TECHNISCHE UNIVERSITÄT
IN DER KULTURHAUPTSTADT EUROPAS
CHEMNITZ

Professur Psychologie digitaler Lernmedien
Institut für Medienforschung Philosophische Fakultät

# Einführung in die Statistik

# Korrelation und Regression


Sherlock, Series II, Episode I, A Scandal in Belgravia (2012). BBC One.

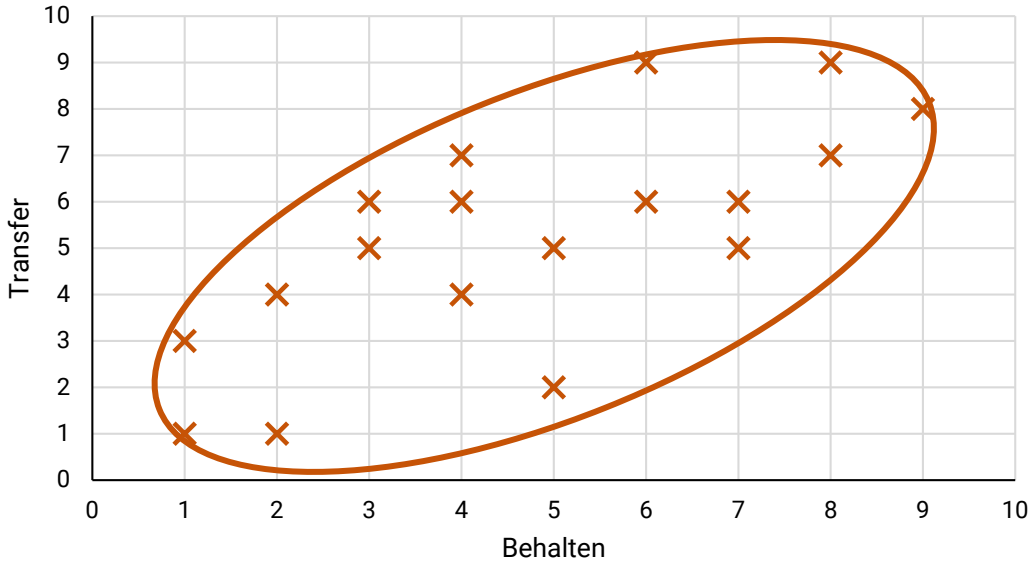
Prof. Dr. Günter Daniel Rey

# Überblick

- Kovarianz und Korrelation
- Korrelation und Kausalität
- Fishers *Z*-Transformation
- Signifikanz von Korrelationen
- Lineare bivariate Regression
- Methode der kleinsten Quadrate
- Nichtlineare Zusammenhänge
- Multiple Regression
- Indikatorcodierung
- Inferenzstatistische Voraussetzungen

# Einführung

- Zusammenhang zweier Variablen: Die Variablen variieren systematisch miteinander
- Fiktives Beispiel: Zusammenhang zwischen Behaltens- und Transferleistungen



# Kovarianz
# (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Kovarianz und Korrelation quantifizieren den Grad des Zusammenhanges
- Kovarianz zweier Variablen: Durchschnittliches Abweichungsprodukt aller Messwertpaare von ihrem jeweiligen Mittelwert
- Formel (vgl. Formel zur Varianz):

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

| | |
|---|---|
| $x_i$ | = Wert x der Person i |
| x | = Mittelwert von x |
| $y_i$ | = Wert y der Person i |
| $\bar{y}$ | = Mittelwert von y |
| n | = Anzahl an Personen |

- Kovarianz: Unstandardisiertes Maß für den Grad von Zusammenhängen

# Kovarianz

- Beispiel: Berechnung der Kovarianz für den rechts dargestellten Datensatz
- Berechnung:

$$\text{cov}(x, y) = \frac{(9.5 - 6.1) \cdot (9.0 - 6.5) + \ldots + (1.5 - 6.1) \cdot (2.0 - 6.5)}{5 - 1}$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{8.5 + 0.4 + 0.8 + 3.6 + 20.7}{4} = \frac{34}{4} = 8.5$$

- Ergebnis: Die Kovarianz beträgt 8.5

| VPN | IQ | Mathe |
|---|---|---|
| Sheldon | 9.5 | 9.0 |
| Leonard | 6.5 | 7.5 |
| Howard | 4.5 | 6.0 |
| Rajesh | 8.5 | 8.0 |
| Penny | 1.5 | 2.0 |
| *M* | 6.1 | 6.5 |

# Korrelation
# (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson gebräuchlichstes Maß für die Stärke des Zusammenhangs zweier (intervallskalierter) Variablen
- Korrelationskoeffizient *r* als standardisiertes (Effektstärke-)Maß für den Zusammenhang zweier Variablen
- Formel:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}_{\text{emp}}}{\text{cov}_{\text{max}}} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}$$

| | |
|---|---|
| $\text{Cov}_{\text{emp}}$ | = Empirische Kovarianz zwischen x und y |
| $\text{Cov}_{\text{max}}$ | = Maximale Kovarianz zwischen x und y |
| $\hat{\sigma}_x$ | = Standardabweichung (*SD*) von x |
| $\hat{\sigma}_y$ | = Standardabweichung (*SD*) von y |

- Wertebereich von *r* reicht von −1 bis +1
- Wichtig: Korrelationskoeffizient *r* nicht intervallskaliert und nicht als Prozentmaß des Zusammenhanges interpretierbar (i. G. zu $r^2$)

# Korrelation

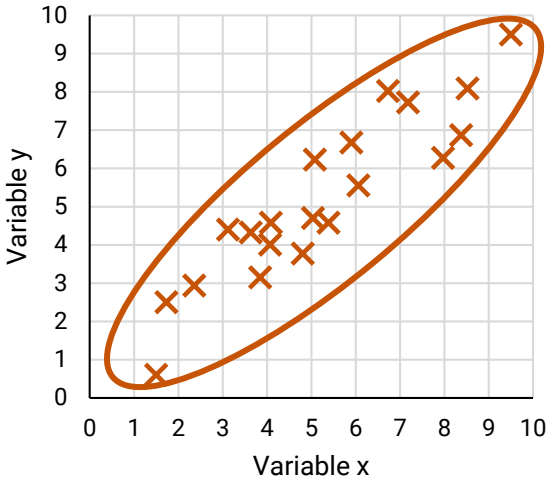
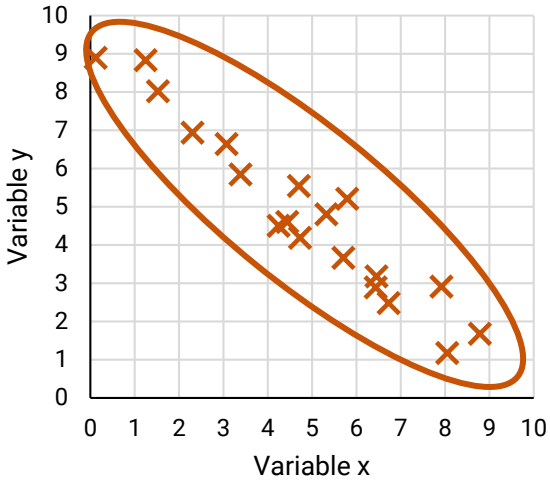
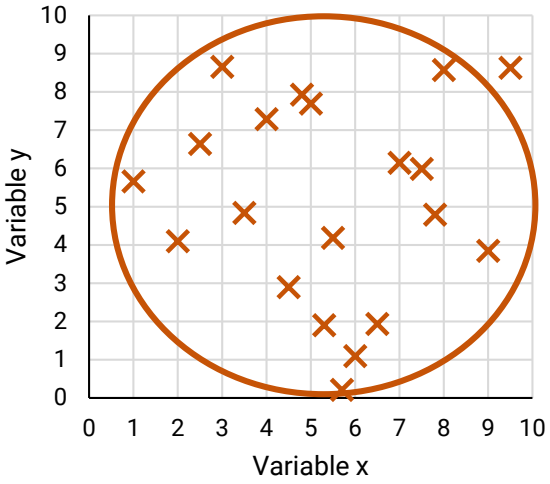
Wie hoch ist die (gerundete) Korrelation für den rechts dargestellten Datensatz?

- ☐ A: 0.97
- ☐ B: 1.00
- ☐ C: 0.79
- ☐ D: 0.85

| VPN | IQ | Mathe |
|---|---|---|
| Sheldon | 9.5 | 9.0 |
| Leonard | 6.5 | 7.5 |
| Howard | 4.5 | 6.0 |
| Rajesh | 8.5 | 8.0 |
| Penny | 1.5 | 2.0 |
| *M* | 6.1 | 6.5 |
| *SD* | 3.21 | 2.74 |

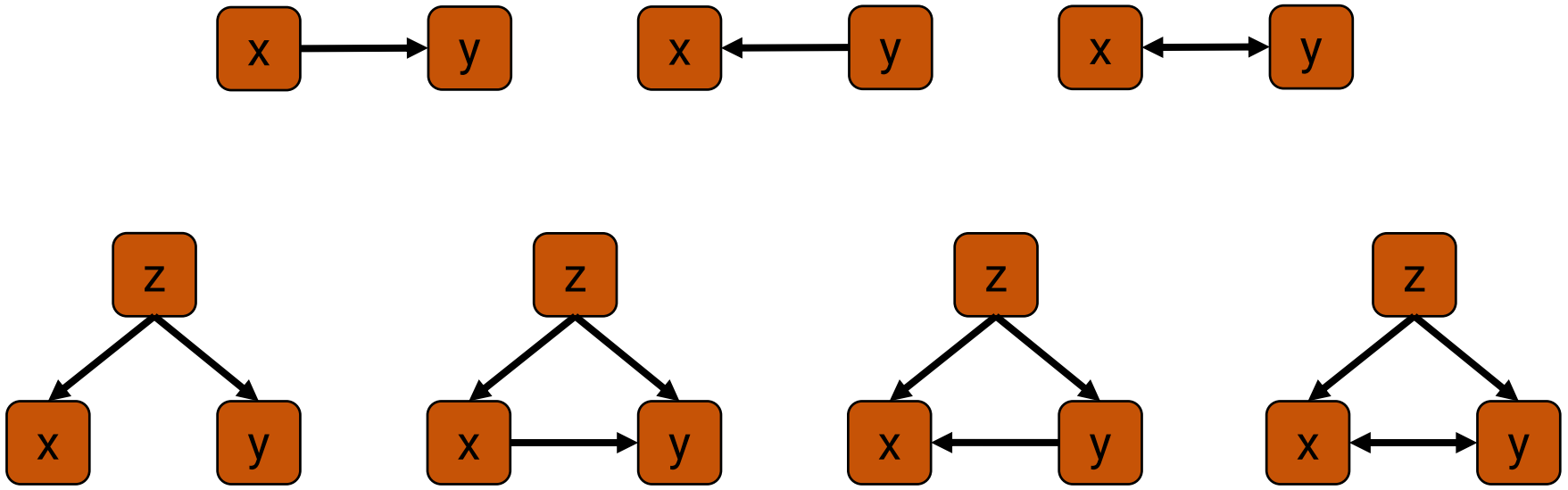
# Arten von Zusammenhängen

- Beispiele für Zusammenhänge zwischen zwei Variablen x und y:

| Hoher positiver Zusammenhang | Hoher negativer Zusammenhang | Kein Zusammenhang |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Positive Kovarianz | Negative Kovarianz | Kovarianz von (nahezu) Null |

# Korrelation und Kausalität (Rey, 2020)

- Wichtig: Korrelation und Kausalität sind nicht identisch
- Mögliche Ursachen für eine Korrelation zwischen den zwei Variablen x und y:



# Korrelation und Kausalität (Dubben & Beck-Bornholdt, 2006; Bortz & Schuster, 2010)

- Beispiele für hohe Korrelationen ohne Kausalzusammenhänge
  - Storchenpopulation und Geburtenrate
  - Einsatz von Feuerwehrleuten und Brandschäden
  - Globale Erwärmung und Lebenserwartung
  - Verweildauer im Krankenhaus und späterer Gesundheitszustand (negative Korrelation)
  - Kartoffelkonsum und Stromverbrauch (negative Korrelation)
- Aufdeckung von Scheinzusammenhängen aufgrund von Drittvariablen durch Partialkorrelationen
- Partialkorrelation: Korrelation zwischen Variablen, welche vom Einfluss einer oder mehrerer Drittvariablen statistisch bereinigt wurde

# Fishers *Z*-Transformation (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Problem: Berechnung von Mittelwerten aus Korrelationen aufgrund des fehlenden Intervallskalenniveaus nicht unmittelbar möglich
- Lösung: Fishers *Z*-Transformation (nicht mit der *z*-Standardisierung verwechseln!)
- Berechnungsschritte
  - Transformation der einzelnen Korrelationen in Fishers *Z*-Werte
  - Berechnung des Mittelwertes zu den Fishers *Z*-Werten
  - Rücktransformation dieses Mittelwertes in eine Korrelation
- Berechnung in Excel mittels der Funktionen „FISHER()“ und „FISHERINV()“
- Beispiel: Mittelwert aus $r = .10$ und $r = .90$ ist $r = .66$ und nicht $r = .50$

# Signifikanz von Korrelationen (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Signifikanztest für Korrelationen analog zum *t*-Test
- Formel:

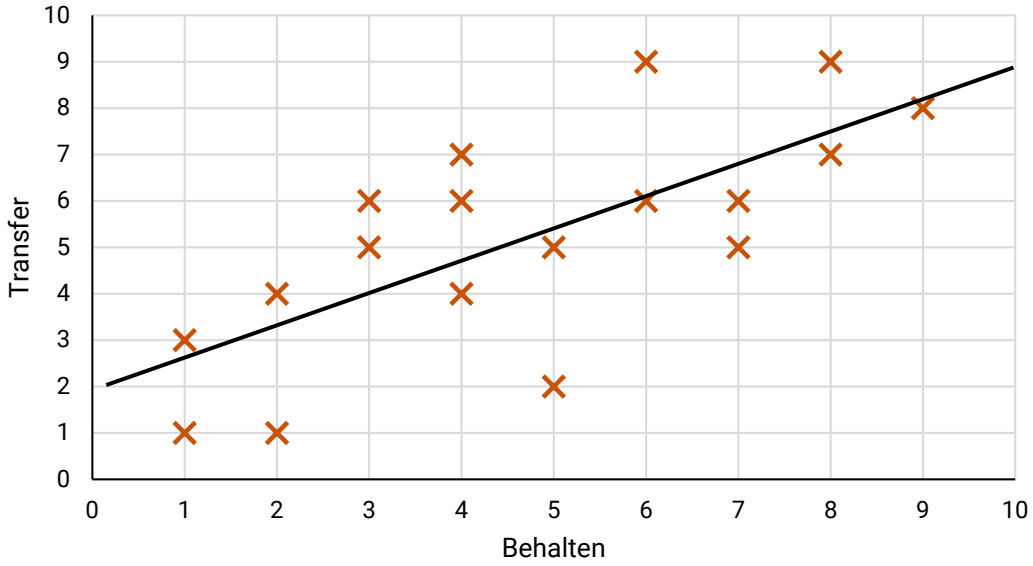
$$t(df) = \frac{r \cdot \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

*r* = Korrelation
*N* = Stichprobenumfang

- Formel für die Freiheitsgrade: df = *N* − 2
- Beispiel: In einer Studie mit 100 Studierenden korrelieren Behalten und Transfer mit *r* = 0.3
- Berechnung: $t(98) = \frac{0.3 \cdot \sqrt{100-2}}{\sqrt{1-0.3^2}} \approx \frac{0.30 \cdot 9.90}{0.95} \approx 3.11$
- Da $t_{emp} = 3.11 \geq t_{krit} = 1.66$ wird $H_0$ zugunsten der $H_1$ verworfen, d. h. das Ergebnis ist signifikant; $r = .3$, $t(98) = 3.11$, $p < .01$

# Lineare bivariate Regression (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Lineare bivariate Regression: Statistisches Verfahren zur Vorhersage einer Kriteriumsvariable durch eine Prädiktorvariable mittels linearer Funktion
- Fiktives Beispiel: Zusammenhang zwischen Behaltens- und Transferleistungen



# Lineare bivariate Regression

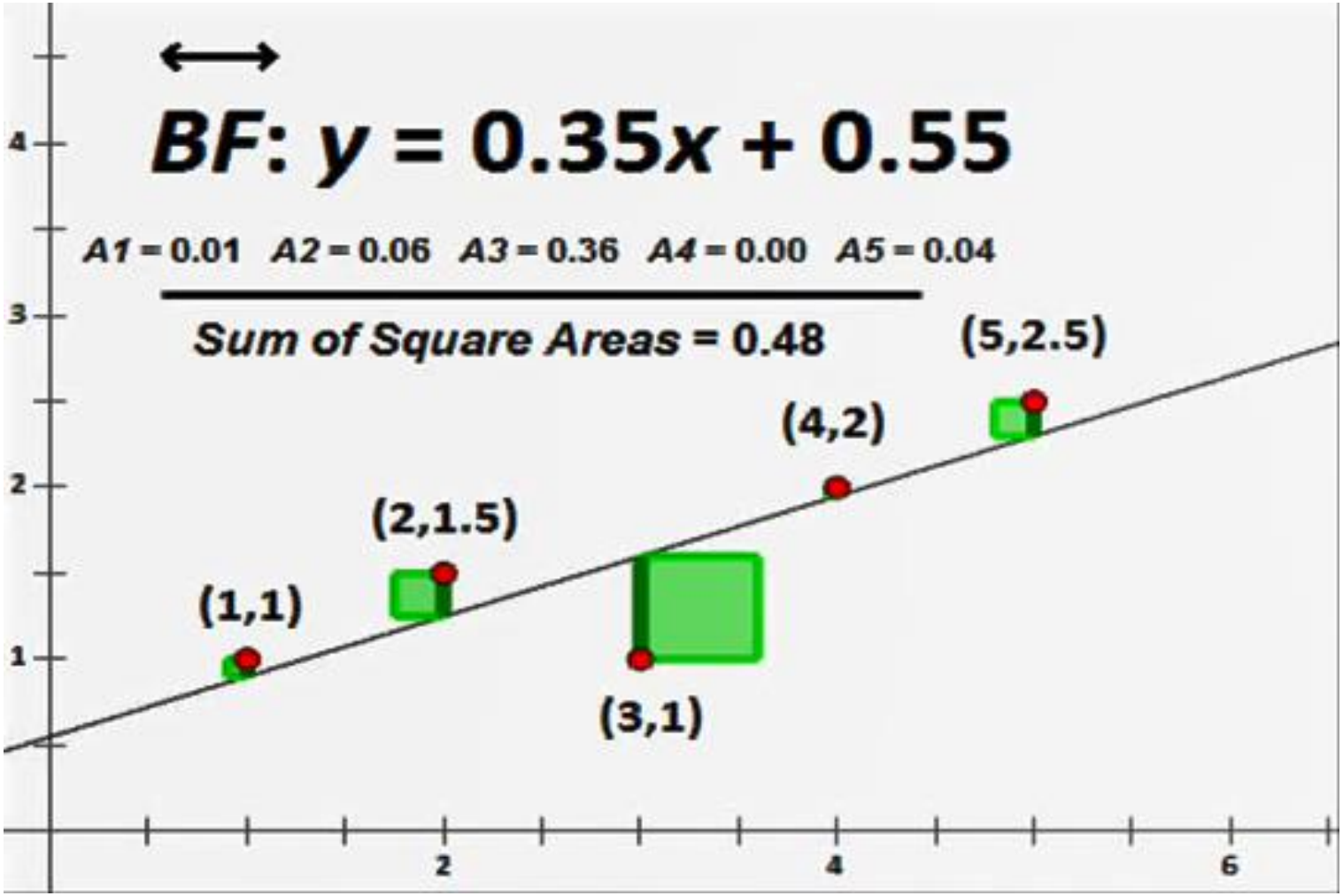
- Regressionsgrade soll den Gesamttrend der Einzelwerte bestmöglich wiedergeben
- Regressionsgleichung zur Regressionsgraden:

$$\hat{y} = m \cdot x + b$$

| | |
|---|---|
| $\hat{y}$ | = Vorhergesagte Kriteriumsvariable y |
| m | = Steigung der Regressionsgraden |
| x | = Prädiktorvariable x |
| b | = Achsenabschnitt der Regressionsgraden |

- Berechnung der Regressionsgewichte m und b mittels Methode der kleinsten Quadrate

# Methode der kleinsten Quadrate

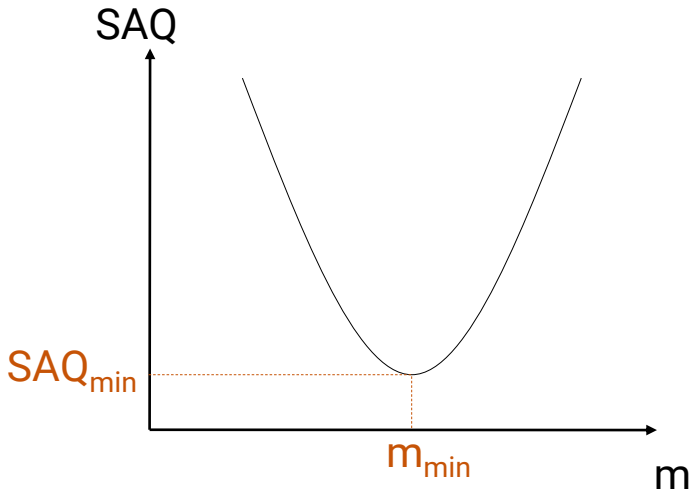



Quelle: http://www.youtube.com/watch?v=jEEJNz0RK4Q

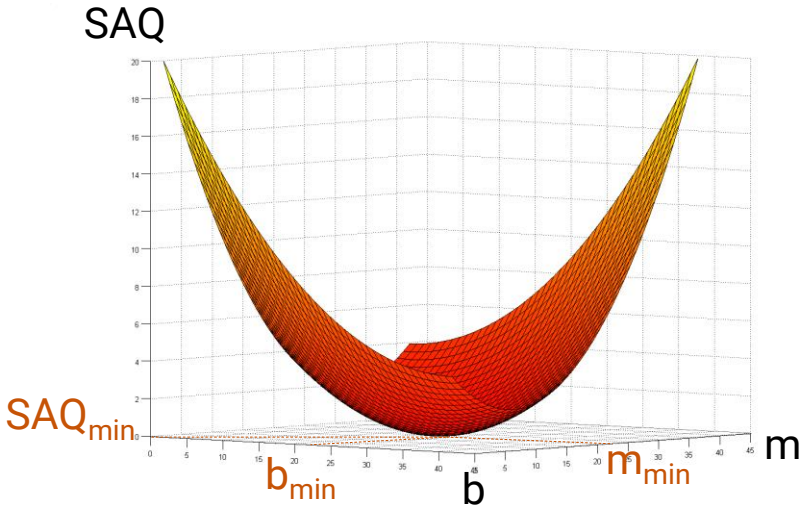
# Methode der kleinsten Quadrate

- Summe der Abweichungsquadrate (SAQ) soll ein Minimum ergeben
- Ein Gewicht: Parabel (→ Regressionsgerade durch Achsenursprung)
- Zwei Gewichte: Paraboloid (→ Regressionsgrade)

**Für ein Gewicht**




**Für zwei Gewichte**



# Methode der kleinsten Quadrate

- Summe der Abweichungsquadrate (SAQ) soll ein Minimum ergeben
- Formel:

$$SAQ = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (m \cdot x_i + b)]^2 = \min$$

- Erste Ableitung bilden und auf Null setzen ergibt für m und b:

$$m_{yx} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}$$

$$b_{yx} = \bar{y} - m_{yx} \cdot \bar{x}$$

| | |
|---|---|
| y | = Beobachtete Werte der Variablen y |
| ŷ | = Vorhergesagte Kriteriumsvariable y |
| m | = Steigung der Regressionsgraden |
| x | = Prädiktorvariable x |
| b | = Achsenabschnitt der Regressionsgraden |
| i | = Person i |

# Lineare bivariate Regression

- Beispiel: Berechnung von b und m zu dem rechts dargestellten Datensatz:

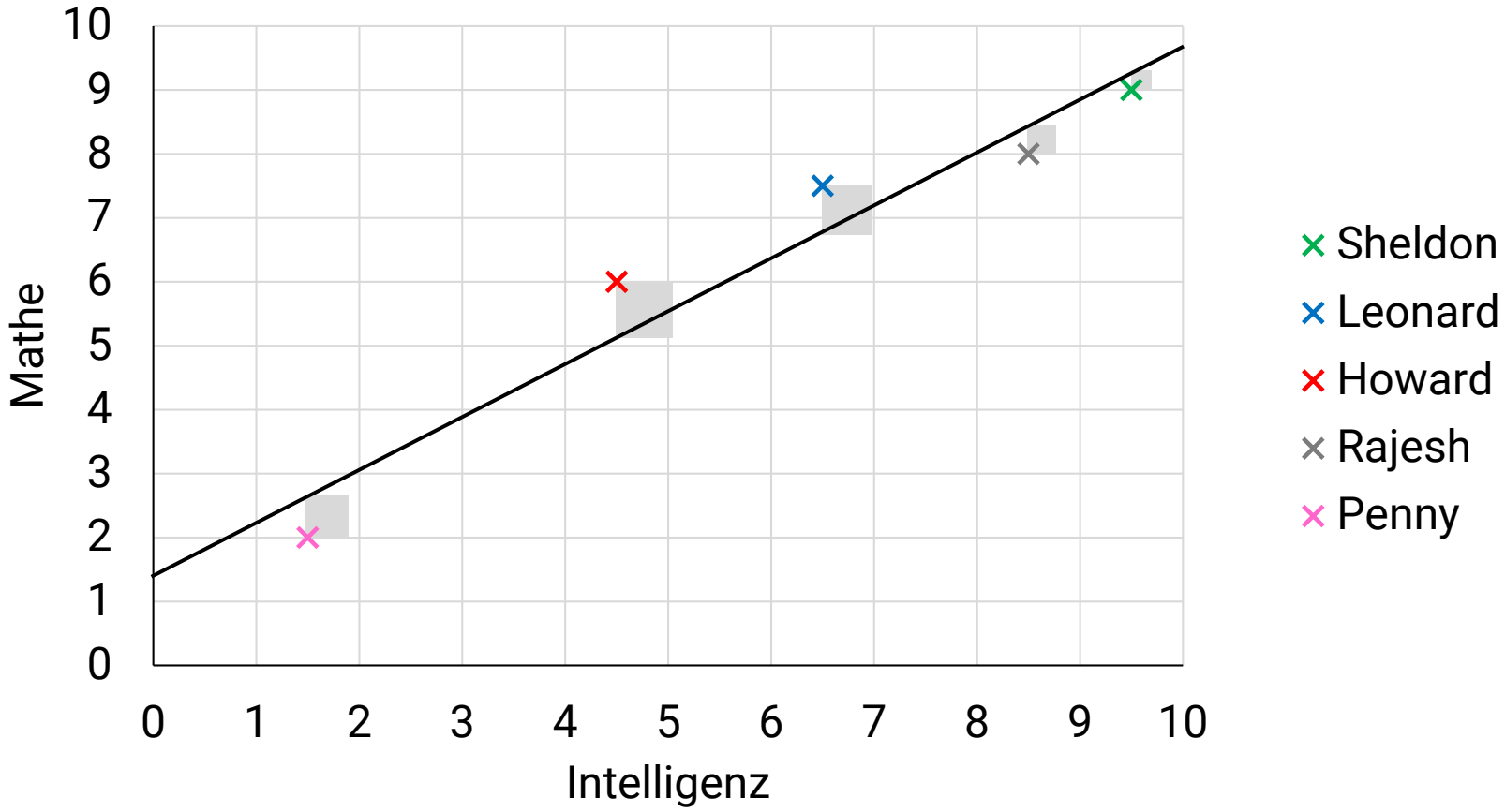
$$m_{yx} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \approx \frac{8.5}{3.21^2} \approx 0.82$$

$$b_{yx} = \bar{y} - m_{yx} \cdot \bar{x} \approx 6.5 - 0.82 \cdot 6.1 = 1.47$$

| VPN | IQ | Mathe |
|---|---|---|
| Sheldon | 9.5 | 9.0 |
| Leonard | 6.5 | 7.5 |
| Howard | 4.5 | 6.0 |
| Rajesh | 8.5 | 8.0 |
| Penny | 1.5 | 2.0 |
| *M* | 6.1 | 6.5 |
| *SD* | 3.21 | 2.74 |

# Lineare bivariate Regression

- Beispiel: Regressionsgrade mit b = 1.47 und m = 0.82:



# Lineare bivariate Regression

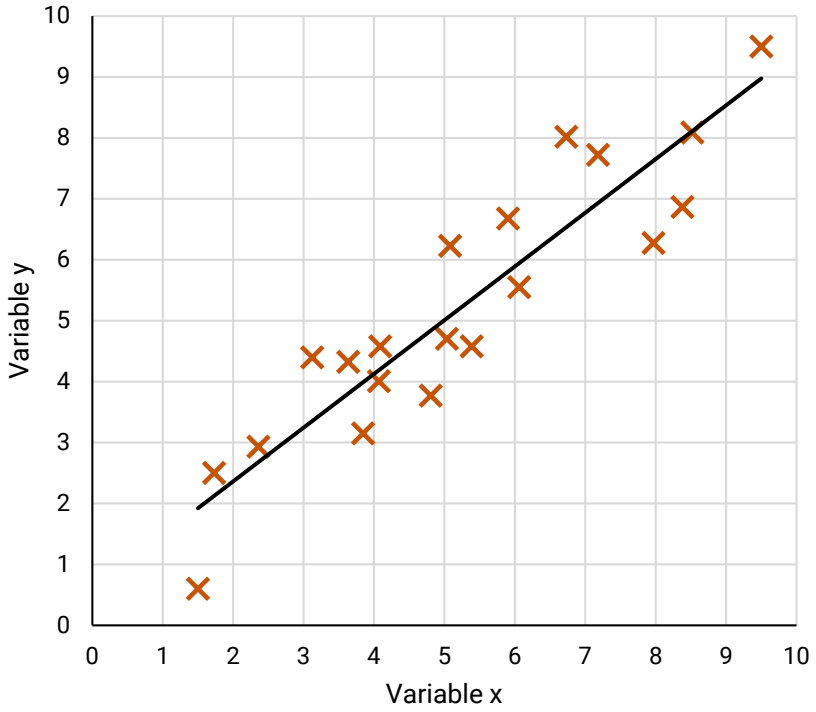
Wie hoch ist die Intelligenz laut Regressionsgleichung für das Beispiel auf der vorherigen Folie bei einer Person mit einem Mathewert von 4?

- ☐ A: 3
- ☐ B: 3.09 (gerundet)
- ☐ C: 4
- ☐ D: 4.75
- ☐ E: Wert kann nicht berechnet werden

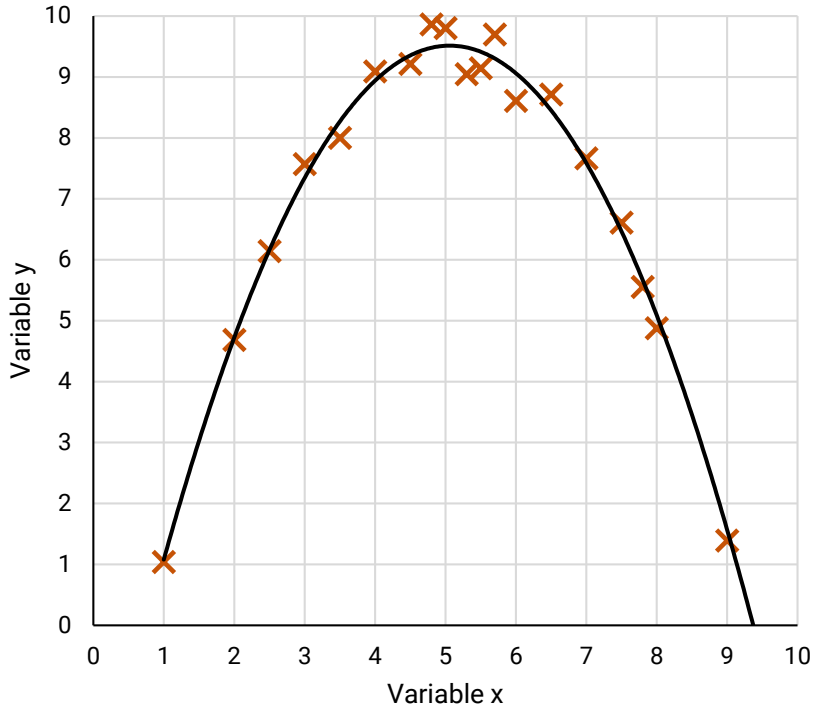
# Nichtlineare Zusammenhänge (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Beispiele für lineare und nonlineare Zusammenhänge

## Linearer Zusammenhang




## Nonlinearer Zusammenhang



# Multiple univariate Regression

- Definition: Statistisches Verfahren zur Vorhersage einer Kriteriumsvariable durch mehrere Prädiktorvar. mittels Linearkombination
- Regressionsgleichung zur Regressions(hyper-)ebene:

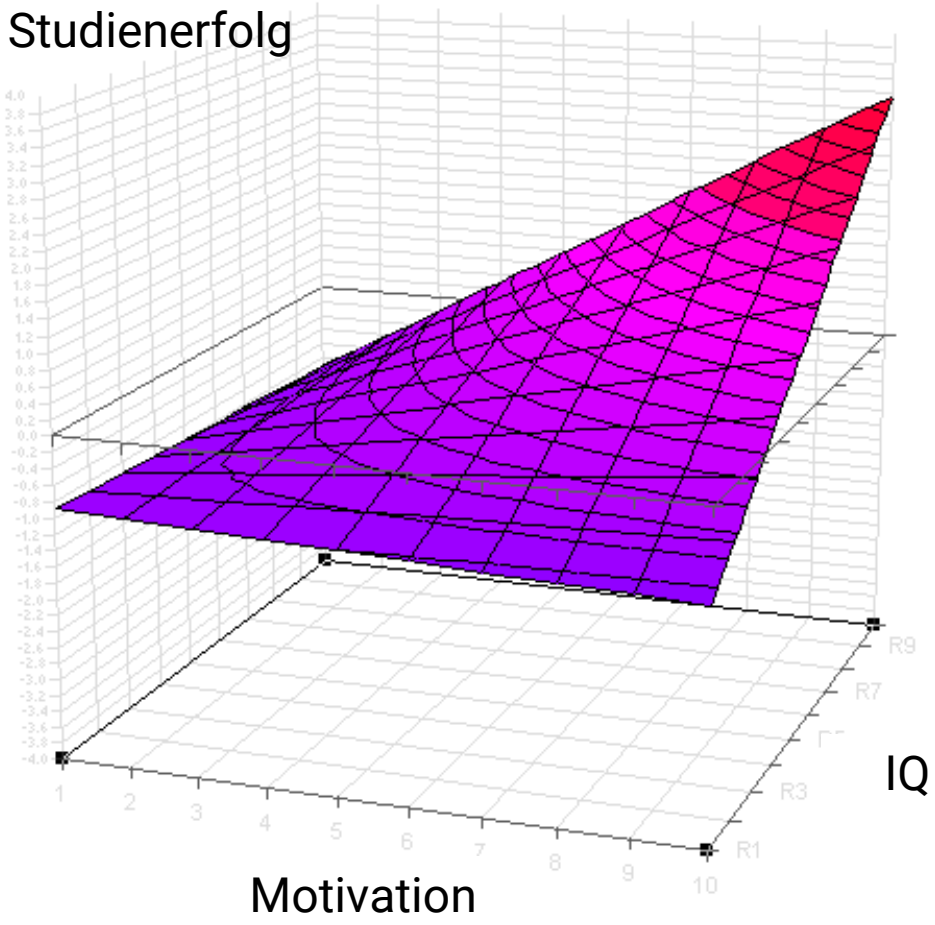
$$\hat{y} = 1 \cdot b_0 + x_1 \cdot b_1 + \ldots + x_m \cdot b_m$$

- Bestimmung der Regressionsgewichte (Beta-Gewichte) wieder mittels Methode der kleinsten Quadrate
- Unterschied zur linearen bivariaten Regression: Berechnung mit Matrizen statt mit Zahlen

| | |
|---|---|
| $\hat{y}$ | Vorhergesagte Kriteriumsvariable y |
| $b_0$ | Achsenabschnitt der Regressionsgraden |
| $x_1$ | Erste Prädiktorvariable |
| $b_1$ | Steigung zur ersten Prädiktorvariablen |
| $x_m$ | m-te Prädiktorvariable |
| $b_m$ | Steigung zur m-ten Prädiktorvariablen |

# Interaktionseffekte in der multiplen Regression

- Interaktionseffekt (bzw. Moderatoreffekt bzw. Wechselwirkungseffekt)
- Fiktives Beispiel: Studienerfolg nur dann hoch, wenn IQ ($x_1$) und Motivation ($x_2$) hoch sind
- $\hat{y} = 1 \cdot b_0 + x_1 \cdot b_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot b_3 + x_2 \cdot b_2$



# Inkrement und Dekrement in der multiplen Regression

- Beitrag zur  Varianzaufklärung: Für jede einzelne Prädiktorvariable lässt sich ein solcher Beitrag bestimmen
- Unterscheidung zwischen Inkrement und Dekrement
  - Inkrement ($R_I^2$): Zuwachs an aufgeklärter Varianz durch Hinzunahme weiterer Prädiktorvariablen
  - Dekrement ($R_D^2$): Abnahme an aufgeklärter Varianz durch Verzicht auf bestimmte Prädiktorvariablen

# Inkrement und Dekrement in der multiplen Regression

- Orthogonaler Fall (sämtliche Prädiktorvariablen sind unkorreliert): Addition der Einzelkorrelationen zur Berechnung von $R^2$ ; $R_I^2$ (bzw. $R_D^2$) = $r^2_{x_j,y}$
- Kollinearer Fall (Prädiktoren sind korreliert)
  - $R^2$ kleiner als Summe der Einzelkorrelationen durch Informationsüberschneidungen (häufiger Fall)
  - $R^2$ größer als Summe der Einzelkorrelationen: Suppressoreffekte durch Informationspräzisierung (seltener Fall)

$$R^2 = \sum_{j=1}^{m} r^2_{x_j,y}$$

$$R^2 < \sum_{j=1}^{m} r^2_{x_j,y}$$

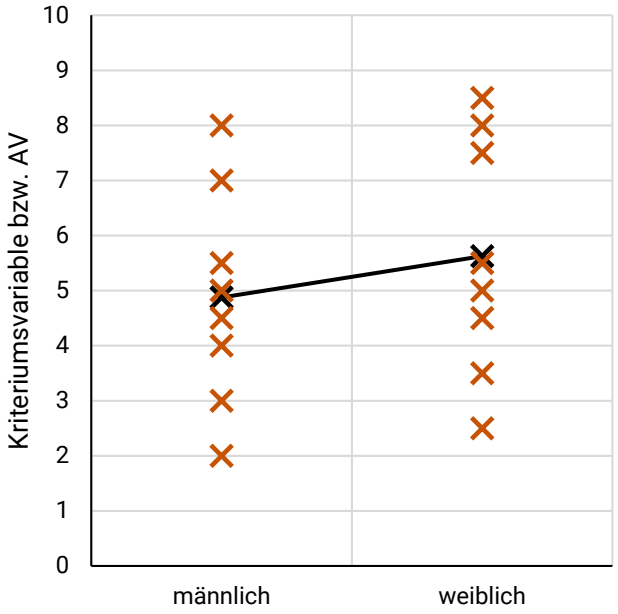
$$R^2 > \sum_{j=1}^{m} r^2_{x_j,y}$$

# Suppressorvariablen in der multiplen Regression

- Suppressorvariablen erhöhen die aufgeklärte Varianz durch Unterdrückung irrelevanter Varianzen anderer Variablen
- Bedingungen für eine Suppressorvariable
  - Keine oder geringe Korrelation mit der Kriteriumsvariable
  - Deutliche Korrelation mit mindestens einer Prädiktorvariable
  - Inkrement bzw. Dekrement der Variable ist (deutlich) größer als einfacher Determinationskoeffizient ($R^2$) der Suppressorvariable
- Beispiel: Berufserfolg (AV) wird durch Abschlussnote im Studium ($UV_1$) und Prüfungsangst ($UV_2$) vorhergesagt
- Prüfungsangst könnte als mögliche Suppressorvariable irrelevante Varianz in der Abschlussnote unterdrücken

# Indikatorcodierung

- Regressionsanalyse mittels Indikatorcodierung auch bei fehlendem Intervallskalenniveau der Prädiktorvariable(n) möglich
- Indikatorcodierung: Umrechnung von nominal- oder ordinalskalierten Prädiktorvariablen in künstliche, intervallskalierte Prädiktorvariablen
- Beispiel: Umrechnung der Variable Geschlecht in eine Indikatorvariable (z. B. ♂ = 0 und ♀ = 1)
- Äquidistanz: Diese Indikatorvariable enthält nur ein Intervall, welches zu sich selbst äquidistant ist und somit Intervallskalenniveau besitzt
- Wichtig: Durch Indikatorcodierung und das Allgemeine Lineare Modell gilt mathematisch: Varianzanalyse = Regressionsanalyse



# Inferenzstatistische Voraussetzungen (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

- Intervallskalenniveau der Kriteriumsvariable
- Normalverteilung der Kriteriumsvariable in der Population
- Unabhängigkeit der einzelnen Messwerte verschiedener Personen
- Homoskedastizität: Homogenität der Streuungen der zu einem x-Wert gehörenden y-Werte über den gesamten Wertebereich von x (vgl. inferenzstatistische Voraussetzungen der MANOVA ohne MW)

# Beispiele für Korrelationen und Regressionen in Fachzeitschriften

The data were analyzed by means of a 2 × 2 ANOVA with the learner's gender and the speaker's gender as between-factors. For the analysis of problem-solving performance, two additional control variables were included, namely the "Abiturnote" (i.e., final high school grade point average) and intrinsic motivation, resulting in a 2 × 2 ANCOVA. Both covariates showed a significant correlation with problem-solving performance (Abiturnote: $r = -.36$, $P = .001$, whereby better school grades were associated with better learning outcomes; intrinsic motivation: $r = .26$, $P = .02$, whereby higher intrinsic motivation was associated with better learning outcomes), but were independent from each other ($r = -.01$, $P = .94$). The results of the experiment are shown in Table 1.

Quelle: Linek, Gerjets und Scheiter (2010)

*Table 6.* Correlations between indices of game performance, pre-test and learning outcome

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) Level Reached | .99*** | .49** | .41* | .43* | .18 |
| (2) Unique Maths Tasks | | .55** | .38* | .44* | .20 |
| (3) All Maths Tasks | | | -.23 | .37* | .25 |
| (4) Accuracy | | | | .06 | -.14 |
| (5) Pre-test | | | | | -.01 |
| (6) Gain | | | | | |

Note. * = p<0.05, ** = p<0.01, *** = p<0.001 (two-tailed test of significance).

Quelle: Habgood und Ainsworth (2011)

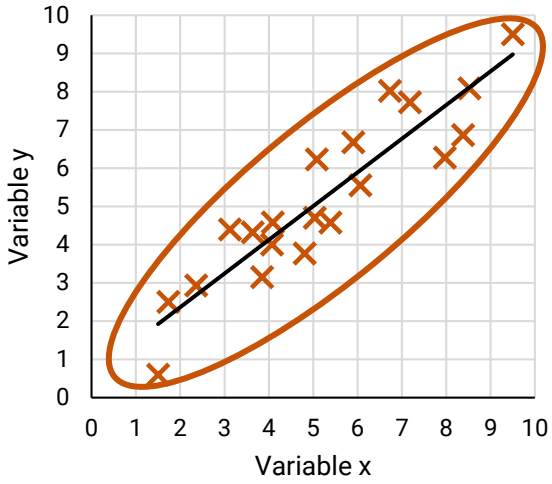
**Table 2**
Summary of regression analysis for variables predicting posttest scores.

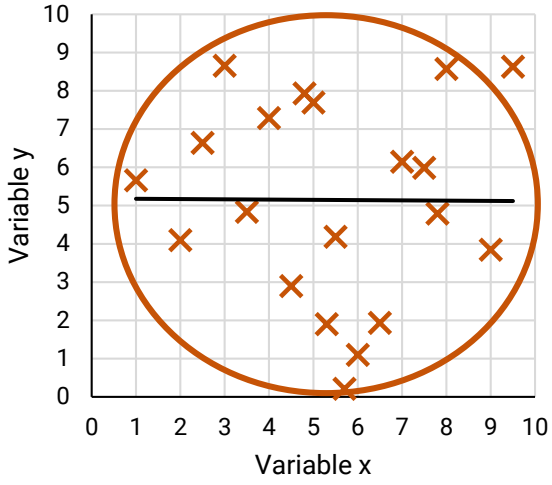
| Predictor variable | *B* | *SE* | *β* |
|---|---|---|---|
| Unique simulation experiments | 0.05 | 0.02 | 0.23 |
| Relations aspect model quality | −0.12 | 0.04 | −0.29 |

Quelle: Mulder, Lazonder und de Jong (2014)

# Zusammenfassung

- Kovarianz als unstandardisiertes und Korrelation als standardisiertes Maß zur Quantifizierung des Zusammenhanges zweier Variablen
- Korrelation und Kausalität sind nicht identisch
- Signifikanztest für Korrelationen analog zum *t*-Test
- Lineare bivariate Regression: Statistisches Verfahren zur Vorhersage einer Kriteriums-variable durch eine Prädiktorvariable mittels linearer Funktion
- Methode der kleinsten Quadrate zur Berechnung der Regressionsgewichte



# Prüfungsliteratur

- Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2021). *Quantitative Methoden 1: Einführung in die Statistik für Psychologie, Sozial- & Erziehungswissenschaften* (5. Aufl.). Heidelberg: Springer.
  - Merkmalszusammenhänge (S. 87–119)

# Weiterführende Literatur I

- Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Berlin: Springer.
  - Korrelation (S. 153–182)
  - Einfache lineare Regression (S. 183–202)
- Eid, M., Gollwitzer, M., & Schmitt, M. (2017). *Statistik und Forschungsmethoden* (5. Aufl.). Weinheim: Beltz.
  - Zusammenhänge zwischen zwei Variablen: Korrelations- und Assoziationsmaße (S. 529–587)
  - Abhängigkeiten zwischen zwei Variablen: Einfache lineare Regression (S. 589–613)
- Leonhart, R. (2022). *Lehrbuch Statistik. Einstieg und Vertiefung* (5. Auflage). Bern: Huber.
  - Korrelation und Regression (S. 261–378)

# Weiterführende Literatur II

- Sedlmeier, P., & Renkewitz, F. (2018). *Forschungsmethoden und Statistik: Ein Lehrbuch für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (3. Aufl.). München: Pearson.
  - Korrelation (S. 207–244)
  - Lineare Regression (S. 245–288)
- Rey, G. D. (2020). *Methoden der Entwicklungspsychologie. Datenerhebung und Datenauswertung* (3., überarbeitete Auflage). Norderstedt BoD.
  - Korrelation (S. 62–66)
- Dubben, H.-H., & Beck-Bornholdt, H.-P. (2006). *Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.