Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 14: Portfoliooptimierung nach Markowitz

1) Es seien n_i Messdaten $r_1^i, \ldots, r_n^i$ einer Rendite R^i gegeben. Der Erwartungswert, die Varianz der Rendite R^i, und die Kovarianz zweier Rendite R^i und R^j sind

$$\mu_i := \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} r_k^i, \quad (\sigma_i)^2 := \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\left(r_k^i - \mu_i\right)^2, \quad \sigma_{ij} := \frac{1}{n_i n_j}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{n_j}\left(r_k^i - \mu_i\right)\left(r_l^j - \mu_j\right).$$

Zeigen Sie $\sigma_{ij} \leq \sigma_i \cdot \sigma_j$.

2) Man betrachte das Problem der Portfoliooptimierung

$$\max_x \quad \frac{1}{2}x^T \cdot \Sigma \cdot x \quad s.t. \quad \mu^T x = r, e^T x = 1,$$

wobei $\Sigma = (\sigma_{ij})$ die Kovarianzmatrix, $\mu = (\mu_i)_i$ der Vektor von Renditenerwartungswerten, r die erwartete Rendite, e der Vektor von Einsen sind. Man nehme an, dass Σ invertierbar ist und dass es mindestens zwei Renditen mit unterschiedlichen Erwartungswerten gibt.

(a) Berechnen Sie das optimale Portfolio aus dem Lagrange-Ansatz. Warum ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu & \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e \\ \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e & e^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(b) Zeichnen Sie die Varianz entlang des Portfolio Frontiers in Abhängigkeit von r ein.

(c) Finden Sie das Minimalvarianzportfolio (MVP) auf dem Portfolio Frontier.

3) Der Korrelationskoeffizient zwischen den Renditen der Aktien A und B sei 0.01. Den Rest der Daten entnehmen Sie der Tabelle

Aktie	Erwartungswert der Rendite	Varianz der Rendite
A	0.1	0.15
B	0.18	0.3

.

Berechnen Sie MVP samt seiner Varianz und Rendite.