunktion

$$u(x) := \min_{1 \leq j \leq m} \frac{(Qx)_j}{\sigma_j}.$$

Hier bezeichnen $x \in \mathbb{R}^n_+$ den Güterbündel, $\sigma_j \in \mathbb{R}_+$ den Mindeststandard der j-ten Qualität, und $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}_+$ die $m \times n$ Qualitätsmatrix eines Konsumenten. Zeigen Sie, dass die Leontieff-Nutzenfunktion homogen ist, d.h.

$$u(tx) = tu(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n_+, t \in \mathbb{R}_+.$$

2) Gegeben sei die konkave Cobb-Douglas Nutzenfunktion

$$u(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Hier bezeichnen $x_j \in \mathbb{R}_+$ den Konsum des i-ten Gutes, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ die Nutzenelastizität bzgl. desselben. Unter welcher Bedingung an die Nutzenelastizitäten ist die Cobb-Douglas Nutzenfunktion homogen?

3) Betrachte die Nutzenmaximierung

$$\max_{x \geq 0} u(x) \quad \text{s.t.} \quad p^T x \leq w,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n_+$ den Güterbündel, $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ die differenzierbare und konkave Nutzenfunktion, $p \in \mathbb{R}^n_+$ den Preisvektor, und $w \in \mathbb{R}_+$ das Budget bezeichnen.

(a) Leiten Sie das Gesetz der optimalen Gütersubstitution in Termen der marginalen Substitutionsrate her.

(b) Wenden Sie (a) auf die Cobb-Douglas Nutzenfunktion an.

4) Betrachte die logarithmische Profitmaximierung

$$\max_{x \geq 0} w \ln u(x) - p^T x,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n_+$ den Güterbündel, $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ die konkave und differenzierbare Nutzenfunktion, $p \in \mathbb{R}^n_+$ den Preisvektor, und $w \in \mathbb{R}_+$ das Budget bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass für optimale x^* die Budgetrestriktion nicht verletzt wird, d.h. $p^T x^* \leq w$.

(b) Unter der Homogenität der Nutzenfunktion u, beweisen Sie, dass die die Budgetrestriktion für optimale x^* bindend ist.