17. Wellenausbreitung

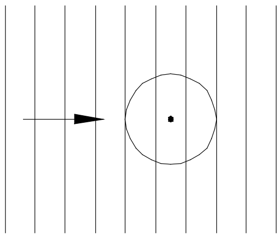
Im Folgenden werden einige allgemeine Prinzipien / Beschreibungsmöglichkeiten / Verhaltensweisen / Eigenschaften von Wellen behandelt. Sie gelten für alle Wellen. Bei konkreten Wellen (z.B. Schall, Licht, Funkwellen, ...) treten allerdings bestimmte dieser Erscheinungen in unterschiedlicher Weise in den Vordergrund. Dort[1] werden sie gegebenenfalls auch noch vertieft.

17.1. Streuung

– ... ist die Wechselwirkung einer Welle mit einem Hindernis. Sehr vielfältig! **!**

- Lichtwelle an einem Staubkorn in der Luft
- elastische Welle im Festkörper an einem Hohlraum (Luftblase) im Festkörper
- Schallwelle an einem Hindernis („Kind hinter einem Baum“)
- Wasserwelle am Pfahl im Wasser

– kleines Hindernis, a << λ:



$\Rightarrow$ Kugel-Streuwelle

(liefert Information über Existenz des Hindernisses, **nicht** über seine Form)

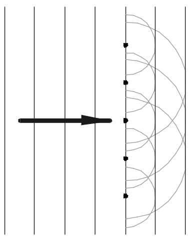
– Hier also: Hindernis als Streuzentrum; gestreute Welle hat feste Phasenbeziehung mit der Primärwelle $\rightarrow$ ***kohärente Streuung***

– Gegensatz: Hindernis gibt Wellenenergie verzögert ab $\Rightarrow$ konstante Phasenbeziehung geht verloren $\rightarrow$ ***inkohärente Streuung***

17.2. Das HUYGENSsche Prinzip (HUYGENS-FRESNELsches Prinzip)

– Man kann Wellenausbreitung sehr gut verstehen, wenn man sich vorstellt, dass jeder Punkt, der von einer Welle getroffen wird, wieder zum Ausgangspunkt einer Kugel- (3D) oder Kreiswelle (2D) wird. **!**

– Dies ist trivial für ungestörte Wellenausbreitung, z.B. ebene Welle:

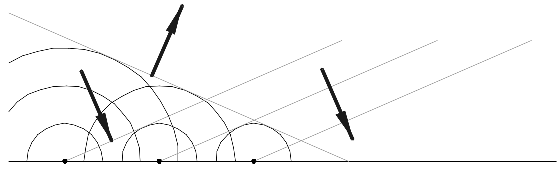


– Interessant und lehrreich wird es, wenn Hindernisse auftreten:

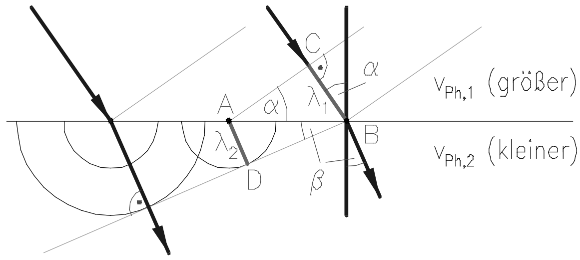
[1] d.h. an entsprechender Stelle im Rahmen der Vorlesung

– ***Reflexion***:

⇒ Einfallswinkel = Ausfallswinkel



– Übergang in ein Medium mit anderer Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit):



$$\left.\begin{aligned} v_{Ph,1} &= \frac{\lambda_1}{T} \\ v_{Ph,2} &= \frac{\lambda_2}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{v_{Ph,1}}{v_{Ph,2}} = \frac{\lambda_1 / \overline{AB}}{\lambda_2 / \overline{AB}} \quad \Bigg| \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}$$

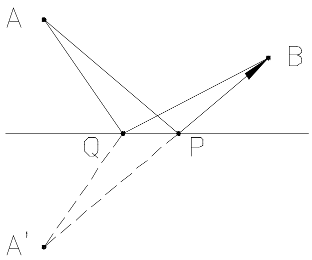
$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\overline{AB}} &= \sin\alpha \\ \frac{\lambda_2}{\overline{AB}} &= \sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{v_{Ph,1}}{v_{Ph,2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (1)$$

Dies ist das aus der Optik bekannte ***Brechungsgesetz***, das für alle Wellen gilt!

17.3. Das FERMATsche Prinzip

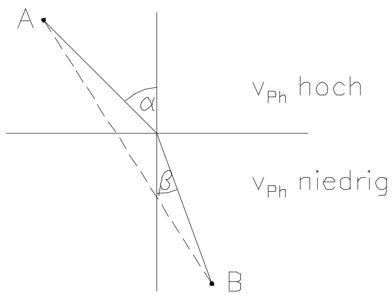
– Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten immer so, dass sie dazu möglichst wenig Zeit braucht. **!**

– Sehr allgemeines Prinzip! Reflexions- und Brechungsgesetz sind Sonderfälle davon.



A → P → B ist kürzester Weg, weil
A' → P → B auf einer Gerade liegen.

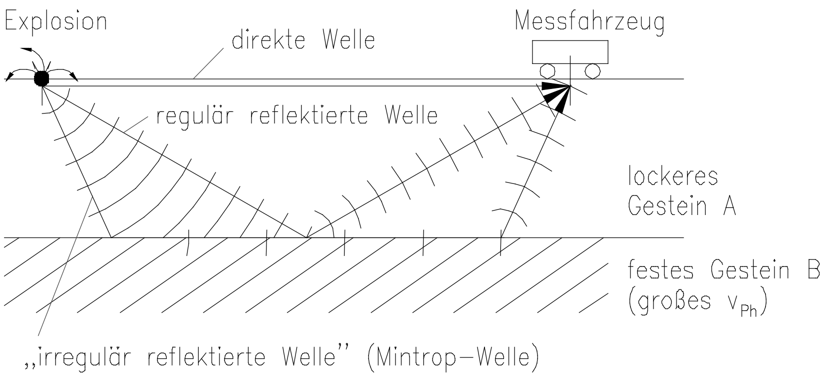
Jedes A → Q → B wäre länger,
weil A' → Q → B länger ist!



Plausibilitätserklärung:

Weg lt. Brechungsgesetz nutzt die höhere Phasengeschwindigkeit bestmöglich aus.

– **Beispiel:** geologische Untersuchung ■



Kommentar: ◆

Jede der drei Wellen folgt für sich dem FERMATschen Prinzip:

a) die direkte Welle, die sich geradlinig ausbreitet,
b) die Mintrop-Welle, die die schnellste nicht-direkte Welle ist,
c) die sogenannte regulär reflektierte Welle, die existiert, weil an der Grenzfläche A ↔ B nicht alle Intensität durchgehen darf und die („für sich optimiert") dem Reflexionsgesetz folgt.

– Woher wissen die Wellen den kürzesten Weg?

Dies ist nicht leicht vorstellbar. Oft ist es zu erklären mit dem Argument, dass die nicht optimalen Wellen destruktiv interferieren und sich auslöschen.

17.4. Beugung

– ... ist die Eigenschaft von Wellen, in gewissem Maße hinter Hindernisse gelangen zu können. **!**

– Nur Hindernisse a >> λ werfen scharfen Schatten. **!**

Beispiel: ■

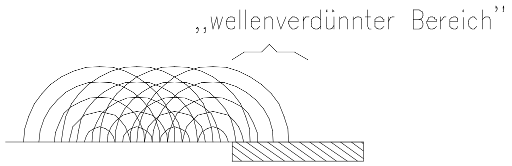
→ Man kann eine Person hinter einem Baum hören (a), aber **nicht** sehen (b):

a) Schallwellen (Beispiel Kammerton a): 440 Hz $\wedge$ 330 m · s^{-1}

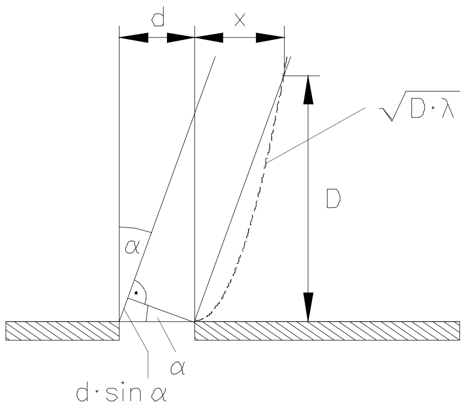
$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{330}{440}\frac{\mathrm{m \cdot s}}{\mathrm{s}} = 0{,}75 \text{ m}$$

b) Wellenlängenbereich für sichtbares Licht:
$\Rightarrow \quad \lambda =$ 400 ... 700 nm.

– allgemeine Deutung der Beugung mit HUYGENSschem Prinzip:



– etwas anspruchsvollere Erklärung über die Überlagerung von Wellen:



Der Gangunterschied der Wellen rechts und links vom Spalt beträgt:

$$d \cdot \sin\alpha \approx d \cdot \alpha$$

Die Wellen löschen sich gegenseitig aus, wenn α so groß wird, dass gilt:

$$d \cdot \alpha = \frac{\lambda}{2}$$

$\Rightarrow \qquad \alpha_{Grenz} = \frac{\lambda}{2d} \rightarrow \frac{\lambda}{d}$[1]

Die Breite x des „Eindringbereiches“ beträgt:

$$x = D \cdot \tan\alpha \approx D \cdot \alpha$$

$\Rightarrow \qquad x = D \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad \wedge \qquad x \approx d$ (Näherung)

$\Rightarrow \qquad x = \sqrt{D \cdot \lambda}$ (2)

Beispiel: ■

Hindernisbreite 0,5 m (Baum) ∧ Abstand 0,5 m
- Kammerton a: x = 0,61 m ⇒ Wellenfront "längst wieder geschlossen"
- Licht (0,5 µm): x = 0,5 mm = typische Unschärfe eines Schattens

17.5. DOPPLER-Effekt; MACHsche Wellen

– Wellenerzeuger bewegt sich mit Geschwindigkeit v relativ zum Medium. **!**

$\Rightarrow$ Welle läuft um $v_{Ph} \cdot T$
Quelle läuft um $v \cdot T$
} während der Periodendauer T

$\Rightarrow$ λ verringert sich von: $\lambda = v_{Ph} \cdot T$
auf: $\lambda' = (v_{Ph} - v) \cdot T$ (3)

$\Rightarrow$ ν erhöht sich auf:

$$\nu' = \frac{v_{Ph}}{\lambda'} = \frac{v_{Ph}}{(v_{Ph} - v) \cdot T} = \frac{1}{1 - \frac{v}{v_{Ph}}} \cdot \nu \qquad (4)$$

[1] Bei Beachtung weiterer Einflüsse ist diese Annahme „sicherer“.

– Wenn sich Wellenerzeuger vom Beobachter wegbewegt, sinkt ν auf:

$$\nu' = \frac{1}{1 + \frac{v}{v_{Ph}}} \cdot \nu \qquad (5)$$

Die Frequenzverschiebung lt. Gl. (4) bzw. (5) heißt ***DOPPLER-Effekt***.

⇒ Geschwindigkeitsschätzung anhand Tonumschlags möglich! (Feuerwehr, Hupe)

– **Kommentar:** ◆

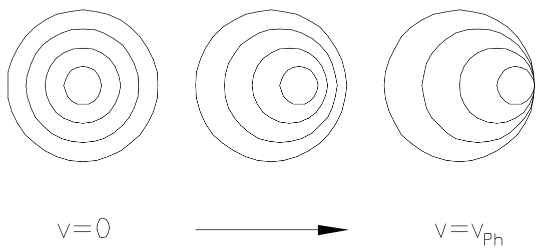
- Gl. (3), (4) und (5) betreffen die Bewegung der Quelle relativ zum Medium und zum (im Medium ruhenden) Beobachter.
- Eine relativ zum Medium ruhende Quelle bei bewegtem Beobachter führt (bei einer Bewegung auf die Quelle zu (+) bzw. von ihr weg (-)) auf:

$$\nu' = \left(1 \pm \frac{v}{v_{Ph}}\right) \cdot \nu \qquad (4‘)$$

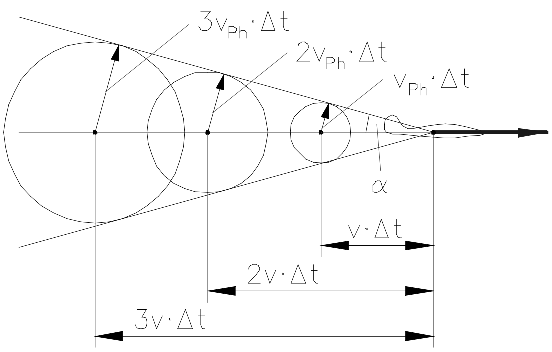
- Bei Lichtwellen gibt es ein solches Medium nicht und die Formeln Gl. (4) und Gl. (4‘) verschmelzen!

– ***MACHsche Wellen***:

Für $v \le v_{Ph}$ wird die Welle vor Quelle mehr oder weniger zusammengedrängt:



Für $v > v_{Ph}$ "türmen“ sich die Wellenfronten zum Überschallkegel auf:



Für den Öffnungswinkel α des Kegels gilt:

$$\sin\alpha = \frac{v_{Ph}}{v} = \frac{1}{M} \qquad (6)$$

M ... ***MACHzahl***

Die Machzahl gibt an, wieviel Mal v größer als die Schallgeschwindigkeit v_{Ph} (Phasengeschwindigkeit des Schalls) ist. **!**

Der Überschallknall ist das Überstreichen des Ortes des Beobachters durch den Kegel, kein einmaliges „Durchstoßen der Schallmauer“! **!**

17.6. Intensität einer Welle

– Wir betrachten nun die von der Welle (pro Zeit- und Flächeneinheit) transportierte Energie, d.h. die ***Energiestromdichte*** bzw. ***Intensität*** der Welle.

– Die Betrachtung erfolgt am Beispiel elastischer Wellen, gilt aber praktisch allgemein.

– Es findet ein ständiges hin und her von E_{kin} und E_{pot} statt (analog *<6.1.>*):

Grenzzustände:

1. $\xi = \xi_0$ (Auslenkung maximal)
$\Rightarrow \quad \dot{\xi} \equiv v = 0$
$\Big\}$ $E_{ges} = E_{pot}$, $E_{kin} = 0$

2. $\xi = v_0$ (Geschwindigkeit maximal)
also $\quad \xi = 0$ (Nulldurchgang)
$\Big\}$ $E_{ges} = E_{kin}$, $E_{pot} = 0$

Die hier verwendete Geschwindigkeit $v \equiv \dot{\xi}$ ist die sogenannte ***Schallschnelle***, die Geschwindigkeit des Schwingens. Sie darf nicht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schwingungszustandes, d.h. der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, verwechselt werden.

– Da E_{ges} sowieso konstant ist, nehmen wir Grenzfall 2 für die Ermittlung der Gesamtenergie ΔW eines Volumenelementes ΔV mit der Masse Δm:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\Delta m \cdot v_0^2 \qquad \Delta m = \rho \cdot \Delta V$$

$$= \frac{1}{2}\rho \Delta V \cdot v_0^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta W}{\Delta V} \equiv w = \frac{1}{2}\rho \cdot v_0^2 \tag{7}$$

Die ***Energiedichte*** w („Energieinhalt der Welle“) bewegt sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{Ph} der Welle. Damit ergibt sich für die Intensität I

$$I \equiv w \cdot v_{Ph} = \frac{1}{2} v_{Ph} \rho \cdot v_0^2 \tag{8}$$

Aus Grenzfall 1 erhält man analog:

$$I = \frac{1}{2} v_{Ph} \rho \cdot w^2 \cdot \xi_0^2 \tag{8'}$$

– Dies ist allgemeingültig: Die Intensität der Welle ist immer proportional dem **Quadrat** der Amplitude! **!**

– Ohne Beweis: Das Produkt $v_{Ph} \cdot \rho$ heißt ***Wellenwiderstand*** Z.

$$Z = v_{Ph} \cdot \rho \tag{9}$$

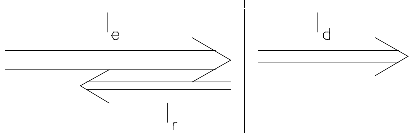
– **Kommentar**: ◆

Gl. (9) ist plausibel, da mit zunehmender v_{Ph} und zunehmendem ρ die „pro Zeiteinheit in Schwingungen versetzte Masse ansteigt“, was den Ausbreitungswiderstand der Welle (pro Volumeneinheit) erhöht.

17.7. Reflexion und Transmission an einer Grenzfläche

– Wir betrachten das Verhalten einer Welle an der Grenzfläche zweier Medien:

gegeben:	**Medium 1**	**Medium 2**
	$v_{Ph,1}$	$v_{Ph,2}$
	ρ_1	ρ_2
	$\Rightarrow\ Z_1 = v_{Ph,1} \cdot \rho_1$	$\Rightarrow\ Z_2 = v_{Ph,2} \cdot \rho_2$



Indizes:[1]
e - einfallend
d - durchgehend
r -reflektiert

– Energiesatz an der Grenzfläche:

$$I_e = I_r + I_d \tag{10}$$

bzw. mit Gl. (8) und (9):

$$\frac{1}{2} Z_1 v_e^2 = \frac{1}{2} Z_1 v_r^2 + \frac{1}{2} Z_2 v_d^2 \tag{11}$$

Gl. (11) umgestellt liefert:

$$\Rightarrow \qquad Z_1 (v_e^2 - v_r^2) = Z_2 \cdot v_d^2 \tag{12}$$

– Damit nicht unendlich große Deformationen auftreten, muss die Welle an der Grenzfläche stetig sein, d.h. Auslenkung ξ und Geschwindigkeit $\dot{\xi} = v$ müssen links und rechts gleich sein:

$$\Rightarrow \text{(u.a.)} \quad v_e + v_r = v_d \tag{13}$$

↙ ↘

Geschwindigkeit links Geschwindigkeit rechts

[1] Der Index „0“ wird der Einfachheit halber weggelassen, d.h. $v_{0,e} \equiv v_e$, usw.

– Gl. (12) und (13) aufgelöst nach v_d bzw. v_r ergibt:

$$\Rightarrow \qquad v_d = v_e \cdot \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad\qquad v_r = v_e \cdot \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \rightarrow \text{(b)} \tag{14}$$

– Daraus schließlich ermittelbar:

$$\left.\begin{aligned} I_d &\equiv \frac{1}{2} Z_2 \cdot v_d^2 = 4 I_e \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ I_r &\equiv \frac{1}{2} Z_1 \cdot v_r^2 = I_e \cdot \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \rightarrow \text{(a)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Diskussion: ◆

a) Im Allgemeinen ∃ ***Reflexion*** <u>und</u> ***Transmission***. **!**
Für $Z_1 = Z_2$ geht die gesamte Welle durch, d.h. die Reflexion wird Null.
Für $Z_1 << Z_2$ bzw. $Z_2 << Z_1$ geht $I_d \rightarrow 0$ (vollständige Reflexion).

b) Bei $Z_1 > Z_2$ (Übergang ins dünnere Medium) ist das Vorzeichen von v_r gleich dem von v_e, d.h. die Welle wird mit gleicher Phase reflektiert. **!**
Bei $Z_1 < Z_2$ ist das Vorzeichen von v_r entgegengesetzt dem von v_e, d.h., bei der Reflexion am dichteren Medium gibt es einen ***Phasensprung*** um π. **!**

Dies sind **allgemeingültige** Aussagen, die für alle Wellen gelten.