

Spezifischer elektrischer Widerstand

Name des Verfassers + Matrikelnummer¹, Name des Versuchspartners

Datum der Versuchsdurchführung

Name des Versuchsbetreuers²

1. Aufgabenstellung:

- 1) Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand eines Leiters und der Leiterlänge.
- 2) Bestimmen Sie den spezifischen elektrischen Widerstand von Konstantan.

2. Versuchsziel:

Messungen elektrischer Größen, Kennenlernen des spezifischen elektrischen Widerstandes.

3. Theoretische Grundlagen³

Einem Stromfluss I durch ein leitendes Medium wird je nach Material und geometrischen Gegebenheiten ein unterschiedlich großer Widerstand entgegengesetzt. Dieser Widerstand hat zur Folge, dass über dem Leiter eine Spannung U abfällt. Der elektrische Widerstand wird damit definiert als

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Die Einheit des elektrischen Widerstandes ist das Ohm: $[R] = 1 \Omega = 1 \text{ VA}^{-1}$. Für einen OHMSchen Widerstand nimmt der Wert des elektrischen Widerstandes mit wachsender Länge l und sinkendem Querschnitt des Leiters A zu. Die Proportionalitätskonstante zwischen R und den geometrischen Größen heißt spezifischer elektrischer Widerstand ρ_{el} und hat die Einheit $[\rho_{\text{el}}] = 1 \Omega \text{ m}$:

$$R = \rho_{\text{el}} \frac{l}{A}. \quad (2)$$

¹ Der Name des Verfassers ist eindeutig zu kennzeichnen, bspw. durch Unterstreichung.

² Der Name des Versuchsbetreuers ist für die Zuordnung der Protokolle zur Korrektur unbedingt erforderlich. Er ist ggf. während des Versuchstermines zu erfragen.

³ Die für die Durchführung und Auswertung des Versuches erforderlichen Grundlagen sind klar darzustellen. Verwendete Begriffe und Formelzeichen sind zu erklären, Gleichungen fortlaufend zu nummerieren. Es ist **nicht** ausreichend, nur Gleichungen aufzuführen. Übernahme von gesamten Texten aus der Versuchsanleitung, anderen Protokollen oder Lehrbüchern ist nicht gestattet (Plagiat), und darüber hinaus auch nicht lehrreich. Formulieren Sie die notwendigen Sachverhalte kurz und prägnant mit eigenen Worten.

Für mehrere, in einem Stromkreis in Reihe geschaltete elektrische Widerstände R_i erhält man für den Gesamtwiderstand

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (3)$$

wobei der gleiche Strom I durch jeden Einzelwiderstand fließt, die Spannungsabfälle U_i addieren sich und sind insgesamt so groß wie die Klemmspannung U_0 der Spannungsquelle. Konstantan ist eine Cu-Ni-Legierung, die zur technischen Realisierung elektrischer Widerstände (Drahtwiderstände) genutzt wird. Der spezifische elektrische Widerstand von Konstantan beträgt $\rho_{\text{el}} = 4,9 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$ [1]⁴.

4. Versuchsdurchführung⁵

Für die Versuche steht ein Regelwiderstand (Konstantan-Widerstandsdraht mit einer Gesamtlänge von 1 m) zur Verfügung. Teillängen können mit einem verschiebbaren Abgriff gewählt werden. Zur Bestimmung der Drahtlänge ist ein Maßstab mit Millimeter-Skalierung unter dem Draht befestigt. Zum Schutz des Widerstandsdrahtes insbesondere bei geringen Längen und demzufolge geringem Widerstand wird ein Schutzwiderstand mit $R_{\text{Schutz}} = 100 \Omega$ in Reihe geschaltet. Die Ursprungsspannung $U_0 = 2 \text{ V}$ wird einer Konstantspannungsquelle entnommen, für die Strom- und Spannungsmessungen kommen Digitalmultimeter zum Einsatz. Alle Messungen werden gemäß der Schaltung in Abb. 1 durchgeführt. Für die Bestimmung des elektrischen Widerstandes des Drahtes ist die gewählte Schaltung spannungsrichtig. Zur Untersuchung der Abhängigkeit zwischen Drahtlänge und elektrischem Widerstand werden zunächst für verschiedene, regelmäßig gewählte Drahtlängen Strom- und Spannungsabfall am Draht gemessen. Für die Berechnung des spezifischen elektrischen Widerstandes wird die Messung bei gesamter Drahtlänge verwendet. Der Drahtdurchmesser wird mittels Bügelmessschraube bestimmt.

⁴ Geben Sie verwendete Quellen an. Dies kann - bei einzelnen Quellen - als Fußnote oder gesammelt in einem Quellenverzeichnis am Ende des Protokolls geschehen. Für die Quelle(n) der Theoretischen Grundlagen genügt eine Quellenangabe am Anfang oder am Ende des Kapitels.

⁵ Die Versuchsdurchführung enthält Angaben zu den im Versuch verwendeten Mess- und Hilfsmitteln, eine eigene Skizze des Versuchsaufbaus sowie eine Kurzbeschreibung des Vorgehens bei der Durchführung der Experimente. Die Übernahme von Abbildungen aus der Versuchsanleitung ist unter Angabe der Quelle gestattet. Einfachere Versuchsaufbauten sollen per Hand skizziert werden.

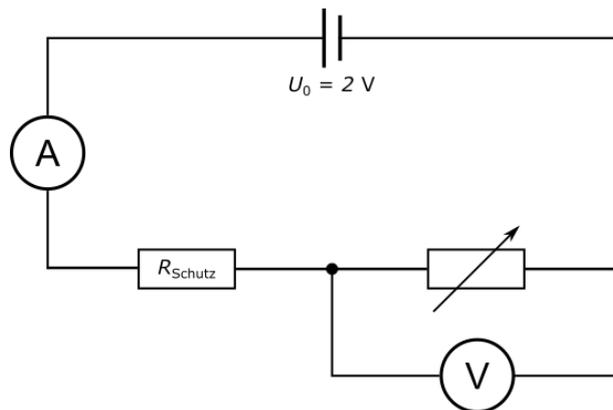


Abb. 16: Schaltung zur Bestimmung des elektrischen Widerstandes eines Regelwiderstandes.

4.1. Messdaten^{7,8}

Messung des Drahtdurchmessers

Die Dickenmessung erfolgt an drei verschiedenen Stellen mittels Bügelmessschraube⁹:

- systematischer Fehler lt. Garantiefehlerangabe: $\Delta l_{\text{sys}} = 5 \mu\text{m} + 1 \cdot 10^{-5} l$
- zufälliger Fehler (Ablesbarkeit der Skala): $\Delta l_{\text{zuf}} = 0,005 \text{ mm}$

Tab. 1: Messwerte des Drahtdurchmessers an verschiedenen Drahtpositionen

#	Drahtposition l/m	Drahtdurchmesser d/mm^{10}
1	0,25	0,495
2	0,50	0,500
3	0,75	0,495
$\langle d \rangle^{11}$		0,497 ¹²

Unter Verwendung des Mittelwertes des Drahtdurchmessers ergibt sich eine Gesamtunsicherheit von $\Delta d = 0,011 \text{ mm}$.

⁶ Abbildungen werden fortlaufend nummeriert und mit einer aussagekräftigen Bildunterschrift versehen.

⁷ Versuchsdurchführung und Messdaten können auch zu einem Abschnitt zusammengefasst werden. Dies ist insbesondere bei Versuchen mit mehreren Teilaufgaben sinnvoll, dann kann zu jeder Teilaufgabe das Vorgehen erläutert und im Anschluss die Messdaten aufgezeichnet werden. Achten Sie besonders in diesem Fall auf aussagekräftige Zwischenüberschriften mit physikalischem Inhalt - „Aufgabe 1“ ist nicht ausreichend.

⁸ Ihre Messdaten müssen vollständig im Protokoll aufgeführt sein. In handschriftlichen Protokollen tragen Sie Ihre Originalmessdaten direkt im Protokollheft ein - ein Messprotokoll auf einem gesonderten Blatt ist nicht zulässig!

⁹ Notieren Sie die verwendeten Messmittel, die zugehörigen Garantiefehlerangaben sowie eine Angabe für den zufälligen Fehler. Begründen Sie kurz diese Fehlerangaben.

¹⁰ Achten Sie auf korrekte Angabe der Einheiten in den Tabellen. Einheiten können auch in runden Klammern (...) angegeben werden.

¹¹ Mittelwerte berechnen Sie sinnvoll als zusätzliche Tabellenzeile am Ende. Gebräuchlich sind dazu die Schreibweisen \bar{d} bzw. $\langle d \rangle$, jedoch nicht \emptyset .

¹² Geben Sie eine **sinnvolle** Anzahl von Nachkommastellen an!

Strom- und Spannungsmessungen

Die Messschaltung wurde gemäß Abb. 1 aufgebaut. Für Strom- und Spannungsmessungen wurden Digitalmultimeter Voltcraft VC140 im jeweils angegebenen Messbereich verwendet.

- Spannungsmessung, 200 mV - Messbereich:
 $\Delta U_{\text{sys}} = 0,005 U + 0,2 \text{ mV}$, $\Delta U_{\text{zuf}} = 0,1 \text{ mV}$ (Ablesegenauigkeit 1 Digit)
- Strommessung, 20 mA - Messbereich:
 $\Delta I_{\text{sys}} = 0,01 I + 0,02 \text{ mA}$, $\Delta I_{\text{zuf}} = 0,01 \text{ mA}$ (Ablesegenauigkeit 1 Digit)

Die Längenmessung erfolgt mit dem am Drahthalter angebrachten Maßstab mit 1 mm - Skalierung. Abgelesen wurde an der Kante des verschiebbaren Abgriffes. Aufgrund der Breite der Kontaktstelle ist ein Gesamtfehler von $\Delta l_{\text{ges}} = 2 \text{ mm}$ für alle Längen anzusetzen.

Um einen guten elektrischen Kontakt sicherzustellen, musste der Abgriff vor jeder Messung bei einer neuen Länge mehrfach über den Draht geschoben werden, um so den ggf. vorhandenen Belag des Drahts zu entfernen. Der Abgriff musste zudem gut angedrückt werden. Ein guter Kontakt zeigte sich durch stabile Messwerte für Strom und Spannung. Bei schwankenden Anzeigen wurde der Draht nochmals durch Verschieben des Abgriffes gereinigt. Für die Messung bei voller Drahtlänge wurde nicht der verschiebbare Abgriff, sondern der zusätzliche Endkontakt am Drahthalter genutzt.

Tabelle 2: Messwerte von Spannung und Strom nach der Länge des Drahtes.

#	l/m	U/mV	$\Delta U/\text{mV}$	I/mA	$\Delta I/\text{mA}$
1	0,05	3,0	0,315	17,59	0,206
2	0,15	7,3	0,337	17,56	0,206
3	0,25	12,5	0,363	17,51	0,206
4	0,35	16,4	0,382	17,48	0,205
5	0,45	21,5	0,408	17,44	0,205
6	0,55	24,8	0,424	17,41	0,205
7	0,65	29,0	0,445	17,37	0,204
8	0,75	34,5	0,473	17,32	0,204
9	0,85	39,0	0,495	17,29	0,203
10	0,95	43,0	0,515	17,24	0,203
11	1,00	43,6	0,518	17,23	0,203

5. Auswertung¹³

Aufgabe 1 - Berechnung des elektrischen Widerstandes¹⁴

Für die einzelnen Drahtlängen wird der elektrische Widerstand gemäß Gleichung (1) berechnet (siehe Tab. 3). Exemplarisch für Messwert 11 (gesamter Draht) ergibt sich:

$$R_{11} = \frac{43,6 \text{ mV}}{17,23 \text{ mA}} = 2,53 \Omega.$$

Tabelle 3: Berechneter Widerstand nach der Länge des Drahtes.

#	l/m^{15}	R/Ω
1	0,05	0,171
2	0,15	0,416
3	0,25	0,714
4	0,35	0,938
5	0,45	1,233
6	0,55	1,424
7	0,65	1,670
8	0,75	1,992
9	0,85	2,256
10	0,95	2,494
11	1,00	2,530

Die Abb. 2 zeigt den Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand des Drahtes und seiner wirksamen Länge. Die eingezeichnete Ursprungsgerade ergibt sich aus einem visuellen Ausgleich und gemäß Gleichung (2): $R \propto l$.

¹³ Stellen Sie die Berechnungen anhand Ihrer Messwerte nachvollziehbar dar. Verweisen Sie anhand der Gleichungsnummern auf die in der Vorbereitung genannten Gleichungen. Setzen Sie einmal exemplarisch in die Gleichungen ein und führen Sie eine Einheitenrechnung durch. Die Ergebnisse der weiteren Rechnungen können dann in Tabellenform zusammengefasst werden. Diskutieren Sie Ihre Messergebnisse und Diagramme hier ausführlich.

¹⁴ Wählen Sie auch hier sinnvolle Zwischenüberschriften.

¹⁵ Für die Übersichtlichkeit und auch zur handlichen Zusammenstellung für die folgende graphische Darstellung der Messwerte kann es sinnvoll sein, einzelne Tabellenspalten aus der Messwertetabelle zu wiederholen.

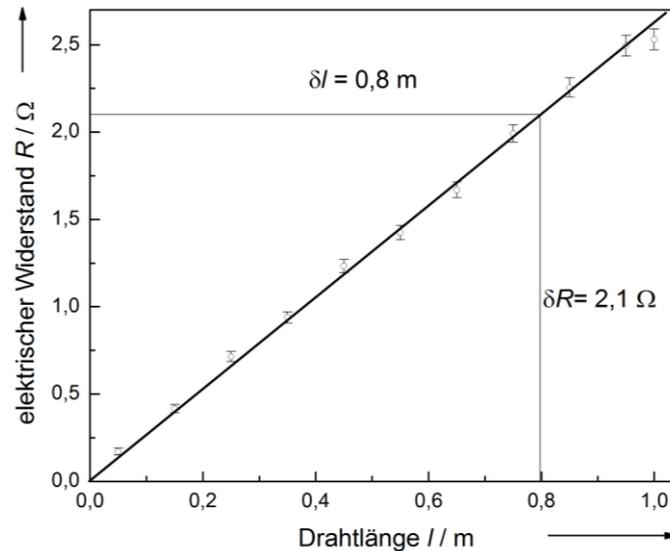


Abb. 2: Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand des Drahtes und seiner Länge^{16,17,18}

Fehlerbetrachtung

Gemäß Gleichung (1) ergibt sich für den Fehler des elektrischen Widerstandes bei Messung von Strom und Spannung

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \Delta I \right| = \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right|. \quad (4)$$

Division von Gleichung (4) durch Gleichung (1) liefert für den relativen Fehler

$$\frac{\Delta R}{R} = \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right|. \quad (5)$$

Für den Widerstand des Gesamtdrahtes ergibt sich mit Gleichung (5):

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{0,518 \text{ mV}}{43,6 \text{ mV}} + \frac{0,203 \text{ mA}}{17,23 \text{ mA}} = 0,0237.$$

¹⁶ Beachten Sie die Hinweise zur Diagrammgestaltung. Insbesondere sind die Messpunkte (wenn möglich inkl. Fehlerkreuze) deutlich einzuzichnen und nicht einzeln zu verbinden. Zeichnen Sie eine Kurve gemäß den Erwartungen (hier: linear), auf jeden Fall aber stetig (d.h.: frei Hand, ein durchgängiger Kurvenverlauf), ein.

¹⁷ Diagramme sind an der richtigen Stelle im Protokoll einzukleben. Eine an das Protokollende getackerte Sammlung vieler A4-Blätter ist nicht akzeptabel. Lose Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt.

¹⁸ Ggf. kann ein Diagramm mit Fehlerbalken nach der Fehlerbetrachtung platziert werden. Befindet sich ein solches Diagramm vor der Fehlerbetrachtung, muss in der Abbildungsunterschrift auf die Quelle der Fehlerbalken verwiesen werden.

¹⁹ Zweckmäßig leiten Sie die Fehlerformeln vor dem Versuch ab. Sie können Sie dann auch im Abschnitt „Theoretische Grundlagen“ angeben und Ihrem Versuchsbetreuer zur Kontrolle vorlegen.

²⁰ Geben Sie wenn möglich Fehlerformeln für den relativen Fehler an - diese sind meist kompakter und erleichtern Ihnen das Berechnen der Fehlerwerte.

Aufgabe 2 - Berechnung des spezifischen Widerstandes

Der spezifische Widerstand kann nach Gleichung (2) berechnet werden. Für die Querschnittsfläche kann bei Kenntnis des Durchmessers $A = \frac{\pi}{4} d^2$ eingesetzt werden. Es wird der Messwert für die gesamte Drahtlänge verwendet.

$$\rho_{\text{el}} = \frac{RA}{l} = \frac{\pi R d^2}{4l} = \frac{\pi \cdot 2,530 \Omega \cdot (0,497 \cdot 10^{-3})^2 \text{m}^2}{4 \cdot 1 \text{ m}} = 4,85 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}.$$

Alternativ ergibt sich unter Verwendung des an der Ausgleichsgeraden in Abb. 2 markierten Anstiegsdreiecks:

$$\rho_{\text{el}} = \frac{\delta RA}{\delta l} = \frac{\pi \delta R d^2}{4 \delta l} = \frac{\pi \cdot 2,1 \Omega \cdot (0,497 \cdot 10^{-3})^2 \text{m}^2}{4 \cdot 0,8 \text{ m}} = 5,093 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}.$$

Im Experiment wurde der Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand eines Drahtes und dessen Länge untersucht. Es zeigt sich in Abbildung 2 der erwartete lineare Zusammenhang (siehe Gl. (2)): Mit zunehmender Länge des Widerstandsdrahtes steigt dessen elektrischer Widerstand.

Im Umkehrschluss heißt das, dass die elektrischen Eigenschaften des Drahtes über die gesamte Länge im Rahmen der Messgenauigkeit konstant sind. Insbesondere konnte an allen Messpunkten ein gleich guter Kontakt zwischen Draht und Abgriff erzielt werden. Die Messung bei gesamter Drahtlänge ergibt einen nach unten von der Ausgleichsgeraden abweichenden Wert. Diese Abweichung ist sicher auf den geringeren Kontaktwiderstand zurückzuführen, denn für diesen Wert wurde nicht der verschiebbare Abgriff, sondern ein separater Endkontakt am Drahthalter genutzt.

Fehlerbetrachtung

Mit Gleichung (2) und der eingesetzten Querschnittsfläche erhält man für den Fehler des spezifischen Widerstandes

$$\Delta \rho_{\text{el}} = \left| \frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial l} \Delta l \right| + \left| \frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial d} \Delta d \right| = \frac{\pi}{4} \left(\left| \frac{d^2}{l} \Delta R \right| + \left| \frac{2d}{l} \Delta d \right| + \left| -\frac{d^2}{l^2} \Delta l \right| \right).$$

Division durch die Berechnungsgleichung für den spezifischen Widerstand liefert für den relativen Fehler

$$\frac{\Delta \rho_{\text{el}}}{\rho_{\text{el}}} = \left| \frac{\Delta R}{R} \right| + \left| \frac{2 \Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta l}{l} \right|.$$

Für die Einzelmessung bei gesamter Drahtlänge erhält man²¹

$$\frac{\Delta \rho_{\text{el}}}{\rho_{\text{el}}} = 0,0237 + 2 \cdot \frac{0,011 \text{ mm}}{0,497 \text{ mm}} + \frac{2 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} = 0,0237 + 0,0221 + 0,002 = 0,0478.$$

²¹ Zweckmäßig ist es, die Beiträge der einzelnen Messgrößen zum Gesamtfehler als Zwischenschritt zu notieren. Sie können dann für die Diskussion Ihrer Ergebnisse erkennen, wo insbesondere Fehlerbeiträge auftreten und welche der Einzelmessungen nur eine untergeordnete Bedeutung für die Messgenauigkeit besitzt.

Für den mit den verschiedenen Rechenwegen bestimmten spezifischen elektrischen Widerstand ergeben sich die absoluten Messunsicherheiten²² von

$$\Delta\rho_{\text{el}} = 0,2318 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m},$$

$$\Delta\rho_{\text{el}} = 0,2430 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}.$$

Für die Berechnung des spezifischen Widerstandes aus dem Anstieg der Ausgleichsgeraden ist wegen der Nutzung mehrerer Messwerte der Gesamtfehler sicher nicht größer als für die Nutzung eines einzelnen Messwertes. Der angegebene relative Fehler wird daher auch für diesen Wert übernommen. Die Fehlerrechnung zeigt, dass die Messabweichungen für den spezifischen elektrischen Widerstand etwa zu gleichen Teilen durch die Messung der elektrischen Größen und die Bestimmung der geometrischen Größen verursacht werden. Insbesondere die Messung des Durchmessers trägt stark bei, da bei kleinen Längen der Fehler groß ist und deren Wert quadratisch in die Endgleichung eingeht. Die Präzision bei der Drahtlängenmessung ist demgegenüber untergeordnet, so dass auch ein genaueres Ablesen der Drahtlänge am Abgriff keine Verringerung der Messunsicherheit mit sich bringt.

²² Sie benötigen jeweils die absolute und die relative Messunsicherheit für jede Ihrer Ergebnisgrößen. Wählen Sie den für Sie zweckmäßigen Rechenweg: Entweder berechnen Sie den Wert des absoluten Fehlers anhand der Fehlerformel und erhalten den Wert des relativen Fehlers durch Division durch Ihr Ergebnis, oder Sie leiten, wenn möglich eine (oftmals kompaktere) Formel für den relativen Fehler ab und erhalten den Wert für den absoluten Fehler durch Multiplikation mit Ihrem Ergebniswert.

6. Ergebnisse und Diskussion²³

Der spezifische elektrische Widerstand des Drahtmaterials Konstantan wurde aus der Einzelmessung zu²⁴

$$\rho_{\text{el}} = (4,85 \pm 0,24) \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}, \quad \frac{\Delta\rho_{\text{el}}}{\rho_{\text{el}}} = 5 \%$$

bzw. unter Verwendung sämtlicher Messwerte im Sinne einer Regression zu

$$\rho_{\text{el}} = (5,09 \pm 0,25) \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}, \quad \frac{\Delta\rho_{\text{el}}}{\rho_{\text{el}}} = 5 \%$$

bestimmt. Im Rahmen der Fehlergrenzen stimmen beide Ergebnisse überein²⁵. Ebenso ist eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit dem genannten Literaturwert festzustellen [1]²⁶. Der lineare Zusammenhang zwischen elektrischem Widerstand und Drahtlänge konnte in der Abbildung 2 aufgezeigt werden.

²³ Stellen Sie die Endergebnisse Ihres Versuches in logischer Reihenfolge zusammen und bewerten Sie diese. Zwischenergebnisse (wie hier bspw. die Berechnung des Gesamtwiderstandes des Drahtes) interessieren hier nicht. In diesem Abschnitt erfolgen keine Rechnungen - ausgenommen Umrechnungen von Literaturgrößen oder Überschlagsrechnungen zu Vergleichszwecken.

²⁴ Geben Sie jedes Ergebnis mit der zugehörigen (absoluten und relativen) Messunsicherheit an. Während der absolute Fehler den Vergleich der Werte vereinfacht, lässt der relative Fehler die Einschätzung der Größe der Messunsicherheit als solches zu. Achten Sie auf die Einhaltung der **Rundungsregeln!** Setzen Sie Ihre Ergebnisse übersichtlich vom Fließtext ab.

²⁵ Sie können Ihre Messdaten am einfachsten einordnen, wenn Sie Vergleichsmöglichkeiten heranziehen. Dies können mehrere Ihrer Ergebnisse untereinander und Literaturangaben (mit Quelle!) sein. Beziehen Sie in die Vergleiche die angegebenen Messunsicherheiten ein.

²⁶ Kommentare, ob der Versuch gut, schön, geeignet, lehrreich etc. war, gehören nicht in die Zusammenfassung. Konstruktive Kommentare dieser Art können Sie per E-Mail an die Praktikumsleitung schicken, wir nutzen Ihre Hinweise gern zur Verbesserung unseres Versuchsangebots.

Literatur

[1] Schenk, Kremer (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*, 13. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag **2011**.