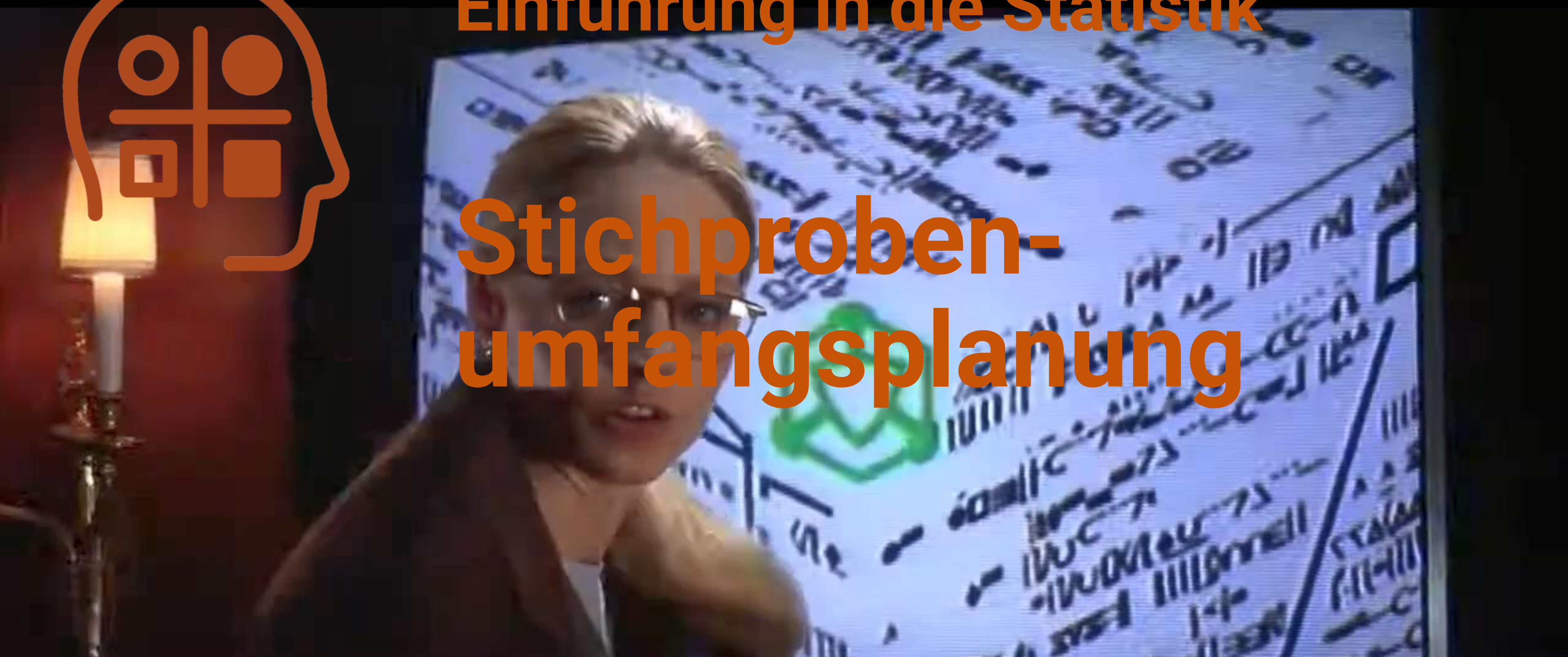
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
IN DER KULTURHAUPTSTADT EUROPAS
CHEMNITZ

Professur Psychologie digitaler Lernmedien

Institut für Medienforschung Philosophische Fakultät

Einführung in die Statistik

Stichproben-umfangsplanung



Contact (1997). Warner Bros. Pictures; South Side Amusement Company.

Prof. Dr. Günter Daniel Rey

Überblick

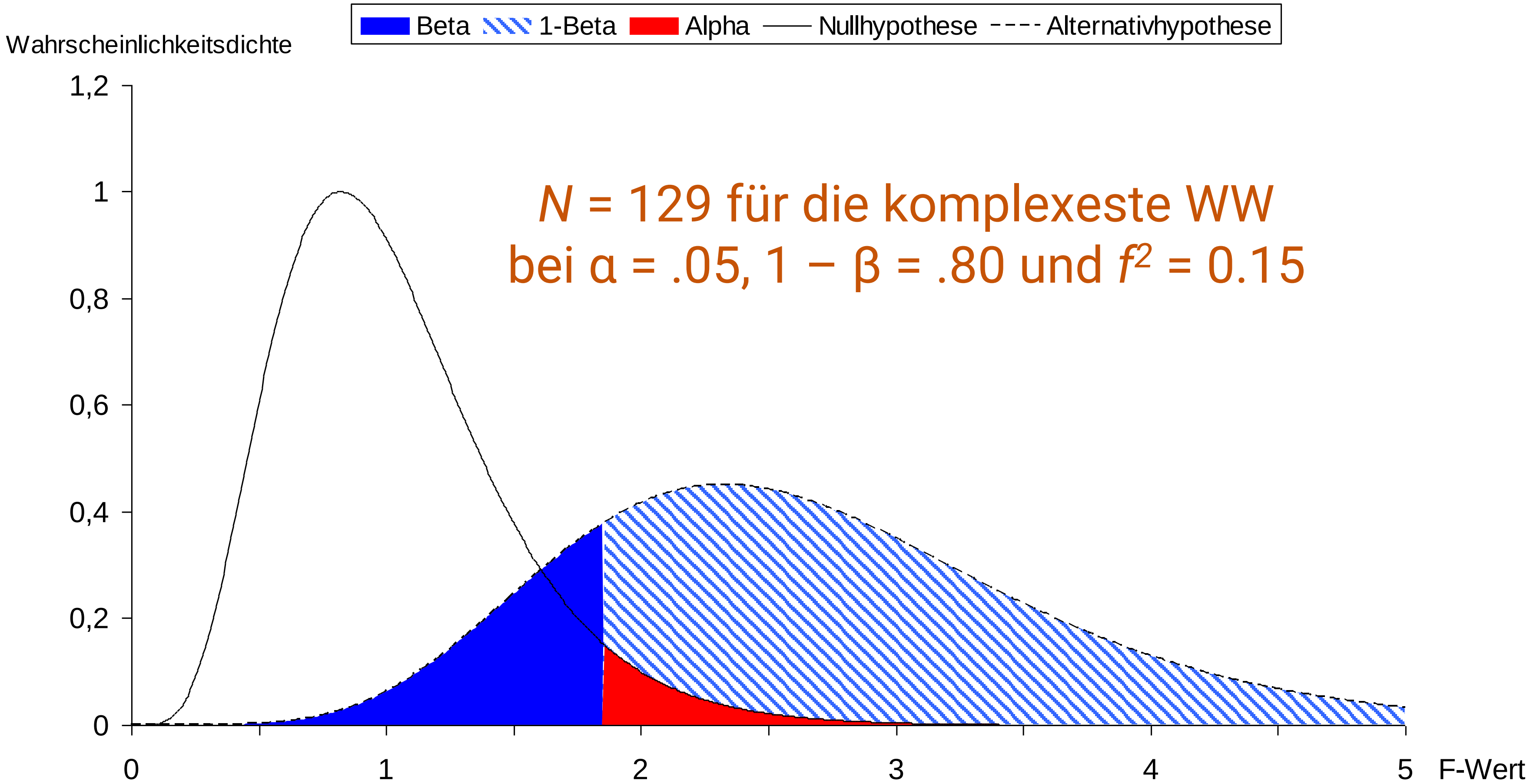
- Einführung
- Signifikanzniveau
- Teststärke
- Effektgröße
- Weitere Einflussgrößen
- Berechnung des Stichprobenumfangs

Einführung (Rey, 2020)

- Stichprobenumfangsplanung sollte im Vorfeld einer Studie erfolgen
- Forschungspraxis: Meist keine Stichprobenumfangsplanung
- Probleme bei fehlender Stichprobenumfangsplanung
  - Fehlende Wahrscheinlichkeitsangabe: Bei nicht signifikantem Ergebnis unklar, ob die Nullhypothese angenommen werden kann
  - Unzureichende Ökonomie: Idealerweise sollten genauso viele Versuchspersonen erhoben werden wie benötigt
- Drei zentrale Einflussgrößen auf den Stichprobenumfang
  - Signifikanzniveau
  - Teststärke
  - Effektgröße

Beispiel für eine Stichprobenumfangsplanung (Rey, 2020)

- 4 x 3 x 3-faktorielles, univariates Versuchsdesign ohne MW



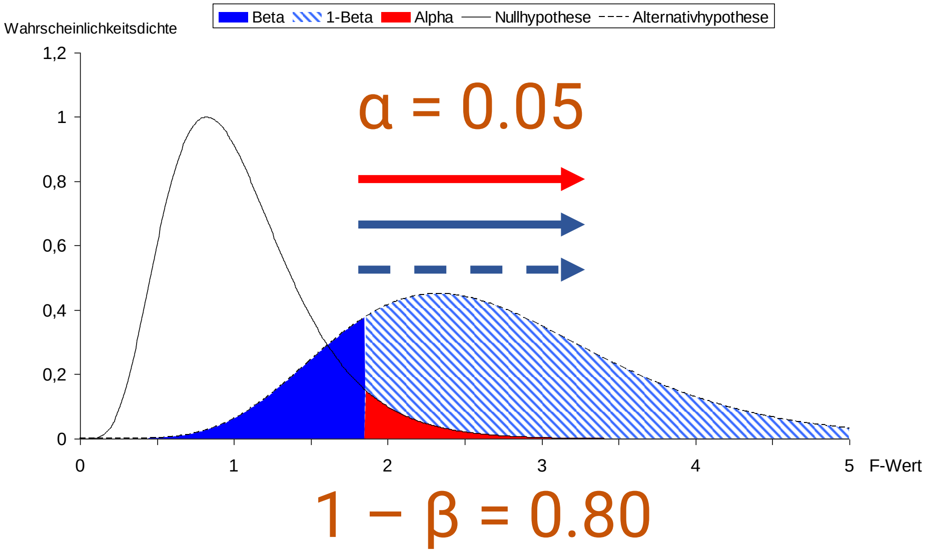
Signifikanzniveau (z. B. Bortz & Schuster, 2010; Döring & Bortz, 2015)

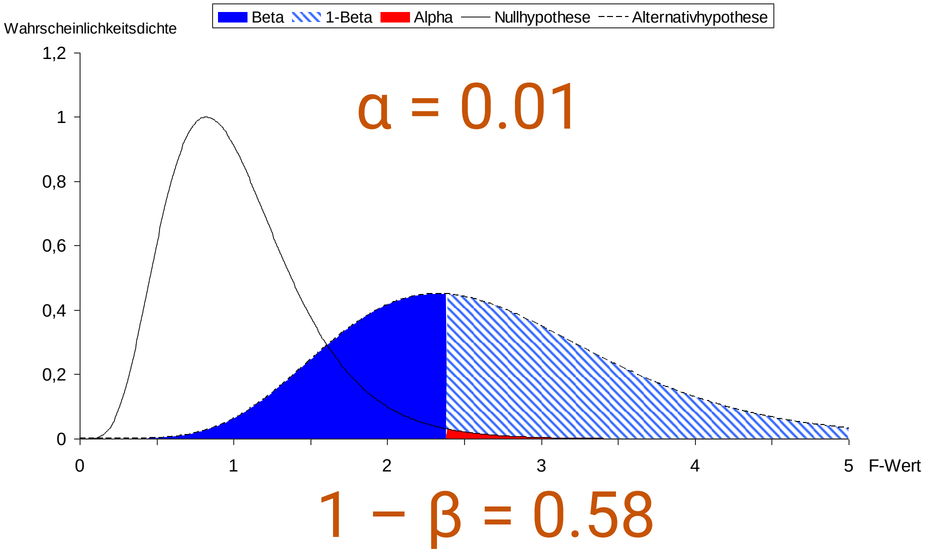
- Statistische Signifikanz: Wahrscheinlichkeit, dass das gefundene Ergebnis oder extremere Ergebnisse bei Gültigkeit der Nullhypothese eintreten
- Konventionen für die Entscheidungsfindung auf Basis der berechneten Wahrscheinlichkeit (*p*-Wert)

	Nicht signifikant	Signifikant	Sehr signifikant	Hoch signifikant
p-Wert	> 5%	≤ 5%	≤ 1%	≤ 0.1%
Abkürzung	n.s.	*	**	***

Einfluss des Signifikanzniveaus auf die Teststärke (Rey, 2020)

- Je kleiner das Signifikanzniveau, desto kleiner die Teststärke (1 – β)
- Veränderung des Signifikanzniveaus wirkt sich <u>nicht</u> auf die Kurvenverläufe der zentralen und nonzentralen Verteilung aus
- Beispiel für den Einfluss des Signifikanzniveaus auf die Teststärke:





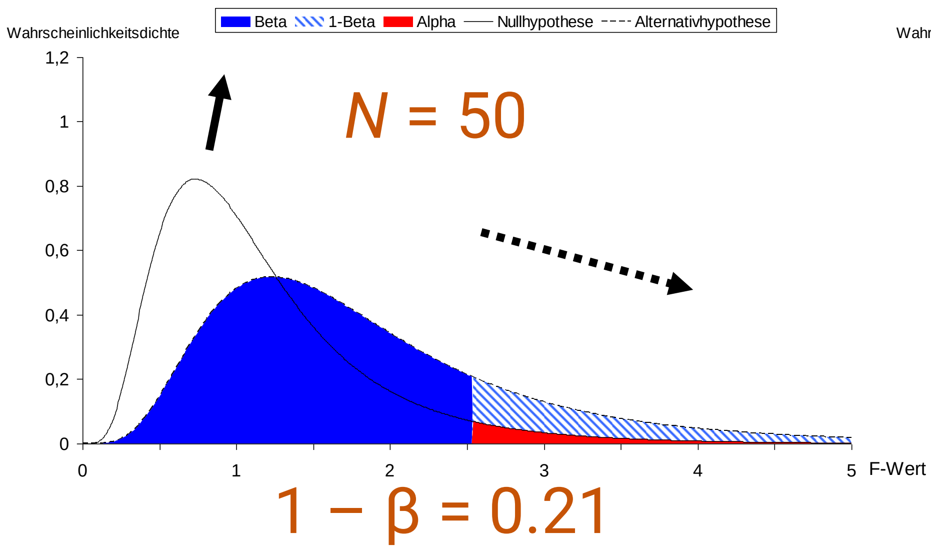
Einfluss des Signifikanzniveaus auf den Stichprobenumfang

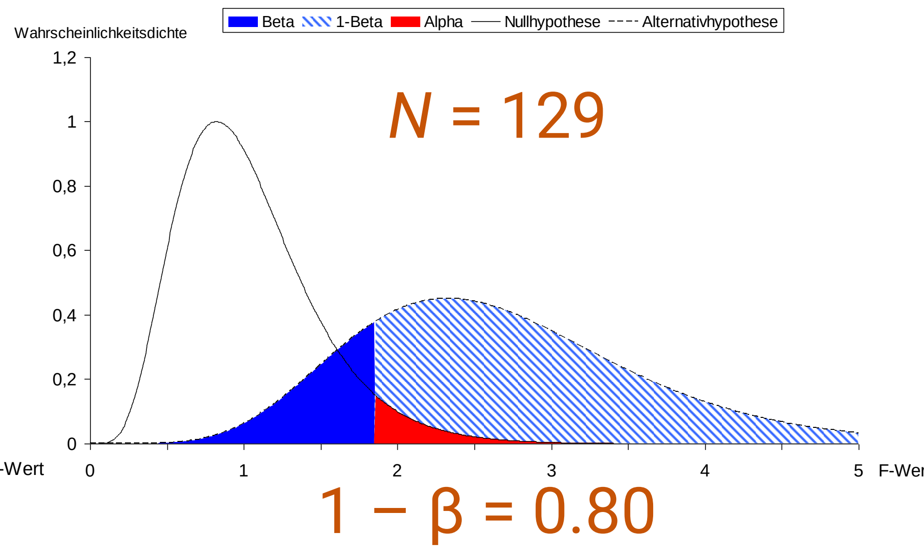
- Je kleiner das Signifikanzniveau, desto größer der benötigte Stichprobenumfang
- Beispiel: Stichprobenumfänge für ein 2 x 2 faktorielles Design mit einem angenommenen mittleren Effekt von $f = 0.25$ und einer gewünschten Teststärke $(1 - \beta)$ von 0.80:

Signifikanzniveau	Stichprobenumfang
5.0%	128
1.0%	191
0.1%	279

Einfluss des Stichprobenumfangs auf die Teststärke (Rey, 2020)

- Je mehr Versuchspersonen, desto größer die Teststärke ($1 - \beta$)
- Gründe hierfür:
  - Veränderung der zentralen Verteilung
  - Veränderung der nonzentralen Verteilung
- Beispiel für den Einfluss des Stichprobenumfangs auf die Teststärke:





Einfluss der Teststärke auf den Stichprobenumfang

- Je größer die (gewünschte) Teststärke, desto größer der benötigte Stichprobenumfang
- Beispiel: Stichprobenumfänge für ein 2 x 2 faktorielles Design mit einem angenommenen mittleren Effekt von $f = 0.25$ und einem Signifikanzniveau von 5%:

Teststärke	Stichprobenumfang
80%	128
95%	210
99%	296

Effektgröße (Rey, 2020)

- Effektgröße: Statistischer Kennwert, der angibt, wie gut das gesuchte Muster in den Zahlen erkennbar ist bzw. wie stark sich das gesuchte Signal vom Umgebungsrauschen unterscheidet
- Vorteile durch Angabe von (standardisierten) Effektgrößen
  - Leichtere Interpretierbarkeit der Ergebnisse
  - Mögliche Vergleichbarkeit von Studien
  - Einfache Aggregation für Metaanalysen
- Verschiedene Effektgrößen wie d, η_p^2, f, f^2 oder ω_p^2
- Umrechnung: Jede Effektgröße kann in jede andere Effektgröße umgerechnet werden
- Webseite zur Umrechnung: www.psychometrica.de/effektstaerke

Effektgröße (Cohen, 1988)

- Konventionen zur Einschätzung verschiedener Effektgrößen

Effektgröße	Kleiner Effekt	Mittlerer Effekt	Großer Effekt
d	0.20	0.50	0.80
η_p^2	0.01	0.06	0.14
f	0.10	0.25	0.40
f^2	0.02	0.15	0.35
ω_p^2	0.01	0.06	0.14

- Wichtig: Die Konventionen sind numerisch <u>nicht</u> äquivalent!

Effektgröße (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Effektgröße *d*: Standardisierte Distanz zwischen zwei Stichprobenmittelwerten
- Formel: $$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{x_1}^2 + \hat{\sigma}_{x_2}^2}{2}}}$$

$\bar{x}_1$ = Mittelwert der Stichprobe 1
$\bar{x}_2$ = Mittelwert der Stichprobe 2
$\hat{\sigma}_{x1}{}^2$ = Geschätzte Varianz der Stichprobe 1
$\hat{\sigma}_{x2}{}^2$ = Geschätzte Varianz der Stichprobe 2

- Beispiel zur Berechnung (vgl. Folien zur letzten Sitzung):

$$d = \frac{8.0 - 2.0}{\sqrt{\frac{0.625 + 0.625}{2}}} = \frac{6.0}{\sqrt{0.625}} \approx 7.59$$

- Wertebereich von *d* reicht von – Unendlich bis + Unendlich

Effektgröße (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Partielles Eta-Quadrat (η_p^2): Effektgröße, die den Anteil der aufgeklärten Variabilität der Messwerte relativ zur Summe der Quadratsummen des systematischen Effekts und des Residuums auf der Ebene der Stichprobe angibt
- Formel: $\boxed{\eta_p^2 = \frac{QS_{Effekt}}{QS_{Effekt} + QS_{Innerhalb}}}$
- Beispiel zur Berechnung (vgl. Folien zur letzten Sitzung):

$$\eta_p^2 = \frac{QS_A}{QS_A + QS_{Innerhalb}} = \frac{11.25}{11.25 + 10} \approx 0.53$$

- SPSS verwendet dieses Maß als Effektgröße
- Problem: Maß überschätzt den Anteil an aufgeklärter Varianz in der Population

Effektgröße (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Weitere Effektgrößen: f^2 und ω_p^2
- Formeln: $\boxed{f^2 = \frac{(F-1)\cdot df_{Zähler}}{N}}$ $\boxed{\omega_p^2 = \frac{f^2}{1+f^2}}$
- Beispiel zur Berechnung (vgl. Folien zur letzten Sitzung):

$$f_A^2 = \frac{(F_A - 1)\cdot df_A}{N} = \frac{(18-1)\cdot 1}{20} = 0.85 \qquad \omega_p^2 = \frac{f_A^2}{1+f_A^2} = \frac{0.85}{1+0.85} \approx 0.46$$

- GPower nutzt u. a. *f* und f^2 für die Stichprobenumfangsplanung
- Keine Überschätzung: Im Gegensatz zu η_p^2 überschätzen f^2 und ω_p^2 <u>nicht</u> den Anteil an aufgeklärter Varianz in der Population
- Zusammenhang zwischen *f* und *d*: $d = 2 \cdot f$ bzw. $d = 2\cdot\sqrt{\frac{\omega^2}{1-\omega^2}}$

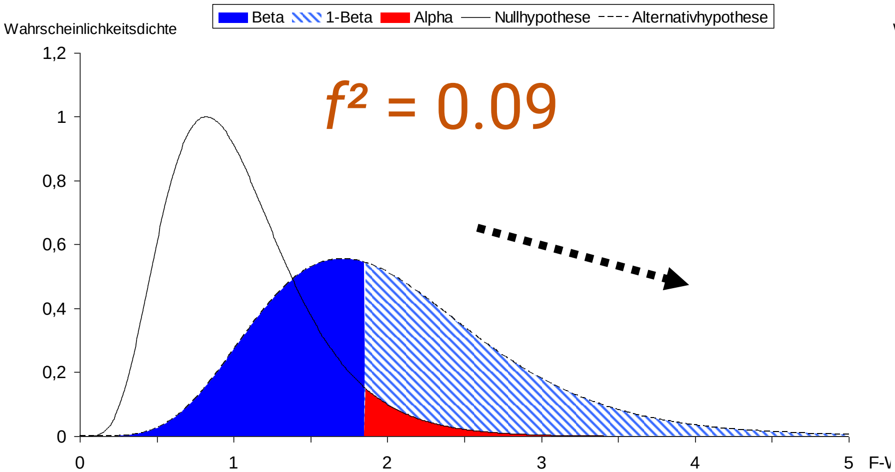
Umrechnung von Effektgrößen

Bitte rechnen Sie die Effektgröße $d = 0.5$ in f^2 und ω_p^2 um! Welche Werte sind richtig?

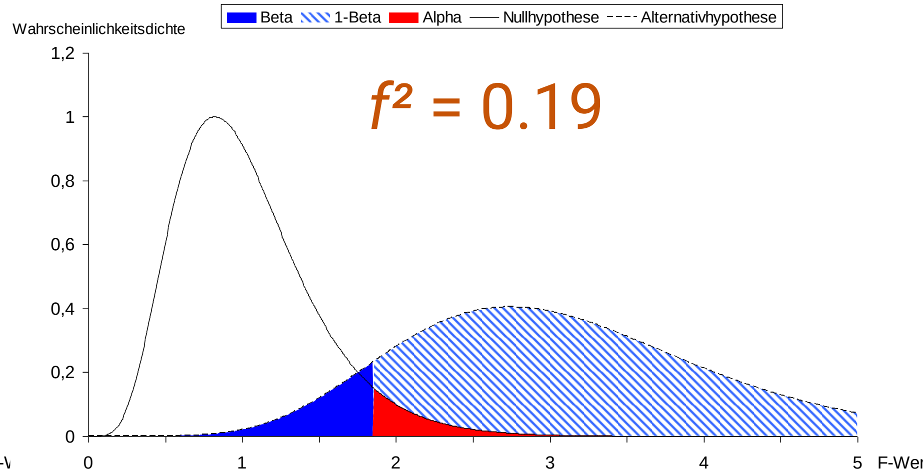
- ☐ A: $f^2 = 4.00$ und $\omega_p^2 = 0.80$
- ☐ B: $f^2 = 0.25$ und $\omega_p^2 = 0.20$
- ☐ C: $f^2 = 1.00$ und $\omega_p^2 = 0.50$
- ☐ D: $f^2 = 0.06$ und $\omega_p^2 = 0.06$

Einfluss der Effektgröße auf die Teststärke (Rey, 2020)

- Je größer die Effektgröße, desto größer die Teststärke ($1 - \beta$)
- Effektgröße wirkt sich (nur) auf die nonzentrale Verteilung aus
  - Nonzentrale Verteilung „wandert“ nach rechts
  - Nonzentrale Verteilung „verflacht“
- Beispiel für den Einfluss der Effektgröße auf die Teststärke:



$1 - \beta = 0.53$



$1 - \beta = 0.90$

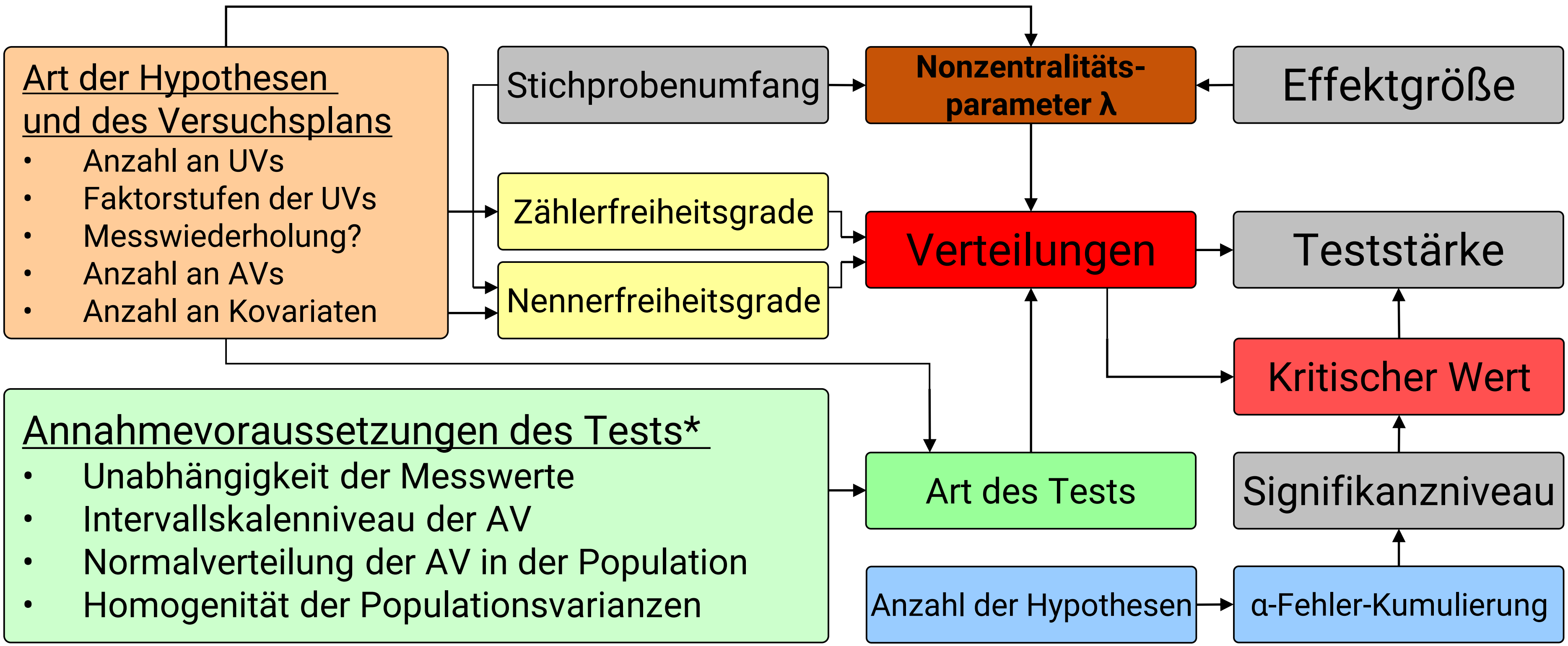
Einfluss der Effektgröße auf den Stichprobenumfang

- Je größer die Effektgröße, desto kleiner der benötigte Stichprobenumfang
- Beispiel: Stichprobenumfänge für ein 2 x 2 faktorielles Design mit einer gewünschten Teststärke (1 – β) von 0.80 und einem Signifikanzniveau von 5%:

Effektgröße (*f*)	Stichprobenumfang
0.10	787
0.25	128
0.40	52

Weitere Einflussgrößen (Rey, 2020)

- Einflussgrößen neben den drei zentralen Kenngrößen (Stichprobenumfang, Signifikanzniveau & Effektgröße) auf die Teststärke:

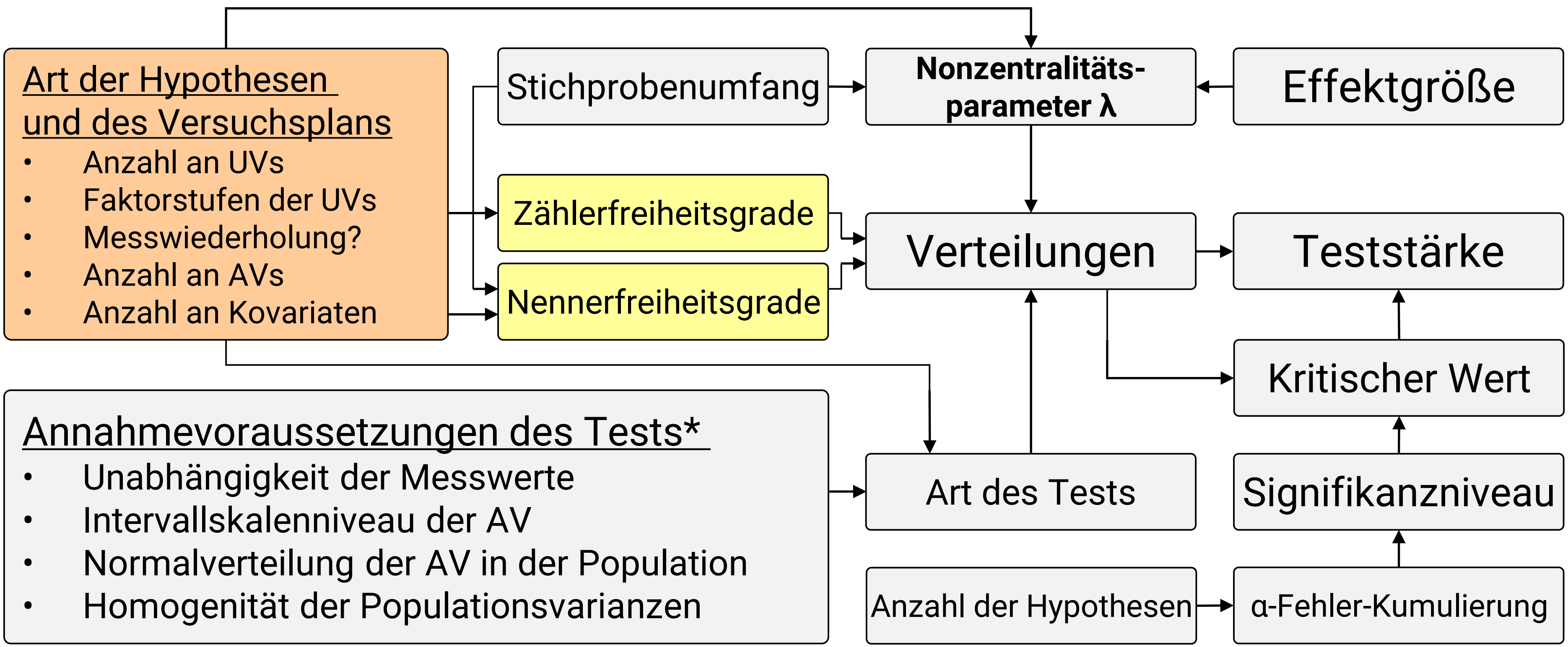


* Hier beispielhaft: Annahmevoraussetzungen der ANOVA ohne MW

Quelle: Angelehnt an Rey (2020)

Weitere Einflussgrößen (Rey, 2020)

- Einflussgrößen neben den drei zentralen Kenngrößen (Stichprobenumfang, Signifikanzniveau & Effektgröße) auf die Teststärke:



* Hier beispielhaft: Annahmevoraussetzungen der ANOVA ohne MW

Quelle: Angelehnt an Rey (2020)

Weitere Einflussgrößen (Rey, 2020)

- Anzahl und Faktorstufen unabhängiger, hypothesenrelevanter Variablen beeinflusst die Zähler- und Nennerfreiheitsgrade
- Zählerfreiheitsgrade (df_Z):
  - Je größer df_Z, desto mehr Versuchspersonen werden benötigt
  - Formel für die Haupteffekte:
    $df_Z = p - 1$ (bzw. $q - 1$ oder $z - 1$)
  - Formel für die Wechselwirkungen:
    $df_Z = (p - 1) \cdot (q - 1) \cdot (\ldots) \cdot (z - 1)$

p = Faktorstufen des ersten Faktors
q = Faktorstufen des zweiten Faktors
z = Faktorstufen des letzten Faktors

- Nennerfreiheitsgrade (df_N):
  - Je größer df_N, desto weniger Versuchspersonen werden benötigt
  - Formel für sämtliche Effekte: $df_N = N - p \cdot q \cdot \ldots \cdot z$

Weitere Einflussgrößen (Rey, 2020)

- Veränderung von df_Z wirkt sich i.d.R. deutlich stärker auf das benötigte *N* aus als Veränderung von df_N
- Hieraus und aus den vorherigen Formeln folgt:
  - Hinzunahme von zweifachgestuften UVs beeinflusst das benötigte *N* kaum
  - Hinzunahme von UVs mit mehreren Faktorstufen führt vor allem in komplexen Versuchsplänen zu erheblich höherem benötigten *N*
- Wichtig: Versuchsplan einschließlich UVs primär nach inhaltlichen Gesichtspunkten und <u>nicht</u> nur nach Stichprobenumfang auswählen

Einfluss des Versuchsdesigns auf den benötigten Stichprobenumfang

Welches Versuchsdesign benötigt Ihrer Vermutung nach den höchsten Stichprobenumfang für die komplexeste Wechselwirkung (falls vorhanden)?

- ☐ A: Ein einfaktorielles, fünffachgestuftes Design
- ☐ B: Ein 2 x 4 faktorielles Design
- ☐ C: Ein 2 x 2 x 2 x 2 faktorielles Design

Berechnung des Stichprobenumfangs (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Formel zur Berechnung von *N*:

$$N = \frac{\lambda_{df;\alpha;1-\beta}}{\phi^2} = \frac{\lambda_{df;\alpha;1-\beta}}{\frac{\omega_p^2}{1-\omega_p^2}}$$

N = Benötigter Stichprobenumfang
λ = Nonzentralitätsparameter Lambda
Φ^2 = Phi-Quadrat
ω_p^2 = Effektgröße partielles Omega-Quadrat

- Beispiel: 2 x 2 faktorielles Design mit α = .01, *f* = .40 (großer Effekt) und 1 − β = .80
- Formel (siehe vorherige Folien): $\omega_p^2 = f^2 : (1 + f^2)$
- λ = 11.60 (laut Tabelle); $f^2 = .16$; $\omega_p^2 \approx .14$; $\Phi^2 = .16$
- Benötigter Stichprobenumfang: *N* = 73 (72.5)

Berechnung des Stichprobenumfangs

Bitte berechnen Sie das benötigte *N* für die Wechselwirkung zu einem 2 x 3 faktoriellen Design mit *f* = .25, α = .01 und 1 – β = .80.

- ☐ A: *N* = 227
- ☐ B: *N* = 223
- ☐ C: *N* = 80
- ☐ D: *N* = 236

TPF-3

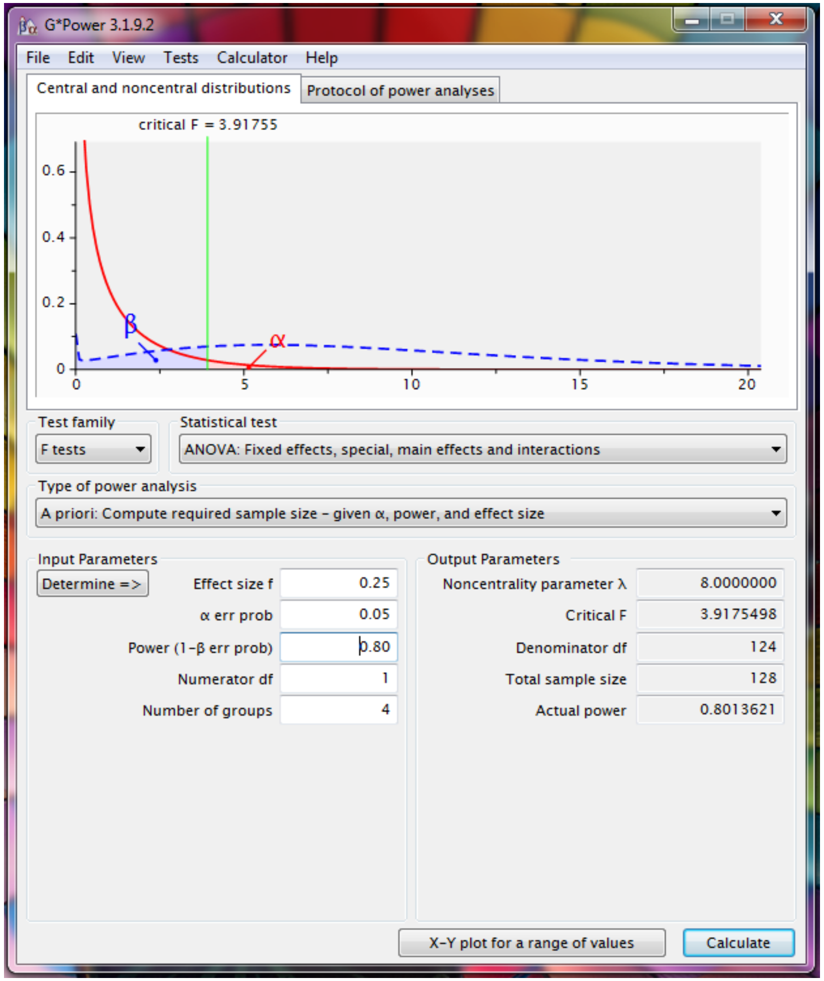
λ als Funktion der Teststärke und der Zählerfreiheitsgrade FG(Z) für *F*-, χ^2- und zweiseitige *t*-Tests (FG(Z) = 1)
bei α = 0,01 (entspricht bei einseitigen *t*-Tests (FG(Z) = 1) α = 0,005)

Teststärke	0,1000	0,5000	0,6667	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9250	0,9500	0,9750	0,9900	0,9925	0,9950	0,9975	0,9990
FG(Z)															
1	1,67	6,63	9,04	10,57	11,60	13,05	14,88	16,12	17,81	20,57	24,03	25,08	26,54	28,97	32,10
2	2,30	8,19	10,92	12,64	13,88	15,40	17,43	18,80	20,65	23,66	27,41	28,55	30,13	32,75	36,11
3	2,76	9,31	10,28	14,10	15,46	17,09	19,25	20,78	22,67	25,86	29,83	31,02	32,68	35,43	38,96
4	3,15	10,23	13,38	15,34	16,75	18,47	20,74	22,27	24,33	27,66	31,79	33,04	34,76	37,63	41,29
5	3,49	11,03	14,35	16,39	17,87	19,66	22,03	23,60	25,76	29,22	33,50	34,79	36,57	39,83	43,30

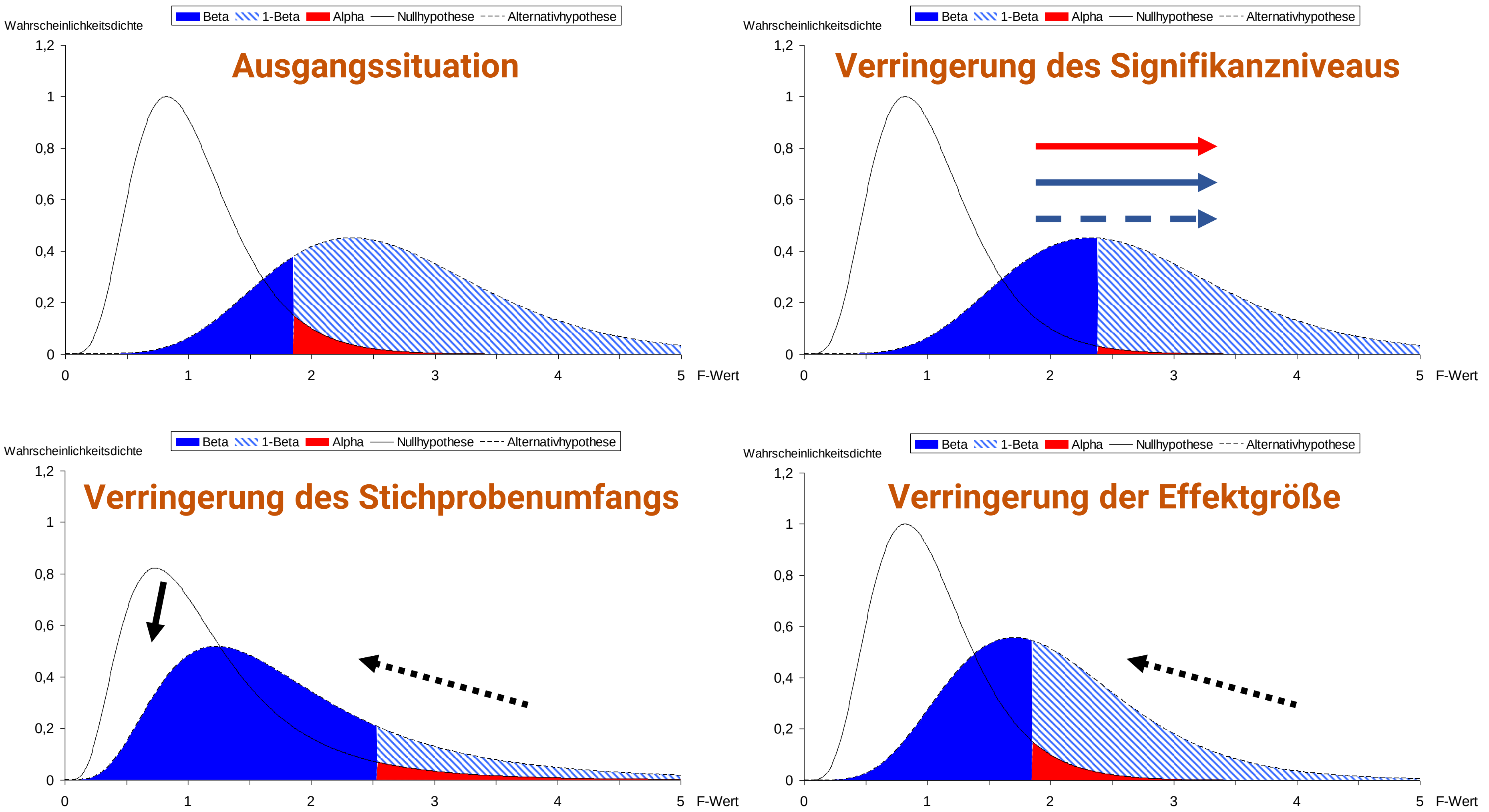
Quelle: Rasch, Friese, Hofmann und Naumann (2021)

Berechnung des Stichprobenumfangs mit GPower

- Beispiel: Berechnung des Stichprobenumfangs mit GPower für ein 2 x 2 faktorielles Design
  - ANOVA / *F*-Test
  - Signifikanzniveau: 0.05
  - Angenommene Effektgröße: *f* = 0.25 (mittlerer Effekt)
  - Gewünschte Teststärke: 0.80
  - Zählerfreiheitsgrade (Numerator df): 1
  - Anzahl an Gruppen: 4
- Benötigter Stichprobenumfang: 128



Zusammenfassung



Prüfungsliteratur

- Rey, G. D. (2020). *Methoden der Entwicklungspsychologie. Datenerhebung und Datenauswertung* (3., überarbeitete Auflage). Norderstedt BoD.

(Unter-)Kapitel	Taschenbuch	E-Book (ePUB)	Webseite
Stichprobenumfangsplanung	S. 129–151	S. 102–116	S. 102–126

- Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2021). *Quantitative Methoden 1: Einführung in die Statistik für Psychologie, Sozial- & Erziehungswissenschaften* (5. Aufl.). Heidelberg: Springer.
  - Der *t*-Test (S. 35–82)
- Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2021). *Quantitative Methoden 2: Einführung in die Statistik für Psychologie, Sozial- & Erziehungswissenschaften* (5. Aufl.). Heidelberg: Springer.
  - Einfaktorielle Varianzanalyse (S. 1–36)
  - Zweifaktorielle Varianzanalyse (S. 41–69)

Weiterführende Literatur I

- Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Berlin: Springer.
  - Hypothesentesten (S. 97–115)
- Eid, M., Gollwitzer, M., & Schmitt, M. (2017). *Statistik und Forschungsmethoden* (5. Aufl.). Weinheim: Beltz.
  - Grundlagen der Inferenzstatistik (S. 217–278)
- Leonhart, R. (2022). *Lehrbuch Statistik. Einstieg und Vertiefung* (5. Auflage). Bern: Huber.
  - Einführung in die inferenzstatistische Hypothesenprüfung (S. 195–230)

Weiterführende Literatur II

- Sedlmeier, P., & Renkewitz, F. (2018). *Forschungsmethoden und Statistik: Ein Lehrbuch für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (3. Aufl.). München: Pearson.
  - Signifikanztests (S. 369–406)
- Bühner, M., & Ziegler, M. (2017). *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (2. Aufl.). Hallbergmoos: Pearson Studium.
  - Versuchsplanung mit G*Power und R (S. 237–247)
- Döring, N., & Bortz, J. (2015). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. Aufl.). Berlin: Springer.
- O'Keefe, D. J. (2007). Post hoc power, observed power, a priori power, retrospective power, prospective power, achieved power: Sorting out appropriate uses of statistical power analyses. *Communication Methods and Measures, 1*, 291–299.