

7. Übung: Äquivalenzrelationen

1. Welche Eigenschaften haben folgende Relationen?

(a) X : Menge der Geraden einer Ebene,

$$R_1 = \{(g_1, g_2) : g_1 \parallel g_2\},$$

$$R_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \perp g_2\}$$

(b) $X = \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) : a \mid b\}$

(c) $X = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) : ab \geq 0\}$

2. Sind folgende Relationen Äquivalenzrelationen auf $X = \{1, 2, \dots, 10\}$?

(a) $R = \{(m, n) : m + n = 2k; \quad k \in \mathbb{N}\}$

(b) $R = \{(m, n) : m/n = 2k; \quad k \in \mathbb{N}\}$

(c) $R = \{(m, n) : m/n = 2^k; \quad k \in \mathbb{Z}\}$

(d) $R = \{(m, n) : m/n = 2^k; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

Geben Sie für die Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen an.

3. Sind folgende Relationen Äquivalenzrelationen auf $X = \mathbb{R}^2 = \{P = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$?

(a) $R = \{(P_1, P_2) \in X^2 : y_1 - y_2 = x_1 - x_2\}$

(b) $R = \{(P_1, P_2) \in X^2 : y_1 x_2 = y_2 x_1\}$

(c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $R = \{(P_1, P_2) \in X^2 : y_1 x_2 = y_2 x_1\}$

Geben Sie für die Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem an.

4. $X = \{x = 10a + b : a, b \in \{0, \dots, 9\}\}$, $R = \{(x_1, x_2) \in X \times X : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklasse X_{15} (die Klasse, die das Element $x = 15$ enthält) und ein Repräsentantensystem an.