The Fibonacci sequence

Vladimir Shikhman

Technische Universität Chemnitz

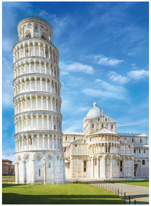
Fakultät für Mathematik

Professur für Wirtschaftsmathematik

FIBONACCI

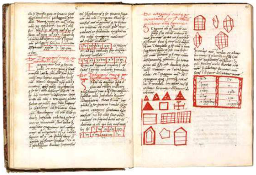
Über das Leben von Leonardo Pisano, genannt Fibonacci, ist wenig bekannt. Vermutungen führen zum Geburtsjahr um 1170, das Todesjahr wird nach 1240 angenommen. Der Geburts- und Todesort ist wahrscheinlich Pisa. Es existiert ein Originaldokument aus dem Jahre 1241, in dem die Stadt Pisa Fibonacci eine Pension gewährt. Von diesem Zeitpunkt an fehlen weitere gesicherte Hinweise auf Fibonaccis Leben.

LEBEN



Fibonaccis Vater war Leiter der pisanischen Handelskolonie in Bugia im heutigen Algerien. Fibonacci lernte dort bei einem muslimischen Lehrer das indisch-arabische Zahlensystem kennen und war davon begeistert. Ausgedehnte Reisen in den Orient gaben Fibonacci die Gelegenheit, sein mathematisches Wissen zu erweitern und zu vertiefen. Um das Jahr 1200 kehrte er nach Pisa zurück und lebte dort als Privatgelehrter und mathematischer Schriftsteller.

WERK

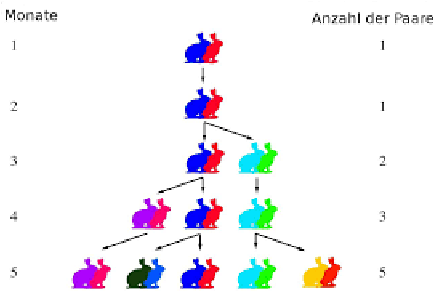


1202 entstand sein wichtigstes Werk "Liber abaci", ein enzyklopädisches Rechenbuch, das der westlichen Welt die arithmetischen Rechenmethoden auf der Basis des indischen Stellenwertsystems vermittelte. Seine Bedeutung liegt nicht nur in der Entdeckung der nach ihm benannten Folge, sondern in der Tatsache, dass er durch das Studium der antiken Wissenschaft und die Begegnung mit der arabischen Mathematik für einen Neubeginn der angewandten Mathematik in Europa den Grundstein legte.

WACHSTUM einer BEVÖLKERUNG von KANINCHEN

- Man fängt mit einem Paar junger Kaninchen an.
- Ein einmonatiges Kaninchen ist fähig sich fortzupflanzen.
- Ein Kaninchenpaar gebärt ein weiteres Kaninchenpaar.

Wie viele Kaninchenpaare wird es nach einem Jahr geben?



FIBONACCI-FOLGE

P_n - Anzahl der Kaninchenpaare am Anfang des n-ten Monats

$$P_{n+1} = \underbrace{\text{neue Kaninchenpaare}}_{P_{n-1}} + \underbrace{\text{alte Kaninchenpaare}}_{P_n}$$

Rekursives Bildungsgesetz:

- Für die beiden ersten Zahlen wird der Wert eins vorgegeben.
- Jede weitere Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger.

$$\underbrace{0}_{P_0}, \underbrace{1}_{P_1}, \underbrace{1}_{P_2}, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \underbrace{144}_{P_{12}}, 233, 377, 610, \ldots$$

$$\boxed{\text{Wie lautet die explizite Formel für } P_n\text{?}}$$

REKURSION IN MATRIXFORM

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n-2} \\ P_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} P_{n-2} \\ P_{n-1} \end{pmatrix} = \dots \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

DIAGONALISIERUNG

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = S \cdot \Lambda \cdot S^T$$

- Λ - Diagonalmatrix aus Eigenwerten
- S - Orthogonalmatrix aus Eigenvektoren mit $S^T \cdot S = I$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = S \cdot \Lambda \cdot \underbrace{S^T \cdot S}_{=I} \cdot \Lambda \cdot S^T \cdots S \cdot \Lambda \cdot \underbrace{S^T \cdot S}_{=I} \cdot \Lambda \cdot S^T$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = S \cdot \Lambda^n \cdot S^T$$

EIGENWERTE und EIGENVEKTOREN

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (1-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Downarrow$ siehe Rechnung an der Tafel

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_\phi = \frac{1}{5^{1/4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ \sqrt{\phi} \end{pmatrix}$$

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_\psi = \frac{1}{5^{1/4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\psi}} \\ \sqrt{\psi} \end{pmatrix}$$

MATRIXPOTENZ

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n &= S \cdot \Lambda^n \cdot S^T \\
&= \frac{1}{5^{1/4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\phi}} & \frac{1}{\sqrt{\psi}} \\ \sqrt{\phi} & \sqrt{\psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}^n \cdot \frac{1}{5^{1/4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\phi}} & \sqrt{\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{\psi}} & \sqrt{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\phi}} & \frac{1}{\sqrt{\psi}} \\ \sqrt{\phi} & \sqrt{\psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\phi}} & \sqrt{\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{\psi}} & \sqrt{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \phi^{n-1} + \psi^{n-1} & \phi^n + \psi^n \\ \phi^n + \psi^n & \phi^{n+1} + \psi^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

FORMEL von MOIVRE-BINET

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \phi^{n-1} + \psi^{n-1} & \phi^n + \psi^n \\ \phi^n + \psi^n & \phi^{n+1} + \psi^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \phi^n + \psi^n \\ \phi^{n+1} + \psi^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$P_n = \frac{\phi^n + \psi^n}{\sqrt{5}} \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ASYMPTOTIK

Um wie viel größer ist P_{n+1} im Vergleich zu P_n für $n \to \infty$?

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\phi^{n+1} + \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} : \frac{\phi^n + \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} + \psi^{n+1}}{\phi^n + \psi^n}$$

$$= \frac{\phi + \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n \cdot \psi}{1 + \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n} \to \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

da

$$\left|\frac{\psi}{\phi}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} : \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n \to 0$$

WACHSTUM

Für große n gilt:

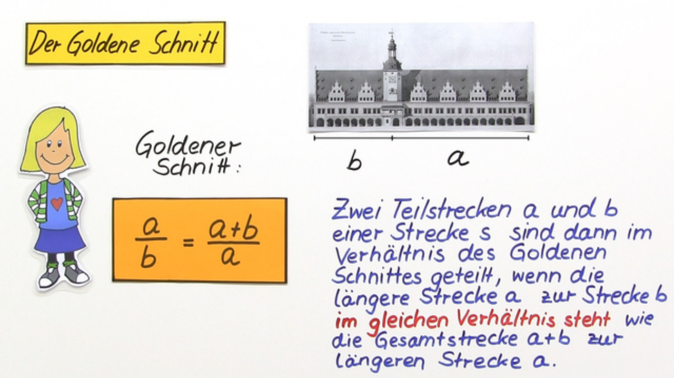
$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \approx \phi$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{P_{n+1} \approx \phi \cdot P_n}_{\text{geometrisches Wachstum}}$$

$$\text{um das feste Faktor } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

GOLDENER SCHNITT



$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\phi^2 - \phi - 1}_{\text{Determinante}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$