

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 12: Ungleichheit nach Gini

1) Die Märkte M_1 und M_2 werden jeweils von 10 Firmen beliefert:

Markt M_1	Markt 2
9 Firmen mit $\frac{50}{9}\%$ Marktanteil	5 Firmen mit 2% Marktanteil
1 Firma mit 50% Marktanteil	5 Firmen mit 18% Marktanteil

Zeichnen Sie für beide Märkte die Lorenzkurve und berechnen Sie die Ginikoeffizienten. Auf welchem Markt herrscht eine höhere Konzentration?

2) Die Lorenzkurve für eine vorliegende Vermögensverteilung bestehe aus dem Streckenzug, der die Punkte $(0, 0)$, $(30, 15)$, $(50, 30)$, $(80, 60)$, $(100, 100)$ miteinander verbindet. Wie viel Prozent des Gesamtvermögens entfallen auf die 5% Reichsten?

3) Die Einkommensverteilung sei $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$. Die zugehörige Lorenzkurve wird $F(x)$ bezeichnet. Der Gini-Index ist definiert durch

$$G := \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j|}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}.$$

Zeigen Sie:

(a) $G = \frac{2 \sum_{i=1}^N i x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i} - \frac{N+1}{N},$

(b) $G = 1 - 2 \int_0^1 F(x) dx.$

4) Welche Lorenzkurve $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ entspricht dem konstanten Equity-Faktor $\varepsilon(x) = \varepsilon$? Dabei ist $F(x)$ der Anteil am Gesamteinkommen der Population, den die anteilig x Ärmsten besitzen, und

$$\varepsilon(x) := F'(x) \frac{1-x}{1-F(x)}.$$

Deuten Sie die obige Annahme des konstanten Equity-Faktors als Prinzip der Selbstähnlichkeit. Berechnen Sie den Gini-Index in diesem Falle, indem Sie die Formel aus 3(b) benutzen.