Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)
Übung 15: Wachstumsmodell nach Solow

Das Wachstumsmodell nach Solow beschreibt die zeitliche Entwicklung von Kapital K und Arbeit L mit Hilfe folgender Differentialgleichungen:

$$\dot{K} = sQ, \quad \dot{L} = \lambda L,$$

wobei $Q = f(K, L)$ Produktionsfunktion, s Sparquote und λ Bevölkerungswachstumsrate sind.

1) Im Wachstumsmodell von Solow sei die Cobb-Douglas Produktionsfunktion $Q = K^\alpha L^{1-\alpha}$, $\alpha \in [0, 1]$, angenommen.

(a) Leiten Sie die zeitliche Entwicklung des Pro-Kopf-Kapitals $k := \dfrac{K}{L}$ her.

(b) Finden Sie das Gleichgewicht von Pro-Kopf-Kapital aus der Differentialgleichung

$$\dot{k} = s\phi(k) - \alpha k,$$

wobei $\phi(k) = \dfrac{Q}{L}$ die Pro-Kopf-Produktion bezeichnet.

(c) Interpretieren Sie dessen Abhängigkeit von α in Termen des technologischen Fortschritts.

2) Untersuchen Sie graphisch die Sensitivität des Gleichgewichts von Pro-Kopf-Kapital bzgl.

(a) des Bevölkerungswachstums,

(b) der veränderten Spareinstellungen der Bevölkerung.

Was geschieht mit dem entsprechenden Pro-Kopf-Konsum $(1-s)\phi(k)$? Wie kommt die Ökonomie zu einem neuen Gleichgewicht?

3) Die Goldene Regel der Akkumulation beschreibt diejenige Sparquote s in einer Volkswirtschaft, durch die der Pro-Kopf-Konsum im Gleichgewicht $k(s)$ maximiert wird:

$$\max_s (1 - s)\phi(k(s)).$$

(a) Formulieren und interpretieren Sie die notwendige Optimalitätsbedingung für die Goldene Regel der Akkumulation.

(b) Wie lautet die Goldene Regel der Akkumulation im Falle der Cobb-Douglas Produktionsfunktion aus 1)?